作 者 简 介



定光桂，南开大学数学科学学院教授，博士生导师.

1959~1961 年，南开大学数学系学习，毕业后留校任教.

1979年9月~1981年11月，赴瑞典皇家科学院数学所(Mittag-Leffler研究所)进修，并破格获得 博士学位(导师为当时(届)国际数学会主席L.Carleson和著名的泛函分析专家P. Enflo)，成为新中国派往西方学者中第一个获数学博士的学者.

1981年任副教授，1986年晋升为正教授，1989年被国务院学位委授予博士生导师.

1991~1994年，赴美国Iowa大学任访问教授. (1987年7月~1988年12月，任南开大学教务长；1987年2月~1991年8月任南开大学数学系主任.)

作者曾多次获教学、科研奖. 1989年获首届国家级优秀教学成果奖，1991年获国家教委科技进步奖，1998年获天津市首届自然科学奖，2000年获天津市“九五”立功奖章，2001年获宝钢优秀教师奖，2002年作者所讲授的“泛函分析”获教育部创建名牌课优秀项目奖. 作者撰写的著作《巴拿赫空间引论》被(中国台湾)“九章数学基金会”在其《让数学名著永恒》项目中首选为重版书目，并于1997年和1999年由“科学出版社”再版. 自1987年以来一直承担国家自然科学基金及国家教委博士点基金项目，并担任项目负责人.

《大学数学科学丛书》编委会

（以姓氏笔画为序）

顾　问：王　元　谷超豪　姜伯驹

主　编：李大潜

副主编：龙以明　冯克勤　张继平　袁亚湘

编　委：王维克　尹景学　叶向东　叶其孝

李安民　李克正　吴宗敏　吴喜之

张平文　范更华　郑学安　姜礼尚

徐宗本　彭实戈

大学数学科学丛书　21

泛函分析新讲

定光桂　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是具有鲜明特点的专著兼教材. 其创新之处是把赋范空间、赋准范空间和赋拟范空间结合起来深入讨论(特别是创造出了许多有趣的反例说明它们的差异点)，这样的做法不仅是理论上、并且也是实际问题的需要.

本书共有两部分. 第一部分的主要内容可以作为泛函分析的入门教材. 我们在前两章介绍和讨论了赋范、赋准范和赋拟范空间及其上的线性算子的基本概念，第三章介绍和讨论了所谓“线性泛函的三大原理”，即 Hahn-Banach 定理、开映像与闭图像定理以及共鸣定理(一致有界原理)，最后介绍了 Hilbert 空间的基本内容.

本书的第二部分以及第一部分全部(特别是一些*号部分和附录)则可作为高校的相关研究生教材. 在第二部分中，除了介绍著名的可分空间(改范)等价于 $C[a, b]$以及严格凸空间外，还介绍和讨论了(作为上述空间推广的)拓扑向量空间的基本而有用的一些概念和特性.

本书既可作为泛函分析(本科生和研究生)的教材，也可作为需要此专门知识的读者的一本参考书. 本书含有较多的例、反例和注记，并在每章后均附有习题(并在最后附有提示)，且在最后附有参考材料. 对于自学者以及启发和培养创造思维也是很有利的.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析新讲/定光桂 著. —北京：科学出版社，2007
(大学数学科学丛书；21)
ISBN 978-7-03-019534-0
Ⅰ.泛… Ⅱ.定… Ⅲ.泛函分析-研究生-教材 Ⅳ. O177
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 119026 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：张 琪
责任印制：赵德静／封面设计：耕者工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双 青 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 8 月第一次印刷 印张：24 1/2
印数：1—3 000 字数：462 000

定价：58.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

序

定光桂教授的新著《泛函分析新讲》是一部有鲜明特色的泛函分析专著兼教材. 和传统的泛函分析著作以赋范空间为主线不同, 该书把赋范空间、赋准范空间和赋拟范空间结合起来进行深入的讨论, 特别是列举了许多反例说明它们之间的差异点, 这些结果中有许多是定光桂教授和他的学生们做出的. 正如作者在前言中所说, 以赋准 (拟) 范空间为切入点, 不仅仅是一种理论上的推广, 更是实际问题的需要. 众所周知, 在讨论常微分方程初值问题在无穷区间上整体解的存在性时, 要用到无穷区间上连续函数组成的空间, 这不是赋范空间, 而是赋准范空间 (如作者前言中通过可数个拟范数所定义的准范数), 当然更是拓扑线性空间. 这时, 要对对应的积分算子在此空间中应用 Tychonoff 不动点定理. 由于此空间中元素列的收敛相当于函数列在任何有限区间上的一致收敛, 故检验起积分算子的紧性来很容易, 所以使用起来十分方便.

定光桂教授是我国泛函分析方面一位资深的学者, 科研成果卓著. 早年他在共鸣定理及其应用方面做出了出色的工作. 近年来, 他对等距 (拟等距、渐近等距) 映射进行了系统而深入的研究, 获得了许多深刻的结果, 这方面处于国际领先水平. 近十几年来, 我经常邀请他主持我的博士生的论文答辩, 他也经常邀请我主持他的博士生的论文答辩, 所以, 我对他和他的学生们的工作比较熟悉. 在我们的交往中, 我深感他学风严谨, 一丝不苟、踏踏实实做学问. 同时, 他为人直率、真诚, 深得学生们的尊敬.

该书可作为大学高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 该书内容十分丰富, 论述详细, 特别是书中有大量的例子, 这可加深读者对概念的理解和对定理意义的认识. 书中每一章后附有习题, 书末还有习题提示, 这些都能帮助读者掌握该书的内容. 除大学生和研究生外, 该书对从事泛函分析方向和微分方程方向研究的学者, 也是很有益处的.

郭大钧
2005 年 10 月 10 日于山东大学南院

前言

1986年在陈省身先生的努力下,南开大学数学系开设了“试点班”(现称 (理科)“基地班”) 的招生, 每年从全国高中奥林匹克数学竞赛的优胜者中挑选 30 名左右学生免试入校学习. 从那时至今 (除三年在美任教外), 十几年来, 我一直担任该班的“泛函分析”的教学. 由于该班学生数学素质好, 每届均有不少十分优秀的学生, 因此我们能够超越原来的教学大纲, 大胆地引进和介绍一些技巧性高的和崭新的教学内容. 这样一年又一年地改进、充实、创新, 最终形成了今天的这本书.

这是一本新的泛函分析的书. 说它“新”, 是因为它完全不同于现今国内外的“泛函分析”专著和教材. 在本书中, 我们的切入点不是从赋范空间来讨论问题, 而是从赋准 (拟) 范空间来开始我们的讲述. 我们之所以这样来讲述, 并不仅仅是一种理论上的推广, 更是实际问题的需要. 例如, 在各种微 (积) 分方程中, 人们常常需要在整个实 (复) 数域上连续的函数中去求解, 但对于这样的函数所组成的空间, (从拓扑向量空间理论可知) 其是不能组成赋范空间的. 然而, 其却可以构成一个赋准范空间. 即, 我们可以先定义可列个拟范数如下:

$$\|x\|_n = \max_{|x|\leqslant n} |x(t)| \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

再令准范数为

$$\|x\|^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n}.$$

可以证明: 对于在数域 $\mathbb{K}$ 上连续的函数列 $\{x_n, x_0\}$ 而言, $\|x_k - x_0\|^* \to 0$ 等价于: 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 均有 $\|x_k - x_0\|_n \to 0 \quad (k \to \infty)$. 也即: 在任何闭球 $B_n \triangleq \{t : |t| \leqslant n\}$ 上 $x_n(t)$ 均是一致收敛于 $x_0(t)$ 的. 而这样的定义正是求解方程的人所期望的性质.

然而, 当讲述是从赋准范空间出发时, 许多问题就出现了. 例如, 与赋范空间完全不同的是, 在赋准范空间中, 非空的球面 $S_\delta \triangleq \{x : \|x\|^* = \delta\}$ 可以有“洞”(甚至对于二维的赋准范空间, 其某个非空球面可以有无穷个“洞”); 又如, 当赋准范空间单位球面是紧集时, 其仍可能是无穷维的. 特别出人意料的是: 在一个完备的赋准范空间中, 可以有一列闭球套 $\{B_n\}, B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, 当球的半径 $r_n \nrightarrow 0$ 时, 可以出现 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$(空集) 的情形, 赋准范空间中的单位开球的闭包并非必为其单位闭球, 以及赋准范空间的单位球面可含有内点, 并且也可以由两个凸集组成等. 就是由于与赋范空间的这些差异性, 使得我们的新的讲述出现了许多困难, 但它也正是机遇——提供了我和基地班学生讨论和研究的课题. 因此, 在本书中, 一些有关赋准范空

间特性的新内容是 1995 年以后一些基地班学生的研究成果 (它们有的分散于一些论文中). 这里特别值得提出的是, 现在美国加州大学伯克利分校做博士后工作的詹大鹏博士和我的博士生张伦及刘锐同志的一些工作 (此外, 在本书的各章中, 也有一些我们的工作, 特别是在共鸣定理部分, 许多都是我们甚至是近几年论文的结果).

衷心感谢郭大钧教授在百忙之中抽出时间认真地阅读本书, 并且为本书作序. 本书稿是由我的学生陈东阳博士、侯志彬博士和博士生李磊录入, 并由侯志彬和李磊仔细校对而成, 此中侯志彬和李磊同志均做了大量创造性的工作, 特此对他们表示衷心的感谢.

此书可作为大学本科生和研究生的教材及参考书. 作为本科生只要学习本书的第一部分并且略去 * 号部分就可以了; 作为研究生, 则全读本书为好.

定光桂

2006 年 8 月于南开园

目 录

注：在书中，* 表示可选择或较难的内容.

第二部分

第一部分

第一章　赋范空间、赋准范空间和赋拟范空间

§1.1　赋 (准、拟) 范线性空间的定义以及基本特性

在线性代数及微分方程的学习中, 我们熟知, 如果把线性齐次代数方程组的解, 线性齐次微分方程的解等视为一个元素的话, 那么它们的集合和欧氏空间中的某些集合 (例如比较直观的二维和三维矢量空间所成的集合) 具有某种共同的性质, 而不考虑这些具体问题本身特点时, 我们便得出了抽象的线性空间的概念.

然而, 要对从实践和理论中抽象出来的数学的线性问题做深入的探讨, 仅有线性空间的概念还显得不够. 例如, 为了扩大收敛性的概念, 在理论上和方法上进一步研究线性问题, 都得对线性空间中的元素按一定的规则赋予相应的数值, 即向量的长度, 例如对每个 Lebesgue 可积函数赋予一个数值, 即函数的积分等, 这样便导出了抽象的赋范 (准范、拟范) 线性空间的概念.

定义 1　设 E 为线性空间, 如果在 E 上定义了一个 (非负) 函数, 记为 $||x||$, 其满足

(i) $||x|| \geqslant 0$ 且有 $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$(零元);

(ii) $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (三角不等式)(次加性);

(iii) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ (绝对齐次性)　$\forall x, y \in E, \alpha \in \mathbb{K}$,

这时我们称 $||x||$ 为元 x 的**范数**, 而定义了范数的空间称为**赋范线性空间**.

定义 2　如果上面的 $||x||$ 满足 (i) 和 (ii) 及

(iii)$'$　(a) $||-x|| = ||x||$,

(b) $||\alpha_n x|| \to 0$ (如 $\alpha_n \to 0$),

(c) $||\alpha x_n|| \to 0$ (如 $||x_n|| \to 0$),

$\forall x, x_n \in E$; $\alpha, \alpha_n \in \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ (这里, $\mathbb{K}$ 为数域, 其可为实数域 $\mathbb{R}$, 也可为复数域 $\mathbb{C}$), 则称 $||x||$ 为**准范数**. 而 $(E, ||x||)$ 称为**赋准范空间**.

定义 2$'$　如果上面的 $||x||$ 满足 (i) 和 (ii) 及

(iii)* 存在数$\beta > 0$, 使得 $||\alpha x|| = |\alpha|^\beta ||x||$,　$\forall x \in E, \alpha \in \mathbb{K}$,

则称 $||x||$ 为β **范数**, 而空间 $(E, ||x||)$ 称为**赋 β 范空间**.

定义 3　如果上面的 $||x||$ 满足 (ii) 和 (iii) 及

(i)$'$ $||x|| \geqslant 0$(即去掉条件 $||x|| = 0 \Rightarrow x = \theta$),

则称 $||x||$ 为**拟范数**, 而 $(E, ||x||)$ 称为**赋拟范空间**.

定义 4 如果上面的 $||x||$ 满足 (i)$'$ 和 (iii)$'$ 及 (ii), 则 $||x||$ 称为**拟准范数**, 而 $(E,||x||)$ 称为**赋拟准范空间**.

注 显然范数必为准范数和拟范数, 准范数和拟范数必为拟准范数. 反之均未必成立. 准范数和拟范数无必然联系.

注意 在泛函分析中, 我们均不讨论使所有元的 (准、拟) 范数恒为 0 的空间.

回忆一下, 满足下面三条公理的空间 (E,d) 称为**距离空间**:

(i) $d(x,y)\geqslant 0,\ d(x,.y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(ii) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$;

(iii) $d(x,y)=d(y,x);\quad \forall x,y,z\in E$

(这三条公理与下面两条公理:

(i) $d(x,y)\geqslant 0;\ d(x,.y)=0\Leftrightarrow x=y.$

(ii)* $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$

是等价的). 这时 d 称为**距离**.

当上面 (i) 中去掉 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ 时, 则 d 称为**拟距离**. 而相应的空间 (E,d) 就称为**拟距离空间**.

性质 1 如果 E 为"准范"空间, 令

$$d(x,y)=||x-y||,\quad \forall x,y\in E,$$

则 d 为一个距离. 如果 E 为"拟准范"空间, 则 d 为一拟距离.

而且此距离具有"平移不变性", 即

$$d(x,y)=d(x+z,y+z),\quad \forall x,y,z\in E.$$

此外, 当 E 为"(拟) β 范空间"时, 此 (拟) 距离空间对 θ 点具有 β 绝对齐性, 即

$$d(\alpha x,\theta)=|\alpha|^{\beta}d(x,\theta);\quad \forall x,y,z\in E,\alpha\in\mathbb{K}.$$

E 作为距离空间, 便可以由其距离定义极限. 设 E 是赋范线性空间, $\{x_n,x_0\}\subset E$. 我们称元列 $\{x_n\}$ **收敛** 于 x_0 是指

$$\lim_{n\to\infty}||x_n-x_0||=0,$$

即

$$x_n\to x_0\Longleftrightarrow d(x_n,x_0)\to 0\ (\Longleftrightarrow ||x_n-x_0||\to 0).$$

这种收敛称**按范数收敛**.

注意到从"拟准"范数的三角不等式 (ii) 必可导出

$$|\,||x||-||x_0||\,|\leqslant ||x-x_0||,\quad \forall x,x_0\in E.$$

因而得到下面的结果：

性质 2 “拟准”范数 $||x||$ 必为 x 的连续函数.

为了说明赋范线性空间的另一基本特征, 我们先给出下面关于抽象空间中“线段”与“凸集”的定义. 设 E 为线性空间, x 和 y 是 E 中的任意两个元, 则集合 $\{\lambda x+(1-\lambda)y:\ \ 0\leqslant\lambda\leqslant1\}$ 就称为由 x 和 y 所组成的**线段**, 记为 $[x,y]$. 类似的, 当以上线段中不含有 x 或不含有 y 时, 或同时不含有 x 和 y 时, 则分别称其为**半开半闭线段**或**开线段**, 记为 $(x,y]$, $[x,y)$ 和 (x,y). 线性空间 E 中的集 V 称为**凸集**是指对任意的 $x,y\in V$ 均有 $[x,y]\in V$.

性质 3 在“拟范”空间 E 中, 任意“球”

$$B(x_0,r)\triangleq\{x\in E:\ \ ||x-x_0||\leqslant r\}$$

必为凸集.

其实, 对任意的 $x,y\in B(x_0,r)$, 由于 $||x-x_0||\leqslant r,||y-x_0||\leqslant r$, 根据拟范数的性质立即推得：当 $0\leqslant\lambda\leqslant1,\lambda\in\mathbb{R}$ 时, 有

$$\begin{aligned}||\lambda x+(1-\lambda)y-x_0||&\leqslant||\lambda(x-x_0)+(1-\lambda)(y-x_0)||\\&\leqslant\lambda||x-x_0||+(1-\lambda)||y-x_0||\\&\leqslant\lambda r+(1-\lambda)r=r,\end{aligned}$$

即 $\lambda x+(1-\lambda)y\in B(x_0,r)$.

性质 4 设 $p(x)$ 为线性空间 E 上的“次加”泛函, 则

(a) 当 $p(x)$ 为“对称”泛函时 (即 $p(-x)=p(x),\quad\forall x\in E$), 必有 $p(x)\geqslant0$;

(b) 若 $p(x)$ 不恒为 0, 则当存在 $\beta>0$, 使得

$$p\left(\frac{1}{2}x\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}p(x),\ \ \forall x\in E\tag{1.1.1}$$

时, 必有 $\beta\leqslant1$. 特别地, 由此可知, 当 $||x||$ 具有上面范 (ii) 和范 (iii) 性质时, 其必为拟范；而当其为 β 范时, 必有 $\beta\leqslant1$.

事实上, 当 $p(x)$ 为次加泛函时, 我们有

$$p(\theta)=p(\theta+\theta)\leqslant p(\theta)+p(\theta)=2p(\theta).$$

由此得出 $p(\theta)\geqslant0$, 从而

$$0\leqslant p(\theta)=p(x+(-x))\leqslant p(x)+p(-x).\tag{1.1.2}$$

故由 $p(x)$ 的对称性知 (a) 是成立的.

此外可以断言, 必存在一元 $x_0 \in E$, 使得 $p(x_0) > 0$. 事实上, 反之若 $p(x) \leqslant 0 \ (\forall x \in E)$, 则从式 (1.1.2) 便可得到 $p(-x) = -p(x) \ (\forall x \in E)$, 从而得到 $p(x) = 0 \ (\forall x \in E)$. 矛盾!

故当 $p(x)$ 满足式 (1.1.1) 时, 由

$$0 < p(x_0) \leqslant p\left(\frac{x_0}{2}\right) + p\left(\frac{x_0}{2}\right) \leqslant 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta} p(x_0),$$

则知 $\beta \leqslant 1$.

性质 5 在赋"拟范"空间 E 中, 任意"原心球面" $S_r \triangleq \{x \in E:\ ||x|| = r\}$ 均为非空集. 对于赋"准范"空间 E 而言, 若其满足对任意元 $\theta \neq x \in E$, 均有 $\lim_{\lambda \to +\infty} ||\lambda x|| = +\infty$, 则其任意球面均是**"完整"**的 (**无洞的**) (即对于空间 E 中任意原心球面 S_r, 必有以下性质: $\forall \theta \neq x \in E, \exists \lambda > 0$, 使得 $||\lambda x|| = r$). 由此可知, 赋拟范空间中任意球面均是完整的.

事实上, 由空间的约定可知, 对于任意拟范空间 E, 必存在元 x_0 , 使得 $||x_0|| \neq 0$, 由此, 从 $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ 可知, 必有 $S_r \neq \varnothing \ (\forall r > 0)$.

而当赋准范空间 E 具有上述假设条件时, 对任意元 $x \neq \theta$(则 $||x|| \neq 0$), 我们令

$$\varphi(\lambda) = ||\lambda x||, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

由前面性质 2 可知 $\varphi(\lambda)$ 为 λ 的连续函数, 故由 $\varphi(\theta) = 0$ 和假设 $\lim_{\lambda \to +\infty} \varphi(\lambda) = +\infty$, 从连续函数的"中间值定理"则可导出 E 中任意原心球面均是完整的.

性质 6* 对于准范数而言, 其"数乘"必为二元连续函数, 即准范 $||\lambda x||$ 为 (λ, x) 的二元连续函数(例, 可参见文献 [1]p.63~65.)

§1.2 赋范空间的例子

例 1 仅"有限项"非 0 的数列的全体

$$(c_{00}) \triangleq \Big\{\{\xi_n\}:\ \xi_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}, \{\xi_n\}\text{仅有有限项非0}\Big\},$$

范数定义为

$$||x|| = ||\{\xi_n\}|| = \sup_n |\xi_n|, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (c_{00}).$$

例 2 收敛于 0 的数列的全体

$$(c_0) \triangleq \Big\{\{\xi_n\}:\ \xi_n \to 0, \xi_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\Big\},$$

范数定义为

$$||x|| = ||\{\xi_n\}|| = \sup_n |\xi_n|, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (c_0).$$

例 3 收敛数列的全体

$$(c) \triangleq \Big\{\{\xi_n\}:\ \lim_n \xi_n\text{极限存在}, \xi_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\Big\},$$

范数定义为

$$\|x\| = \|\{\xi_n\}\| = \sup_n |\xi_n|, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (c).$$

例 4 有界数列的全体

$$(\ell^\infty)(\text{或记为}(m)) \triangleq \Big\{\{\xi_n\}:\ \sup_n |\xi_n| < \infty, \xi_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\Big\},$$

范数定义为

$$\|x\| = \|\{\xi_n\}\| = \sup_n |\xi_n|, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (\ell^\infty).$$

例 5 p 幂绝对可和数列的全体 $(p \geqslant 1)$

$$(\ell^p) \triangleq \Big\{\{\xi_n\}:\ \sum_n |\xi_n|^p < \infty, \xi_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\Big\},$$

范数定义为

$$\|x\|_p = \|\{\xi_n\}\| = \Big(\sum_n |\xi_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (\ell^p)$$

(其范数 (ii) 性质将在本节最后验证).

注 1 按赋范空间有下面包含关系:

$$(c_{00}) \subset (c_0) \subset (c) \subset (\ell^\infty).$$

注 2 按"代数空间"有下面集合的包含关系:

$$(\ell^p) \subset (c_0), \quad (\ell^{p_1}) \subset (\ell^{p_2}), \ \forall p \geqslant 1, \ \ 1 \leqslant p_1 < p_2.$$

注 3* 下面不等式是有趣的:

$$\Big(\sum_n |\xi_n|^{p_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant \Big(\sum_n |\xi_n|^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}}, \ \ \forall p_2 > p_1 \geqslant 1$$

(由此不等式可导出后面赋准范空间 (ℓ^β), $0 < \beta < 1$, 所需的不等式).

为证明上面的不等式, 我们给出下面的引理:

引理 1* 对于任意非负实数列 $\{a_n\}$, 以及任意两个正数 p_1 和 p_2 必有关系式

$$\Big(\sum_n a_n^{p_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant \Big(\sum_n a_n^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}}, \quad \forall p_2 \geqslant p_1 > 0.$$

(此即, 函数 $F(x) = (\sum_n a_n^x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $\mathbb{R}^+$ 内是"单调下降"的.)

证明 我们给出两种证法.

证法 1 分两种情形来验证:

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{p_1} = 1$, 那么, 因设 $a_n \geqslant 0$, 故有 $a_n^{p_1} \leqslant 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. 于是注意到假设 $p_2 \geqslant p_1 > 0$, 就可得到

$$a_n^{p_2} = (a_n^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}} \leqslant a_n^{p_1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

从而, 由开始的假设可导出

$$\Big(\sum_n a_n^{p_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant \Big(\sum_n a_n^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_2}} = 1 = \Big(\sum_n a_n^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}}.$$

(2) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{p_1} \neq 1$, 则令

$$b_n = \frac{a_n}{(\sum_n a_n^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

便有 $\sum_n b_n^{p_1} = 1$. 于是, 对于非负数列 $\{b_n\}$, 由于上段 (1), 则可导出

$$\Big(\sum_n b_n^{p_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant \Big(\sum_n b_n^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}} = 1.$$

而当注意到 b_n 的取法, 从上关系式则有

$$\Big(\sum_n a_n^{p_2} \Big/ \Big(\sum_n a_n^{p_1}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\Big)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant 1,$$

从而得到

$$\Big(\sum_n a_n^{p_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant \Big(\sum_n a_n^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}}.$$

证法 2 仅须证

$$\sum_n \Big(\frac{|a_n|^{p_1}}{(\sum_n |a_n|^{p_2})^{\frac{p_1}{p_2}}}\Big) \geqslant 1.$$

事实上, 当令 $c'_n = \frac{|a_n|^{p_1}}{(\sum_n |a_n|^{p_2})^{\frac{p_1}{p_2}}}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ 时, 则由 $\sum_n c_n'^{\frac{p_2}{p_1}} = 1$ 知 $0 \leqslant c'_n \leqslant 1$, 从而导出

$$\sum_n c'_n \geqslant \sum_n c_n'^{\frac{p_2}{p_1}} = 1. \qquad \square$$

由引理 1, 我们便可得到下面的引理:

引理 2* 对于任意的非负实数列 $\{a_n\}$ 及正数 p, 必有以下两关系式:

$$\left(\sum_n a_n\right)^p \leqslant \sum_n a_n^p \quad (当 0 < p \leqslant 1 时)$$

及

$$\left(\sum_n a_n\right)^p \geqslant \sum_n a_n^p \quad (当 p \geqslant 1 时).$$

证明 事实上, 只要在上面引理 1* 中令: $p_1 = p\ (\leqslant 1)$ 和 $p_2 = 1$, 就可以直接得到上面的第一个不等式; 而当令: $p_1 = 1$ 和 $p_2 = p\ (\geqslant 1)$ 时, 则可得到第二个不等式. □

下面给出注 3 的证明:

验证 我们只要在引理 1* 中令 $a_n = |\xi_n|\ (n \in \mathbb{N})$ 即可得到所需结论. □

例 6 $[a,b]$ 上的连续函数全体

$$C[a,b] \triangleq \{x(t):\ x(t) 在 [a,b] 上连续\},$$

范数定义为

$$||x|| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|, \quad \forall x = x(t) \in C[a,b]$$

(类似可定义 $C(\Omega)$, 其中 Ω 是紧 T_2 空间).

例 7 $[a,b]$ 上 p 幂绝对可和函数的全体 $(p \geqslant 1)$

$$L^p[a,b] \triangleq \left\{x(t):\ \int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty\right\},$$

范数定义为

$$||x||_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x = x(t) \in L^p[a,b]$$

(其范 (ii) 在本节最后验证).

例 8 $[a,b]$ 上"概"有界函数的全体

$$L^\infty[a,b](M[a,b]) \triangleq \{x(t):\ x(t) 为 [a,b] 上"概"有界可测函数\},$$

范数定义为

$$||x|| = \inf_{\mu(E_0)=0} \sup_{t\in[a,b]\setminus E_0} |x(t)|; \quad \forall\, x = x(t) \in L^\infty[a,b].$$

验证 我们将 $[a,b]$ 换为更一般的测度空间 $(\Omega, \mathbb{B}, \mu)$ 来验证.

(i) $||x|| \geqslant 0$ 是显然的. 此外 $x \neq \theta$, 故存在 $E \subset \Omega, \mu(E) \neq 0$ 以及 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$|x(t)| \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall\, t \in E,$$

从而对任意的 $E_0 \subset \Omega, \mu(E_0) = 0$, 注意到 $E \setminus E_0 \neq \varnothing$, 则有

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_0} |x(t)| \geqslant \sup_{t\in E\setminus E_0} |x(t)| \geqslant \varepsilon_0,$$

故由 $||x||$ 的定义知 $||x|| \geqslant \varepsilon_0$. 由此可知: $||x|| = 0 \Rightarrow x = \theta$.

(ii) 验证

$$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||, \quad \forall\, x, y \in L^\infty(\Omega).$$

事实上, 对任意 $\varepsilon > 0$, 由定义可知存在 $E_0', E_0'' \subset \Omega$, $\mu(E_0') = \mu(E_0'') = 0$, 使得

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_0'} |x(t)| \leqslant ||x|| + \varepsilon, \qquad \sup_{t\in\Omega\setminus E_0''} |x(t)| \leqslant ||y|| + \varepsilon.$$

当注意到 $\mu(E_0' \bigcup E_0'') \leqslant \mu(E_0') + \mu(E_0'') = 0$ 时, 则有

$$\begin{aligned} ||x+y|| &\leqslant \sup_{t\in\Omega\setminus(E_0'\cup E_0'')} |x(t)+y(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in\Omega\setminus(E_0'\cup E_0'')} (|x(t)| + |y(t)|) \\ &\leqslant \sup_{t\in\Omega\setminus(E_0'\cup E_0'')} |x(t)| + \sup_{t\in\Omega\setminus(E_0'\cup E_0'')} |y(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in\Omega\setminus E_0'} |x(t)| + \sup_{t\in\Omega\setminus E_0''} |y(t)| \\ &\leqslant ||x|| + ||y|| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

由此, 从 ε 的任意性便得到了所需结论.

(iii) $||\alpha x|| = |\alpha|\,||x||$ 是显然的.

综合上面三点则知 $L^\infty(\Omega)$ 是 Banach 空间. □

注 在以上两例中, 两个函数相等是指此两个函数“概”相等. 以后, 对于这样的空间也是这样理解.

例 9 $[a,b]$ 上有界函数的全体

$$B[a,b] \triangleq \{x(t):\ x(t)\text{为}[a,b]\text{有界函数}\},$$

范数定义为

$$||x|| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|, \quad \forall x = x(t) \in B[a,b].$$

更广泛地有空间

$$\ell^\infty(\Gamma) \triangleq \Big\{\{x(\gamma)\}: \{x(\gamma)\}\text{在}\Gamma\text{上有界}\Big\}$$

(其中 Γ 为任意“指标集”), 范数定义为

$$||x|| = \sup_{\gamma\in\Gamma} |x(\gamma)|, \quad \forall x = \{x(\gamma)\} \in \ell^\infty(\Gamma).$$

为了证明 (ℓ^p) 与 $L^p[a,b](p>1)$ 的三角不等式, 需要介绍下面三个引理:

引理 3

$$\xi \cdot \eta \leqslant \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q} \quad (p, q > 1),$$

(其中 q 为数 p 的“对偶数”, 即满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.)

证明 此引理有三种证明方法: 积分法、微分法和代数法.

(1) 积分法. 考虑函数 $y = x^{p-1} (x \geqslant 0)$. 比较图 1.1 的面积可以得到

$$\xi \cdot \eta \leqslant S_1 + S_2.$$

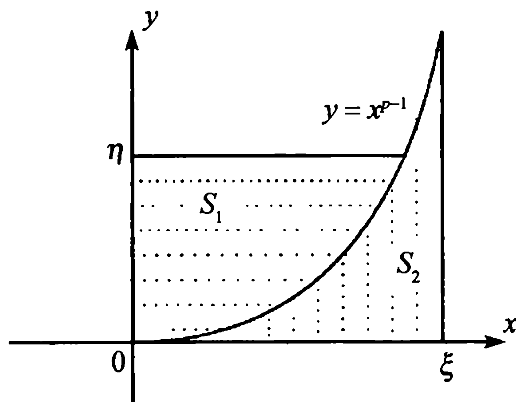


图 1.1

利用定积分的几何意义, 可知

$$S_1 = \int_0^\xi x^{p-1} dx = \frac{\xi^p}{p}$$

及

$$S_2 = \int_0^\eta y^{\frac{1}{p-1}} = \frac{\eta^q}{q},$$

由此立即可以得到引理的结论. □

(2) 微分法. 考虑函数

$$y(x) = \frac{x^p}{p} - x + \frac{1}{q} \quad (x \geqslant 0).$$

易知, 其在 $x = 1$ 处取到最小值 0, 即有 $y(x) \geqslant 0 \ (\forall x \geqslant 0)$. 特别地, 令 $x = \frac{\xi \cdot \eta}{\eta^q}$ 则可得出引理结论. □

(3) 代数法. 由下面一个代数不等式:

$$x^\beta - 1 \leqslant \beta(x-1), \quad \forall x \geqslant 1 (0 \leqslant \beta \leqslant 1),$$

不妨假设 $\eta^* \geqslant \xi^*$. 令 $x = \frac{\eta^*}{\xi^*}$ 及 $\beta = \frac{1}{q}$ 代入上式后两边同乘以 ξ^*, 并注意 p 和 q 的关系, 则

$$(\xi^*)^{\frac{1}{p}} \cdot (\eta^*)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{\xi^*}{p} + \frac{\eta^*}{q}.$$

最后, 令 $\xi^* = \xi^p, \eta^* = \eta^q$ 则可导出引理结论. □

引理 4 (Hölder不等式)　(1) 级数形式. 对任意数列 $\{\xi_k\}, \{\eta_k\} \subset \mathbb{K}$, 均有

$$\sum_k |\xi_k \cdot \eta_k| \leqslant \Big(\sum_k |\xi_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_k |\eta|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \quad \Big(p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\Big).$$

(2) 积分形式. 对于 $[a,b]$ 上任意 p 幂绝对可和 (复) 函数 $x(t)$ 与 q 幂绝对可和 (复) 函数 $y(t)$, 均有

$$\int_a^b |x(t) \cdot y(t)| dt \leqslant \Big(\int_a^b |x(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b |y(t)|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}} \quad \Big(p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\Big).$$

证明　(1) 在引理 1 中, 令

$$\xi = |\xi_k| \Big/ \Big(\sum_k |\xi_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \eta = |\eta_k| / \Big(\sum_k |\eta_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}},$$

然后, 按 $k \in \mathbb{N}$ 作 “和”, 整理后便得到结论 (1).

(2) 类似地, 令

$$\xi = |x(t)| \Big/ \Big(\int_a^b |x(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \eta = |y(t)| \Big/ \Big(\int_a^b |y(t)|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}},$$

使用引理 1 后对 t 进行 “积分” 再整理便得到了 (2). □

注　在引理 4 中, 当 $p = q = 2$ 时, 那里的结论 (1) 便是熟知的 Cauchy 不等式, 结论 (2) 便是熟知的 Schwarz 不等式.

引理 5 (Minkowski 不等式)　(1) 级数形式. 对于任意数列 $\{\xi_k\}\{\eta_k\} \subset \mathbb{K}$, 均有

$$\Big(\sum_k |\xi_k + \eta_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\sum_k |\xi_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_k |\eta_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1.$$

(2) 积分形式. 对于 $[a,b]$ 上任意 p 幂绝对可和 (复) 函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均有

$$\Big(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\int_a^b |x(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_a^b |y(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1.$$

证明 (1) 显然

$$\sum_k |\xi_k+\eta_k|^p \leqslant \sum_k |\xi_k+\eta_k|^{p-1}\cdot|\xi_k| + \sum_k |\xi_k+\eta_k|^{p-1}\cdot|\eta_k|.$$

注意到 $(p-1)q=p$, 对上式右边两项分别用引理 2 便得到了结论 (1).

(2) 注意到当函数 $|z(t)|$ 是 p 幂可和时, $|z(t)|^{p-1}$ 必为 q 幂可和, 完全类似地用上面引理 2 的积分形式, 便得到了本引理的结论 (2). □

§1.3 (非赋范的) 赋准范空间的例子

例 1

$$(\ell^\beta) \triangleq \Big\{\{\xi_k\}:\ \sum_k |\xi|^\beta < \infty, \xi_k\in\mathbb{K}, k\in\mathbb{N}\Big\},$$

这里 $0<\beta<1$. 其上定义准范

$$||x||^* = ||\{\xi_k\}||^* = \sum_k |\xi_k|^\beta, \quad \forall x=\{\xi_k\}\in(\ell^\beta).$$

验证 范 (i) 与范 (iii)′ 均是容易验证的. 下面仅来验证范 (ii), 也即证明

$$|\xi_n|^\beta + |\eta_n|^\beta \geqslant |\xi_n+\eta_n|^\beta, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

下面用两种方法来证明:

证法 1 不妨假设 ξ 和 η 不全为 0, 此时, 注意到

$$\frac{|\xi|}{|\xi|+|\eta|}\leqslant 1, \quad \frac{|\eta|}{|\xi|+|\eta|}\leqslant 1\ , \quad 0<\beta<1,$$

故有

$$\Big(\frac{|\xi|}{|\xi|+|\eta|}\Big)^\beta + \Big(\frac{|\eta|}{|\xi|+|\eta|}\Big)^\beta \geqslant \frac{|\xi|}{|\xi|+|\eta|} + \frac{|\eta|}{|\xi|+|\eta|} = 1.$$

由此立即得到

$$|\xi|^\beta + |\eta|^\beta \geqslant (|\xi|+|\eta|)^\beta \geqslant |\xi+\eta|^\beta.$$

证法 2 令 $\varphi(\xi)=(\xi+\eta)^\beta-\xi^\beta$ (其中: $\xi,\eta>0, 0<\beta<1$), 则由 $\varphi'(\xi)=\beta(\xi+\eta)^{\beta-1}-\beta\xi^{\beta-1}=\beta((\xi+\eta)^{\beta-1}-\xi^{\beta-1})\leqslant 0$, 得到 $\varphi(\xi)\leqslant\varphi(0)$, 也即 $(\xi+\eta)^\beta\leqslant\xi^\beta+\eta^\beta$. □

例 2

$$L^\beta[a,b] \triangleq \Big\{x(t):\ \int_a^b |x(t)|^\beta dt < +\infty\Big\} \quad (0<\beta<1),$$

其准范定义为

$$\|x\|^* = \int_a^b |x(t)|^\beta dt, \quad \forall\, x = x(t) \in L^\beta[a,b].$$

验证　从上面例 1 中的不等式, 显然容易验证这里的结论. □

例 3

$$(s) \triangleq \{\{\xi_n\}:\ \{\xi_n\}\ \text{为任意数列}\},$$

其准范定义为

$$\|x\|^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|}, \quad \forall\, x = \{\xi_n\} \in (s).$$

验证　先来验证范 (ii), 也即验证

$$\frac{|\xi_n + \eta_n|}{1+|\xi_n+\eta_n|} \leqslant \frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|} + \frac{|\eta_n|}{1+|\eta_n|} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

证法 1　直接由下面不等式导出:

$$\begin{aligned}\frac{|\xi+\eta|}{1+|\xi+\eta|} &= 1 - \frac{1}{1+|\xi+\eta|} \leqslant 1 - \frac{1}{1+|\xi|+|\eta|} \\ &= \frac{|\xi|+|\eta|}{1+|\xi|+|\eta|} \\ &\leqslant \frac{\xi}{1+|\xi|} + \frac{|\eta|}{1+|\eta|} \quad (\forall\, \xi,\eta \in \mathbb{K}).\end{aligned}$$

证法 2　定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的函数 $f(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ 的导函数 $f'(\lambda) = \frac{1}{(1+\lambda)^2}$ 是非负的, 故其为单增的, 从而

$$\frac{|\xi+\eta|}{1+|\xi+\eta|} \leqslant \frac{|\xi|+|\eta|}{1+|\xi|+|\eta|} \leqslant \frac{|\xi|}{1+|\xi|} + \frac{|\eta|}{1+|\eta|} \quad (\forall\, \xi,\eta \in \mathbb{K}).$$

其次, 验证范 (iii)′ (b). 事实上, 对任意元 $x = \{x(n)\} \in (s)$ 及 $\alpha_m \to 0$ (这里 $\{\alpha_m\} \subset \mathbb{K}$), 不难得知: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{n>n_0} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

此外, 由设可知: 存在 $m_0 \in \mathbb{N}$, 当 $m > m_0$ 时有

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{|\alpha_m x(n)|}{1+|\alpha_m x(n)|} < \frac{\varepsilon}{2},$$

因而导出

$$\begin{aligned}||\alpha_m x||^* &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\alpha_m x(n)|}{1+|\alpha_m x(n)|} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{|\alpha_m x(n)|}{1+|\alpha_m x(n)|} + \sum_{n>n_0} \frac{1}{2^n} \\ &< \varepsilon, \quad \forall m > m_0.\end{aligned}$$

此即 $||\alpha_m x||^* \to 0$ (如 $\alpha_m \to 0$).

最后, 我们来验证范 (iii)′ (c). 事实上, 如 $|\alpha| \leqslant 1, \{x_m\} \subset (s)$, 则由上面验证 (ii) 时已知: $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上是单增的, 故有

$$||\alpha x_m||^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\alpha x_m(n)|}{1+|\alpha x_m(n)|} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_m(n)|}{1+|x_m(n)|},$$

又从范 (ii) 可知, $||n x_m||^* \leqslant n||x_m||^* (\forall n \in \mathbb{N})$.

由上可知, 对于任意的 $\alpha \in \mathbb{K}, \{x_m\} \subset (s)$, 当 $||x_m||^* \to 0$ 时, 由上两不等式则导出

$$\begin{aligned}||\alpha x_m||^* &= \left\|([\alpha]+1)\frac{\alpha}{[\,|\alpha|]+1} x_m\right\|^* \\ &\leqslant ([\alpha]+1)||\frac{\alpha}{[\,|\alpha|]+1} x_m||^* \leqslant ([\alpha]+1)||x_m||^* \\ &\to 0\end{aligned}$$

(这里 $[\alpha]$ 表示 α 的 “整数部分”). □

注 在 (s) 空间中, 利用 “优级数” $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 的分 (两) 段法, 可以证明, 其内的点列 “收敛” 的特征是

$$x_k \to x_0 \Longleftrightarrow x_k(n) \to x_0(n) \quad (k \to \infty), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(其中 $x_0 = \{x_0(n)\}, x_k = \{x_k(n)\}; k = 1, 2, \cdots$). 此即 “元列的收敛等价于其各坐标均收敛”.

例 4

$$S[a,b] \triangleq \{[a,b]\text{上所有几乎处处有限的“可测”函数}\,x(t)\text{之全体}\},$$

其准范数定义为

$$||x||^* = \int_a^b \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|} dt, \quad \forall\, x = x(t) \in S[a,b].$$

验证　从例 3 中的不等式容易验证. □

注　可以证明, 在 $S[a,b]$ 空间中, 其元列“收敛”的特征是

$$x_k \to x_0 \Longleftrightarrow x_k(t)\text{“依测度收敛”于}x_0(t)$$

(即: $\forall \delta > 0, \mu(\{t \in [a,b]\colon |x_k(t) - x_0(t)| \geqslant \delta\}) \to 0(k \to \infty)$).

为了认识赋准范空间的作用, 我们注意下面的例子. 在微分方程和一些实际问题中, 我们常常关心的是在“整个”实直线 (或复平面) 上定义的连续函数, 而这样的连续函数全体是不能赋范的, 然而它们却是可以赋准范的, 例子如下:

例 5

$$C(\mathbb{K}) \triangleq \{\text{数域}\mathbb{K}\text{上的连续函数的全体}\} \quad (\text{其中}\mathbb{K} = \mathbb{R}\text{或}\mathbb{C}),$$

其准范定义为

$$||x||^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{||x||_n}{1 + ||x||_n} \quad (\text{这里}||x||_n \triangleq \max_{|t| \leqslant n} |x(t)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}).$$

验证　由拟范列 $\{||x||_n\}$ 及 (s) 空间的三角不等式的性质不难验证上面定义的 $||x||^*$ 的范 (ii) 性质, 至于范 (i) 及范 (iii)* 则是容易验证的. □

注　对于数域 $\mathbb{K}$(实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$) 上定义的连续函数, 由上面范数定义的收敛性质, 只要注意例 3 后面的注则知, 对于任意元列 $\{x_k; k = 0, 1, 2, \cdots\} \subset C(\mathbb{K})$, $x_k \to x_0$ 就等价于对任意的 $n \in \mathbb{N}, x_k(t)$ 在闭集 $|t| \leqslant n$ 上均“一致收敛”于 $x_0(t)$.

例 6　空间 $(a_{(1)}) \triangleq (\mathbb{R}, ||x||^*)$, 其中准范数定义为 (如图 1.2 所示):

$$||x||_a^* = \begin{cases} |x|, & \text{当}|x| \leqslant 1\text{时;} \\ 1, & \text{当}|x| \geqslant 1\text{时.} \end{cases}$$

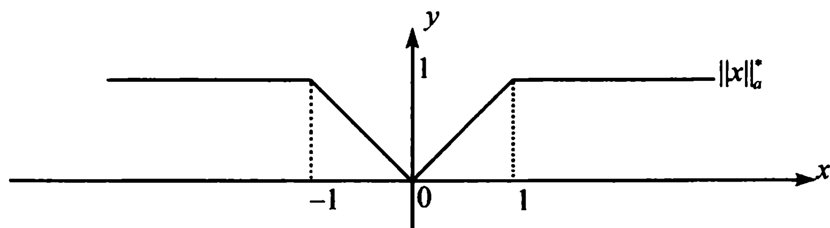


图 1.2

验证　仅来验证范 (ii), 我们也给出两个证法:

证法 1　仅分两种情形来讨论:

(1) 当 $|x_1|, |x_2| < 1$ 时, 从定义, 此时有 $||x_i||_a^* = |x_i|(i = 1, 2)$. 显然 $||x||_a^* \leqslant |x|(\forall x \in \mathbb{R})$, 从而有

$$||x_1 + x_2||_a^* \leqslant |x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2| = ||x_1||_a^* + ||x_2||_a^*.$$

(2) 当 $\max\{|x_1|,|x_2|\} \geqslant 1$ 时, 由 $||x||_a^*$ 定义立即可得

$$||x_1+x_2||_a^* \leqslant 1 \leqslant ||x_1||_a^* + ||x_2||_a^*. \qquad \square$$

为了得到其另外的一种证法, 我们来介绍一个命题. 此命题可分段地用数学分析中的 "中值公式" 整理之后而得.

命题 如果函数 $\varphi(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 内除 "有限" 个点外均可导, 且其导数值有界于 ρ, 那么必有

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \leqslant \rho|x_2-x_1|.$$

下面给出例 6 的另一证法:

证法 2 也分两种情形来验证;

(1) 当 $|x_1|,|x_2| \geqslant \frac{1}{2}$ 时, 由范数 $||x||_a^*$ 的定义, 立即可得

$$||x_1+x_2||_a^* \leqslant 1 \leqslant ||x_1||_a^* + ||x_2||_a^*.$$

(2) 当 $\min\{|x_1|,|x_2|\} < \frac{1}{2}$ 时, 不妨设 $|x_1| < \frac{1}{2}$. 由定义知 $||x_1||_a^* = |x_1|$. 令 $\varphi(x) = ||x||_a^*$, 注意此时除有限个点外均有 $|\varphi'(x)| \leqslant 1$, 利用上面所给命题便得到

$$||x_1+x_2||_a^* - ||x_2||_a^* = \varphi(x_1+x_2)-\varphi(x_2) \leqslant |x_1| = ||x_1||_a^*,$$

从而证得所需结论. $\square$

使用上面所给命题, 我们还能简洁地证明下面的例子:

例 7 *① 空间

$$(b_{(1)}) \triangleq (\mathbb{R}, ||x||_b^*),$$

其中准范 $||x||_b^*$ 定义为

$$||x||_b^* = \begin{cases} |x|, & \text{当 } |x| \leqslant 1 \text{时;} \\ 2-|x|, & \text{当 } 1 \leqslant |x| \leqslant \dfrac{3}{2}\text{时;} \\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } |x| \geqslant \dfrac{3}{2}\text{时.} \end{cases}$$

(如图 1.3).

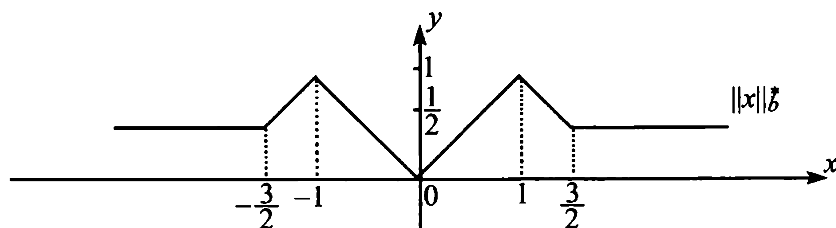


图 1.3

①此例为南开大学数学系 "基地班" 同学做出来的, 故我用英文 "brain" 的第一个字母标记之.

验证　注意此时的函数 $\varphi(x) = ||x||_b^*$ 除有限个点外, 其导数均以 1 为界, 因此利用上面命题, 完全如上例 6 的证法 2, 可导出范 (ii) 性质, 从而不难导出其为一赋准范空间. □

注 1　利用上面所给命题, 可以给出更一般的形状类似于 $||x||_b^*$ 的图形的准范空间. 例如, 当 $||x||^*$ 的图形在区间 $[-2,2]$ 中时与 $||x||_b^*$ 相同, 在其外, 仅以"常值"或"斜率为 ± 1"的直线变动, 且保证其值不小于 $\frac{1}{2}$ 的对称连续曲线, 则完全用上面相同的方法可知其亦必为准范 (图 1.4).

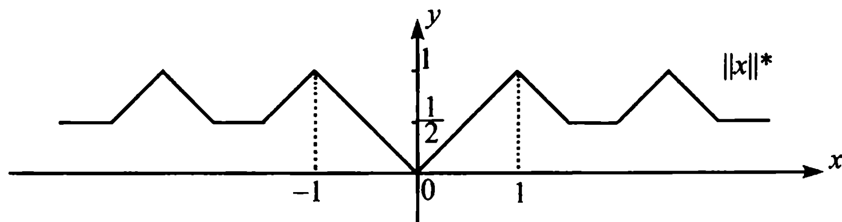


图 1.4

注 2　如 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上定义, 且 $\frac{\varphi(x)}{x}$ 为"不增"的函数 $(x \neq 0)$, 则 $\varphi(x)$ 必为"次加"函数. 由此可知, 当 $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}^+$ 上的"凹函数", 且"$\varphi(0) = 0$"时 (当 $\varphi(x)$ 连续时, 亦可将 $\varphi(0) = 0$ 换为 $\varphi(+0) = 0$), 则 $\varphi(x)$ 必为"次加"函数.

事实上, 在 $\mathbb{R}^+$ 内, 当 $\frac{\varphi(x)}{x}$ 为不增函数时, 可考虑关系式

$$\begin{aligned}\varphi(x_1 + x_2) &= \frac{\varphi(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2}(x_1 + x_2) \\ &= \frac{\varphi(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2}x_1 + \frac{\varphi(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2}x_2\end{aligned}$$

即可导出. 而当 $\varphi(x)$ 是凹函数时, 注意到关系式

$$\varphi\left[\frac{x_1}{x_1 + x_2}(x_1 + x_2) + \frac{x_2}{x_1 + x_2} \cdot \theta'\right] \geqslant \frac{x_1}{x_1 + x_2}\varphi(x_1 + x_2) + \frac{x_2}{x_1 + x_2}\varphi(\theta'),$$

因此 (当 $\varphi(0) = 0$ 时, 可取 $\theta' = 0$; 否则, 可令 $\theta' \to 0$), 不难导出 $\frac{\varphi(x)}{x}$ 是"不增"函数.

下面我们给出赋准范空间的两个特性:

性质 1　赋准范空间的单位球未必是凸集.

反例　对于实二维平面 $\mathbb{R}^2$ 上的赋 β 范空间 $(\ell_{(2)}^{\frac{2}{3}})$, 其单位原心球面即为"数学分析"中著名的"星形线", 显然, 其所围成的集合不是一凸集. 作为对比, 我们回忆在 §1.1 中, 任意赋范空间中的球必为凸集. 从图 1.5 中, 我们亦可以看到赋范空间 $(\ell_{(2)}^{\infty}), (\ell_{(2)}^{2}), (\ell_{(2)}^{1})$ 的单位原心球的图形.

性质 2　在赋准范空间中,"开球"的闭包未必为相应的"闭球".

反例 在前面的赋准范空间 $(a_{(1)})$(见例 6) 中, 原心单位开球的闭包就不是原心单位闭球. 这可由下式看出:

$$\overline{O}_1 = [-1, 1] \neq (-\infty, \infty) = B_1.$$

性质 3 在赋准范空间中, 其球面可能会含有此球的"内点". 在赋范空间中, 其任意一个球 $B(x_0, \delta_0)$ 的球面 $S(x_0, \delta_0)$ 必不含有此球的内点.

验证 事实上, 在赋范空间中, 对任意点 $y \in S(x_0, \delta_0)$, 由于 $||y - x_0|| = \delta_0$, 故知对于任意 $\varepsilon > 0$, 当令 $z = y + \varepsilon(y - x_0)$ 及 $y_0 = y - \varepsilon(y - x_0)$ 时 (如图 1.6 所示), 必有

$$||z - x_0|| = ||(1 + \varepsilon)(y - x_0)|| = (1 + \varepsilon)\delta_0 > \delta_0,$$

及

$$||y_0 - x_0|| = ||(1 - \varepsilon)(y - x_0)|| = (1 - \varepsilon)\delta_0 < \delta_0.$$

也即 $z \notin B(x_0, \delta_0)$ 及 $y_0 \notin B(x_0, \delta_0)$, 从而知 y 不是球 $B(x_0, \delta_0)$ 的内点.

然而, 对于赋准范空间却未必是这样, 我们可见下面的反例.

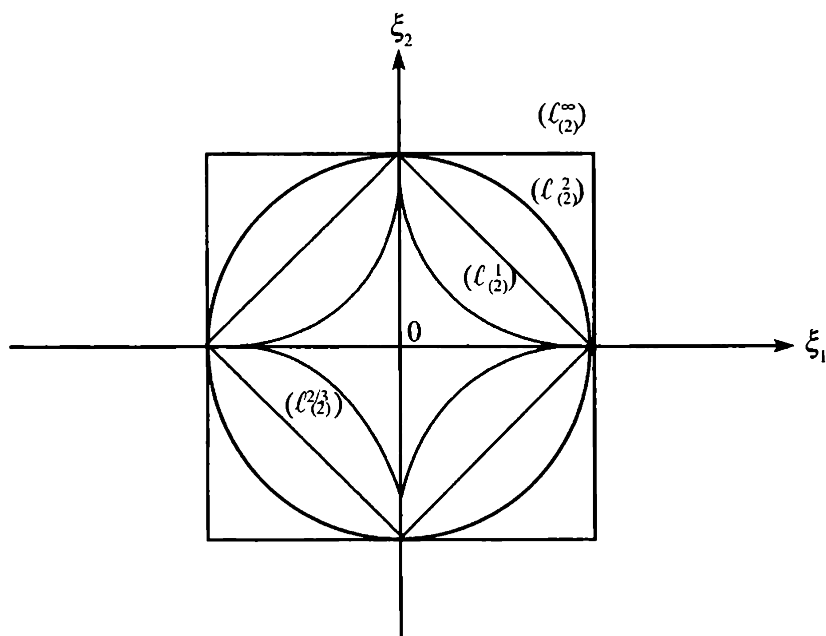


图 1.5

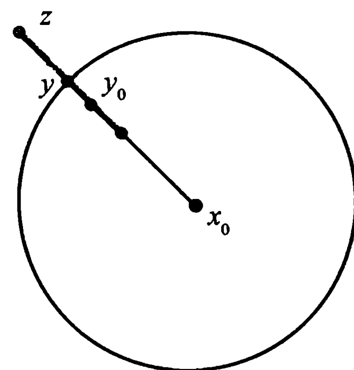


图 1.6

反例 在前面的赋准范空间 $(a_{(1)})$(见例 6) 中, 其单位原心球面 S_1 中所有 $|x| > 1$ 的点均为该球 B_1 的内点.

显然, $S_1 = (\infty, -1) \cup [1, \infty)$ 为两凸集构成.

性质 4 在赋准范空间 E 中, 有些 (原心) 球面可能是空集. 即使 (原心)r 球面 $S_r \triangleq \{x \in E\colon\ ||x|| = r\}$ 不是空集, 其球面也未必"完整"(即可能有"洞").

反例 1 在实二维空间 $(s_{(2)})$ 中, 由于

$$||x||^* = \frac{1}{2}\frac{|\xi_1|}{1 + |\xi_1|} + \frac{1}{4}\frac{|\xi_2|}{1 + |\xi_2|}, \quad \forall\, x = (\xi_1, \xi_2);$$

注意到 $\|x\|^* \to \frac{3}{4}(\xi_1 \to \infty, \xi_2 \to \infty)$, 可知半径为 $\frac{1}{2}$ 的原心球面 $S_{\frac{1}{2}}$ 非空. 但对于 ξ_2 轴上的任意元 x, 均有

$$\|\lambda x\|^* = \frac{1}{4}\frac{|\lambda\xi_2|}{1+|\lambda\xi_2|} < \frac{1}{2}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

此即球面 $S_{\frac{1}{2}}$ 有“洞”.

反例 2 在实三维空间 $(s_{(3)})$ 中, 由于

$$\|x\|^* = \frac{1}{2}\frac{|\xi_1|}{1+|\xi_1|} + \frac{1}{4}\frac{|\xi_2|}{1+|\xi_2|} + \frac{1}{8}\frac{|\xi_3|}{1+|\xi_3|},$$

对任意的 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in (s_{(3)})$, 知

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} < \sup_{x\in(s_{(3)})} \|x\|^* < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

因此, 对于任意原心球面 S_{r_0}, 只要 $\frac{3}{8} < r_0 < \frac{7}{8}$, 则 $S_{r_0} \neq \varnothing$. 而且对任意的 $x = (0, \xi_2, \xi_3) \in s_{(3)}$ 均有

$$\|\lambda x\|^* = \frac{1}{4}\frac{|\lambda\xi_2|}{1+|\lambda\xi_2|} + \frac{1}{8}\frac{|\lambda\xi_3|}{1+|\lambda\xi_3|} < \frac{3}{8} < r_0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

此即空间 $(s_{(3)})$ 的球面 S_{r_0} 在任意 $\overrightarrow{x} = (0, \xi_1, \xi_2)$ 方向均有“洞”, 从而共有无穷个“洞”.

反例 3 类似可知空间 (s) 对任意正数 $r_0 < 1$, 只要 $n_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < r_0$, 则原心球面 S_{r_0} 沿任意方向

$$\overrightarrow{x} = (0, \cdots, 0, \xi_{n_0}, \xi_{n_0+1}) \quad (\forall \xi_k \in \mathbb{R}, k \geqslant n_0)$$

均有“洞”.

为了介绍一个在二维空间中球面有无穷个洞的赋准范空间, 我们从上面反例中总结出如下命题:

命题 对于赋准范空间 E, 如果准范数具有性质

$$\sup\{\|\lambda x\|\colon \lambda \in \mathbb{R}, x \in E\} \geqslant r_0 (> 0),$$

那么, 对于元 $x_0 \in E$, 若 $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\lambda x_0\| < r_0$, 则原心球面 S_{r_0} 必在 $\pm x_0$ 两个方向上有“洞”.

反例 4 设二维实准范空间 $(b_{(2)}) = (\mathbb{R}, \|x\|^*)$, 其中准范数定义为

$$\|x\|^* = \frac{1}{2}\|\xi\|_b^* + \frac{1}{2^2}\|\eta\|_b^*, \quad \forall x = (\xi, \eta) \in (b_{(2)}),$$

这里, $||\cdot||_b^*$ 表示前面例 7 中的范数. 那么, 其原心球面 $S_{\frac{3}{4}}$ 除了四个方向: $\{x\} = \{(\xi,\eta)\colon\ |\xi| = |\eta|\}$ 外, 均有“洞”.

验证 首先, 从前面准范 $||x||_b^*$ 的定义可知: 当 $x = (1,1)$ 时, 必有 $||x||^* = \frac{3}{4}$, 故有 $S_{\frac{3}{4}} \neq \varnothing$. 此外, 再注意到准范 $||x||_b^*$ 的定义, 又有

$$||\lambda x||^* = \frac{1}{2}||\lambda\xi||_b^* + \frac{1}{2^2}||\lambda\eta||_b^* \leqslant \frac{3}{4},$$

及

$$||\lambda x||^* = \frac{3}{4} \Leftrightarrow ||\lambda\xi||_b^* = ||\lambda\eta||_b^* = 1, \quad \forall x = (\xi,\eta) \in (b_{(2)}), \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

由此, 同样由准范 $||x||_b^*$ 的定义, 便可导出 $|\lambda\xi| = |\lambda\eta| = 1$, 也即得到 $|\xi| = |\eta|$, 因此得出本例所需结果. □

§1.4 (非赋范的) 赋拟范空间的例子

我们给出下面的例子:

例 1 设 $E_{(2)}^{\triangle} = (\mathbb{R}^2, ||x||^{\triangle})$, 其中, 拟范数定义为

$$||x||^{\triangle} = |\xi|, \quad \forall x = (\xi,\eta) \in E_{(2)}^{\triangle}.$$

注意, 此时对于 η 轴上每一个元 $x_0 = (0,\eta)$ 均有

$$||x_0||^{\triangle} = 0.$$

(如图 1.7).

例 2 空间 $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||^{\triangle})$, 其中, 拟范数定义为

$$||x||^{\triangle} = |\xi - \eta|, \quad \forall x = (\xi,\eta) \in E.$$

注 此时由于任意与 $||x||^{\triangle} = 0$ 平行的直线, 其上的点之拟范数均是相同的. 故对于空间内任意一点 x, 其拟范数 $||x||^{\triangle}$ 即为过此点作平行于 $||x||^{\triangle} = 0$(η 轴) 的直线与 ξ 轴相交点的绝对值 (如图 1.8).

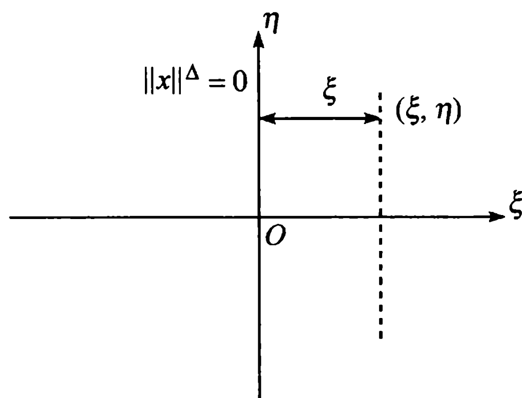


图 1.7

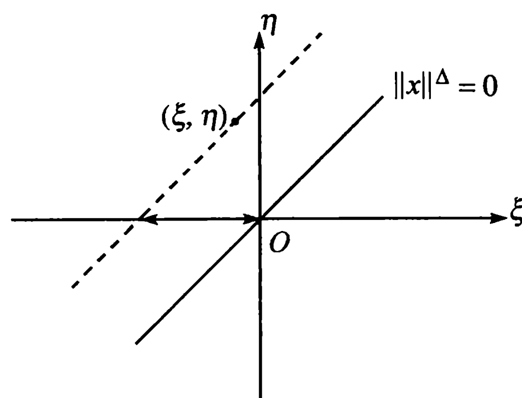


图 1.8

例 3　一般地, 可设

$$E = (\mathbb{R}^2, ||x||^{\triangle}),$$

其中拟范数定义为

$$||x||^{\triangle} = |\alpha\xi + \beta\eta| \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0), \quad \forall\, x = (\xi, \eta) \in E.$$

注*　此时空间内任意一点 x, 其拟范数 $||x||^{\triangle}$ 即为此点到直线 $||x||^{\triangle} = 0$ 的距离与 $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 的乘积 (如图 1.9).

例 4 *　更一般地, 如在 $\mathbb{R}^2$ 平面中, 任取两条过 θ 原点的直线 l_1 和 l_2, 并将拟范数用以下方式定义:

过 x 点作直线 l_1 的平行线, 当其与直线 l_2 交于点 x' 时, 则可定义

$$||x||^{\triangle} = d_0(x, x')$$

(这里, $d_0(x, x')$ 表示 x 与 x' 两点的 "欧式距离") (如图 1.10).

注意, 这里的范 (ii) 的验证较为难些.

注　对于非赋范的赋拟范空间 E 而言, 其必存在元 $x_\theta \neq \theta$, 使得 $||x_\theta||^{\triangle} = 0$, 则对于任意原心球面 S_r, 由于 $||\lambda x_\theta||^{\triangle} = |\lambda| \cdot ||x_\theta|| = 0\ (\forall\, \lambda \in \mathbb{R})$, 故知在 $\pm x_\theta$ 方向, 球面 S_r 均有 "洞".

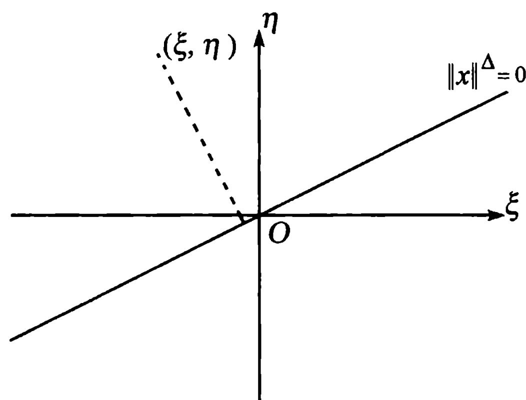


图 1.9

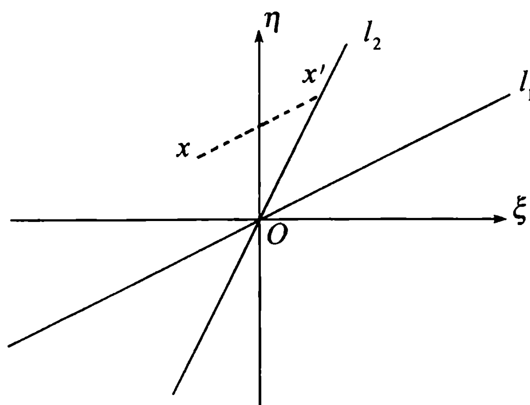


图 1.10

§1.5　赋范线性空间为有限维的特征

为了得到用单位球面的 "紧性" ("自列紧性") 作为赋范空间是有限维的特征的判别定理, 我们首先必须介绍两个引理.

引理 1　设赋范空间 $E_{(n)}$ 是 n 维的 (n 为任意自然数), 则 $E_{(n)}$ 中任意元列 $\{x_m, x_0\}$ 有如下性质:

$$x_m \xrightarrow{||\cdot||} x_0 \Longleftrightarrow x_m(k) \to x_0(k) \quad (m \to \infty), \ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

即：其内任意“元列”收敛等价于其“各坐标”收敛.

证明 设

$$x_m = \sum_{k=1}^{n} x_m(k)e_k, \quad x_0 = \sum_{k=1}^{n} x_0(k)e_k,$$

其中 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 为空间 $E_{(n)}$ 的一组基.

“$\Longleftarrow$”. 我们只要注意到不等式

$$\begin{aligned}\|x_m - x_0\| &= \Big\| \sum_{k=1}^{n} x_m(k)e_k - \sum_{k=1}^{n} x_0(k)e_k \Big\| \\ &= \Big\| \sum_{k=1}^{n} (x_m(k) - x_0(k))e_k \Big\| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_m(k) - x_0(k)| \, \|e_k\|,\end{aligned}$$

则由条件

$$x_m(k) \to x_0(k), \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

不难导出 $x_m \to x_0 (m \to \infty)$.

“$\Longrightarrow$”. 对任意的 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, 令

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = \|\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n\|.$$

由于范数是元的连续函数, 故知 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元连续函数, 从而其必在欧氏空间 $\mathbb{K}^n$ 的有界闭集

$$B \triangleq \left\{ (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n \colon \quad \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| = 1 \right\}$$

上达到其最小值 δ_0. 而且, 由范数的性质 (i) 可知, 如果 $(\xi_1^\circ, \xi_2^\circ, \cdots, \xi_n^\circ) \in B$, 使得

$$\varphi(\xi_1^\circ, \xi_2^\circ, \cdots, \xi_n^\circ) = \Big\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k^\circ e_k \Big\| = \delta_0$$

时, 由于 $\sum_{k=1}^{n} |\xi_k| = 1$ 和 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 线性无关, 故知 $\delta_0 > 0$ (注意：如果 $\|\cdot\|$ 为“拟范”数, 则推不出此结论). 由此得到

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|} e_k \Big\| \geqslant \delta_0 > 0 \quad \Big(\forall\, \xi_k \in \mathbb{K},\ 1 \leqslant k \leqslant n; \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \neq 0 \Big). \tag{1.5.1}$$

而由范数性质 (iii), 则可导出关系式

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\| \geqslant \delta_0\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|, \quad \forall\xi_k\in\mathbb{K}(1\leqslant k\leqslant n).$$

注意：即使当 $\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|=0$ 时, 由于 $\xi_k=0(1\leqslant k\leqslant n)$, 故上式亦成立. 这样一来, 我们就可利用此式, 由条件 $x_m\to x_0$ 立即导出

$$x_m(k)\to x_0(k)(m\to\infty), \quad 1\leqslant k\leqslant n. \qquad \square$$

注 1 若 $E_{(n)}$ 为 "拟范" 空间, 由上面的证明可知, 我们仅可得到: "各坐标" 收敛 $\Longrightarrow$ 元收敛.

注 2 若 $E_{(n)}$ 为 "准范" 空间, 引理结论亦成立 (从而对 β 范空间 $E_{(n)}$ 引理亦是成立的).

事实上, "$\Longleftarrow$" 与原证明类似.

至于 "$\Longrightarrow$", 首先, 类似于原证明, 同样得到

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|}e_k\right\|^* \geqslant \delta_0>0 \quad \left(\forall\xi_k\in\mathbb{K},\ 1\leqslant k\leqslant n;\ \sum_{k=1}^{n}|\xi_k|\neq 0\right).$$

设 $x_m=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{(m)}e_k\to\theta(m\to\infty)$, 则

(1) $\{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(m)}|\}$ 是有界数集. 事实上, 若不然, 不妨假设

$$\rho_m=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(m)}|\to\infty\ (m\to\infty),$$

则注意 $x_m\to\theta$, 由准范对数乘的连续性, 有

$$0<\delta_0\leqslant\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k^{(m)}}{\rho_m}e_k\right\|^*=\left\|\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{(m)}e_k}{\rho_m}\right\|^*=\left\|\frac{x_m}{e_m}\right\|^*\to 0\ (m\to\infty),$$

从而矛盾, 故 $\{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(m)}|\}$ 是有界的.

(2) $\{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(m)}|\}$ 无非零聚点.

反之, 若其有非零聚点, 不妨设元列 $\{x_m\}$($x_m=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{(m)}e_k$) 满足 $\rho_m\triangleq\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(m)}|\to\rho_0\neq 0$, 则由 $\|\cdot\|^*$ 对数乘的连续性可知

$$\left\|\frac{x_m}{\rho_m}-\frac{x_m}{\rho_0}\right\|^*=\left\|\left(\frac{1}{\rho_m}-\frac{1}{\rho_0}\right)x_m\right\|^*\to\|\theta\|^*=0,$$

$$\left\|\frac{x_m}{\rho_0}\right\|^*\to\|\theta\|^*=0,$$

从而同样可以得到

$$\delta_0 \leqslant \left\|\frac{x_m}{\rho_m}\right\|^* = \left\|\frac{x_m}{\rho_m} - \frac{x_m}{\rho_0} + \frac{x_m}{\rho_0}\right\|^*$$
$$\leqslant \left\|\frac{x_m}{\rho_m} - \frac{x_m}{\rho_0}\right\|^* + \left\|\frac{x_m}{\rho_0}\right\|^* \to 0\ (m\to\infty).$$

矛盾. 故 (2) 成立.

综合上面 (1) 和 (2) 我们就导出

$$\|x_m\|^* \to 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(m)}| \to 0$$
$$\Rightarrow x_m(k) = \xi_k^{(m)} \to 0\ \ (1 \leqslant k \leqslant n).$$

□

注 3 上面引理 1 对于无穷维的赋范空间显然未必正确.

反例 在 (ℓ^1) 空间中, 取元列

$$x_m = \left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{m}, 0, 0, \cdots\right), \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

则其各坐标均有关系式

$$x_m(k) \to \frac{1}{k}(m\to\infty), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

但当令 $x_0 = \{\frac{1}{k}\}$ 时, 由于 $x_0 \notin (\ell^1)$, 故知 $x_m \nrightarrow x_0(m\to\infty)$. □

注 4 注意“元列收敛”等价于“各坐标收敛”不是“赋准范”空间为有限维的特征. 可见以下反例.

反例 赋准范空间 (s) 中元列收敛与其相应各坐标收敛等价, 但其显然是无穷维的空间.

推理 1 对于任意 n 维线性空间 $E_{(n)}$ 而言, 其上定义的任意“范数”或“准范数”的收敛性是相同的.

证明 对于 $E_{(n)}$ 中任意一元列 $\{x_m\}$ 和元 x_0, 如在其某基底下有

$$x_m = \{x_m(k)\}_{k=1}^n, \quad x_0 = \{x_0(k)\}_{k=1}^n,$$

则由引理 1 (及注 2) 的必要性和充分性, 我们立即可得, 空间中定义的任意两个 (准) 范数 $\|\cdot\|_1^*$ 和 $\|\cdot\|_2^*$, 必有关系式

$$x_m \xrightarrow{\|\cdot\|_1^*} x_0 \Leftrightarrow x_m(k) \to x_0(k)\ (1 \leqslant k \leqslant n) \Leftrightarrow x_m \xrightarrow{\|\cdot\|_2^*} x_0\ (m\to\infty).$$

由此立即得到所需结论. □

注 5 当 n 维线性空间中定义了两个范数 (不是准范数!), 由上面的推理 1 及以后要讲的线性泛函的连续性及有界性的关系, 我们容易知道, 此时对于两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$, 必存在两个正数 ρ_1 和 ρ_2, 使得下面关系式成立:

$$\rho_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \rho_2\|x\|_1, \quad \forall x \in E_{(n)}.$$

特别地, 从上式可导出一些有趣的不等式, 例如应用于空间 (ℓ^{p_1}) 和 $(\ell^{p_2})(p_1, p_2 \geqslant 1)$, 则存在正数 ρ_1 和 ρ_2, 使得对任意的 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\} \subset \mathbb{K}$,

$$\rho_1\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^{p_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant \rho_2\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}}.$$

注 6 以上推理对于无穷维 (即使是赋范空间) 显然是未必成立的.

推理 2 设 $E_{(n)}$ 和 $F_{(n)}$ 为两个 n 维赋 (准) 范空间, 则必存在一个 "线性" 的 "1− 1" 的 "满" 映射 T, 使得对任意 $\{x_m\} \subset E_{(n)}$, 必有

$$\|x_m\|_1 \to 0 \Longleftrightarrow \|T(x_m)\|_2 \to 0,$$

其中 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 分别为 $E_{(n)}$ 和 $F_{(n)}$ 的 (准) 范数.

证明 对任意的元 $x \in E_{(n)}$, 若 $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, 则令

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k d_k,$$

其中 $\{e_k\}_1^n$ 和 $\{d_k\}_1^n$ 分别为 $E_{(n)}$ 和 $F_{(n)}$ 的一组基. 由引理 1 直接可得到结论. □

推理 2′ 任意 "维数相同的" 有限维赋 (准) 范空间 $E_{(n)}$ 和 $F_{(n)}$ 必线性同胚 (即存在一个从 $E_{(n)}$ 到 $F_{(n)}$ 的 "线性"、"1−1"、"到上"、"双方连续" 的映射).

推理 3 对于任意的赋 (准) 范空间, 其内任意有限维子空间必是 "闭" 的.

证明 我们给出两个证明方法.

方法 1 设 E 为赋 "准" 范空间, $E_{(n)}$ 为 E 的 n 维线性子空间. 设 $\{e_k\}_{k=1}^n$ 为 $E_{(n)}$ 的一组基, 任取 $x \in \overline{E_{(n)}}$, 则必有元列 $\{x_m\} \subset E_{(n)}$, 使得 $x_m \to x(m \to \infty)$ (其中, $x_m = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m)} e_k$). 由

$$\|x_p - x_q\| \leqslant \|x_p - x\| + \|x_q - x\| \to 0(p, q \to \infty),$$

得 $x_p - x_q \to \theta(p, q \to \infty)$. 由引理 1 及其注 2 可知

$$|\xi_k^{(p)} - \xi_k^{(q)}| \to 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

从而 $\{\xi_k^{(m)}\}_m$ 是 Cauchy 数列 $(1 \leqslant k \leqslant n)$. 设

$$\xi_k^{(m)} \to \xi_k^{(0)} \quad (m \to \infty), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

再令 $x_0 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(0)} e_k \in E_{(n)}$, 由引理 1 及其注 2 可知 $x_m \to x_0$. 再由 x_m 极限的唯一性, 可知 $x = x_0 \in E_{(n)}$, 从而 $\overline{E_{(n)}} \subset E_{(n)}$, 即 $E_{(n)}$ 是 E 的闭线性子空间. □

方法 2 反之, 设 $x_m \to x_0$ 而 $x_0 \notin E_{(n)}$, 故 x_0 与 $E_{(n)}$ 的基底 $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ 线性无关, 则存在 $n+1$ 维线性子空间 E_1, 其基为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, x_0\}$, 且 $E_{(n)} \subset E_1$. 现在将 $\{x_m\}$ 和 x_0 视为 E_1 中的元, 由设 $x_m \to x_0$, 注意到 x_m 关于 E_1 上面的基之最后一个分量均为 0, 应用引理 1 及其注 2(元收敛 $\Longleftrightarrow$ 各坐标收敛) 于 E_1 时, 便得到 x_0 的坐标的最后一个分量亦为 0, 矛盾! 由此得到 $x_0 \in E_{(n)}$, 也即 $E_{(n)}$ 是闭子集. □

注 7 对赋拟范空间而言, 上述推理未必正确 (见本书 §1.6). 这是因为在拟范空间中元列按范收敛一般推不出元的各坐标均收敛.

推理 4 设 $E_{(n)}$ 为 n 维赋 (准) 范空间, 则其上定义的任意线性泛函 $f(x)$ 均是连续的.

证明 设 $\{x_m, x_0\} \subset E_{(n)}$,

$$x_m = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m)} e_k, \quad x_0 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(0)} e_k,$$

其中 $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ 为 $E_{(n)}$ 的一组基. 设 $x_m \to x_0$, 由引理 1 及其注 2 有

$$\xi_k^{(m)} \to \xi_k^{(0)} \quad (m \to \infty), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

由 f 是 $E_{(n)}$ 上的线性泛函, 有

$$\begin{aligned} f(x_m) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m)} e_k\Big) &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m)} f(e_k) \to \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(0)} f(e_k) \\ &= f\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(0)} e_k\Big) = f(x_0)\ (m \to \infty). \end{aligned}$$

此即 f 连续. □

注 8 同样地, 此推理对赋拟范空间未必正确 (见后 §1.6).

注 9* 推理 4 中 f 的条件可减弱为"次加"、"β^* 正齐性 $(0 < \beta^* \leqslant 1)$"泛函 (可参看文献 [2] 第 0 讲).

引理 2 (Riesz 引理) 设 E 为赋 (拟) 范空间, E_0 为 E 的真、闭线性子空间, 则对于任意的 $0 < \varepsilon < 1$, 存在 $x \in S_1(E)$, 使得

$$d(x, E_0) \triangleq \inf_{y \in E_0} \|x - y\| \geqslant \varepsilon.$$

证明 由于 E_0 为 E 的真子空间, 故可取一元 $x_1 \in E \setminus E_0$. 由 E_0 是闭集, 故知 $d(x_1, E_0) > 0$. 任取 $\varepsilon \in (0,1)$, 由 $d(x_1, E_0)$ 的定义, 对正数 $\varepsilon_1 = \frac{d(x_1,E_0)}{\varepsilon}$, 必存在一元 $y_1 \in E_0$, 使得 $d(x_1, E_0) \leqslant ||x_1 - y_1|| < \varepsilon_1$. 令

$$x = \frac{x_1 - y_1}{||x_1 - y_1||}$$

(x 的取法如图 1.11 所示). 显然, $x \in S_1$ 且对于任意 $y \in E_0$ 有

$$\begin{aligned} ||x - y|| &= \left\| \frac{x_1 - y_1}{||x_1 - y_1||} - y \right\| \\ &= \frac{1}{||x_1 - y_1||} ||x_1 - [y_1 + (||x_1 - y_1||)y]|| \\ &\geqslant \frac{d(x_1, E_0)}{||x_1 - y_1||} > \frac{d(x_1, E_0)}{\varepsilon_1} = \varepsilon. \end{aligned}$$

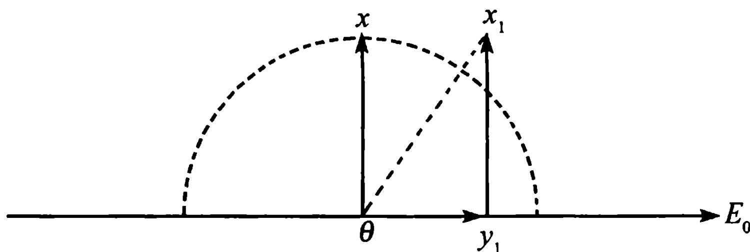


图 1.11

故

$$d(x, E_0) \triangleq \inf_{y \in E_0} ||x - y|| \geqslant \varepsilon. \qquad \square$$

注 1* 当 $\varepsilon = 1$ 时, 上述结论未必成立.

(从上面证明可以看出, 要想使得 $\varepsilon = 1$ 时引理结论成立, 必须能找到元 $y_1 \in E_0$, 使得 $||x_1 - y_1|| = d(x_1, E_0)$, 这一般未必可能. 但当 $\dim E_0 < \infty$ 时, 或当 E 为 Hilbert 空间时是可以的).

反例 * 设 $E = \{x(t) \in C[0,1]: x(0) = 0\}$,

$$E_0 = \left\{ x(t) \in E : \int_0^1 x(t)dt = 0 \right\},$$

则 E_0 是 E 的闭真子空间, 且在空间 E 的单位球面上找不到点 x_1, 使得

$$d(x_1, E_0) = 1.$$

验证 E_0 是 E 的真子空间是显然的. 现在若 $\overline{x} \in E$ 且 $\overline{x} \in \overline{E_0}$, 则存在 $\{x_n\} \in E_0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - \overline{x}|| = \lim_{n\to\infty} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_n(t) - \overline{x}(t)| = 0.$$

由数学分析的知识可知 $\overline{x}(0)=0$, 且

$$\int_0^1 \overline{x}(t)dt=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} x_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)dt=0.$$

故 $\overline{x}\in E_0$, 从而 E_0 为 E 的闭子空间.

反之, 如果 E 的单位球面上存在一元 x_1, 使得

$$d(x_1,E_0)=\inf_{y\in E_0}||x_1-y||=1,$$

则对任意元 $x\in E\setminus E_0$, 由于 $\int_0^1 x(t)dt\neq 0$, 可令

$$\alpha_1=\frac{\int_0^1 x_1(t)dt}{\int_0^1 x(t)dt},$$

并取 $y_1=x_1-\alpha_1 x$, 则有 $y_1\in E_0$, 从而由归谬假设可得 $||x_1-y_1||\geqslant 1$, 即 $|\alpha_1|\cdot||x||=||\alpha_1 x||\geqslant 1$. 由此导出

$$\left|\int_0^1 x_1(t)dt\right|\cdot||x||\geqslant\left|\int_0^1 x(t)dt\right|;\quad \forall x\in E\setminus E_0.$$

今取 $x_n=t^{\frac{1}{n}}(0\leqslant t\leqslant 1)$, 则有 $x_n\in E\setminus E_0(\forall n\in\mathbb{N})$. 当以 x_n 替换以上不等式中的 x 时, 易知 $|\int_0^1 x_1(t)dt|\geqslant 1$. 由数学分析知识知, 这显然与 $x_1\in S_1(E)$, 也即: $x_1\in C[0,1], x_1(0)=0$ 且 $||x_1||=\max\{|x_1(t)|:\ 0\leqslant t\leqslant 1\}=1$ 矛盾. □

注 2 本引理对于赋 β 拟范 $(0<\beta<1)$ 空间也是成立的. 事实上, 此时只要在上引理的证明中将相应的元 x 取为 $\frac{x_1-y_1}{||x_1-y_1||^{1/\beta}}$, 则可类似导出结论.

有了上面两个引理, 下面我们就可以引出本节的主要定理:

定理 1 (赋范空间的"有限维"特征) 设 E 为赋范空间, 则

$$\dim E<\infty\Longleftrightarrow S_1(E)\text{为"自列紧"集 (紧集)},$$

(其中 $S_1(E)$ 表示 E 的单位球面).

证明 "$\Leftarrow$": 若 $S_1(E)$ 是紧集, 反设 $\dim E=\infty$. 任取 $x_1\in S_1(E)$. 令 $E_1=\operatorname{span}\{x_1\}(\triangleq\{\alpha x_1:\ \alpha\in\mathbb{K}\})$. 由引理 1 后面的推理 3 知 E_1 是闭集. 因为 $\dim E=\infty$, E_1 为真子空间. 取 $\varepsilon_0\in(0,1)$. 由引理 2 得: 存在 $x_2\in S_1(E)$ 有 $d(x_2,E_1)\geqslant\varepsilon_0>0$, 故 $d(x_2,x_1)\geqslant\varepsilon_0$. 再令 $E_2=\operatorname{span}\{x_1,x_2\}$, 同样 E_2 是真闭子空间. 又从引理 2 可得: 存在 $x_3\in S_1(E)$, 使得 $d(x_3,E_2)\geqslant\varepsilon_0$, 故 $d(x_3,x_i)\geqslant\varepsilon_0(i=1,2)$. 如此做下去, 便可归纳地得到点列 $\{x_n\}\subset S_1(E)$, 满足

$$d(x_m,x_n)\geqslant\varepsilon_0>0\qquad(\forall n,m\in\mathbb{N},n\neq m).$$

显然 $\{x_n\}$ 不含任意收敛子列, 故 $S_1(E)$ 不是列紧集, 与假设矛盾, 从而 $\dim E < \infty$.

"⇒"：设 $\dim E < \infty$, 不妨设 $\dim E = n$. 对任意的元列 $\{x_m\} \subset S_1(E)$, 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 E 的一组基, 则 x_m 可表示为

$$x_m = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m)} e_k \quad (\xi_k^{(m)} \in \mathbb{K},\ \ \forall m \in \mathbb{N}).$$

从不等式 (1.5.1) 我们得到：存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$\|x_m\| = \Big\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m)} e_k \Big\| \geqslant \delta_0 \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(m)}| \quad (\forall m \in \mathbb{N}), \tag{1.5.2}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(m)}| \leqslant \frac{\|x_m\|}{\delta_0} = \frac{1}{\delta_0} \quad (\forall m \in \mathbb{N}).$$

故由 Bolzano-Weierstrass 定理 (有界数列必有收敛子列), 从 $\{\xi_1^{(m)}\}$ 中可以找到收敛子列 $\{\xi_1^{(m_k^{(1)})}\}_k$, 从 $\{\xi_2^{(m_k^{(1)})}\}_k$ 中同样选出收敛子列 $\{\xi_2^{(m_k^{(2)})}\}_k$, 最后从 $\{\xi_n^{(m_k^{(n-1)})}\}_k$ 中可以选出收敛子列 $\{\xi_n^{(m_k^{(n)})}\}_k$. 根据上面选法可知存在 n 个数 $\xi_1^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)}$, 使得

$$\xi_j^{(m_k^{(n)})} \to \xi_j^{(0)} \ (k \to \infty), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

令 $x_0 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(0)} e_k$, 由引理 1 (此时点列各坐标收敛 ⇒ 按范收敛), 可知 $x_{m_k^{(n)}} \to x_0$ $(k \to \infty)$. 而由范数连续性有 $\|x_0\| = 1$, 即 $x_0 \in S_1(E)$. 此即 $S_1(E)$ 中任意点列有收敛于其自身的子列, 故 $S_1(E)$ 为"自列紧"集 (在度量空间中此等价于"紧"集). □

注 1　本定理对"赋 β 范"空间仍是成立的.

只要注意在"⇐"中将"引理 2"变为"引理 2 的注 2". 在"⇒"中将式 (1.5.2) 变为

$$\|x_m\| = \Big\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m)} e_k \Big\| \geqslant \delta_0 \Big(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(m)}| \Big)^{\beta} \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

即可.

注 2　上述证明对赋"拟范"空间均失效.

"⇐"的证明中用到有限维子空间是闭的结论, 而此结论对赋拟范空间是不存在的, 故此证明对赋拟范空间来说是失效的. 此结论也是不对的 (详见下节). 另外, 由于"⇒"的证明中用到了式 (1.5.2) (此中必有 $\delta_0 > 0$), 而此对拟范空间也是失效的, 但相应结论却是对的 (亦见下节).

注 3*　由于"⇐ "的证明中用到了引理 2 (Riesz 引理), 故此证明对于"赋准范"空间而言, 是失效的. 由于"⇒ "的证明中用到了范数的"绝对齐性"或"β 绝

对齐性", 故此证明对于一般赋准范空间而言也是失效的. 就结论而言, 一般是不成立的, 即: 有限维赋准范空间的单位球面一般未必是紧的 (反例见 §1.3 中例 6); 而当一个赋准范空间单位球面是紧集时, 一般也未必可以导出其是有限维的.

注 4 至于原结论对"准范"空间是否正确, 从下面 §1.7 可见, 原定理对"准范"空间而言亦均不成立.

由定理 1 及其注 1 可得下面的推理:

推理 设 E 为赋 β^* 范空间 $(0<\beta^*\leqslant 1)$, 则

(1) $\dim E<\infty \Rightarrow B_{r_0}(\theta)$ 必是自列紧 (紧) 集, 从而任意有界 (闭) 集, 必是 (自) 列紧集.

(2) $S_r(E)$ 为"列紧"集$\Rightarrow$ $\dim E<\infty$.

证明 仅注意到 (1). 事实上, 对于任意元列 $\{x_n\}\subset B_{r_0}(\theta)$, 由上面注 1 中的不等式 (1.5.2) 有

$$\delta_0\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_n^{(m)}|\Big)^{\beta^*}\leqslant\Big\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{(m)}e_k\Big\|=\|x_m\|\leqslant r_0\quad(\forall m\in\mathbb{N}).$$

因此同样由数域中的 Bolzano-Weierstrass 定理和引理 1 及其注 2 导出本结论. □

注 5** 对于赋准范空间 E 有如下结论:

(1) $\dim E<\infty\Rightarrow$ 存在 $B_{r_0}(\theta)$ 是紧集.

(2) $S_r(E)$ 为"列紧"集且存在 $x_1\in E$, 使得 $\|x_1\|>r\Rightarrow$ $\dim E<\infty$ (参见文献 [31]).

§1.6 赋拟范空间的一些特征

性质 1 在赋拟范空间中, 极限的唯一性不能保证, 从而, 即使在有限维空间时, 元的按范收敛也不能保证其为每个坐标均收敛.

反例 在 $E_{(2)}^{\triangle}=(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|^{\triangle})$ 中, 由于 $\|x\|^{\triangle}=|\xi|$ $(\forall x=(\xi,\eta)\in E_{(2)}^{\triangle})$, 当令

$$x_n=\Big(\frac{1}{n},0\Big)\ \ (\forall n\in\mathbb{N}),\quad x=(0,\eta)\ \ (\forall \eta\in\mathbb{K})$$

时, 则有

$$\|x_n-x\|^{\triangle}=\Big\|\Big(\frac{1}{n},\eta\Big)\Big\|^{\triangle}=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty).$$

即 $x_n\to x$, 故 $\{x_n\}$ 极限不唯一. 而且当 $x=(0,\eta)$ 而 $\eta\neq 0$ 时, x_n 的第二个坐标也不收敛于 x 的第二个坐标.

性质 2 在赋拟范空间中, 其内的有限维子空间未必是闭的 (与上节引理 1 的推理 3 相对比).

反例 取上面的"拟范"空间 $E_{(2)}^{\triangle}$ 及其一维线性子空间 $E_{(1)} = \{x = (\xi, 0):\ \xi \in \mathbb{R}\}$, 则对任意的元 $x = (\xi, \eta) \in E_{(2)}^{\triangle}$, 当取 $y = (\xi, 0) \in E_{(1)}$ 时, 对于任意数 $\delta > 0$ 均有

$$||x - y||^{\triangle} = ||(\xi, \eta) - (\xi, 0)||^{\triangle} = ||(0, \eta)||^{\triangle} = 0,$$

故知 $x \in B(y, \delta)(\forall\, \delta > 0)$, 即 $x \in \overline{E_1}$, 从而导出 $E_{(2)}^{\triangle} = \overline{E_{(1)}}$. 由此立即得知 $\overline{E_{(1)}} \neq E_{(1)}$, 也即 $E_{(1)}$ 不是闭集.

性质 3 在赋拟范空间中, 其"有限维"线性子空间上定义的线性泛函未必连续 (与上节引理 1 的推理 4 相对比).

反例 仍取上面的拟范空间 $E_{(2)}^{\triangle}$.

对任意 $x = (\xi, \eta) \in E_{(2)}^{\triangle}$, 令 $f_0(x) = \eta$, 则当取 $x_n = (0, n)\quad (\forall n \in \mathbb{N})$ 时, 由于 $||x_n||^{\triangle} = 0\quad (\forall n \in \mathbb{N})$, 故 $x_n \to \theta = (0, 0)$. 然而

$$f_0(x_n) = f_0[(0, n)] = n \nrightarrow 0 = f_0[(0, 0)] = f_0(\theta), (n \to \infty),$$

此即 f_0 不连续.

性质 4 在赋"拟范"空间中, 如果 S_1 "紧", 未必有 $\dim(E) < \infty$.

反例 在无穷维拟范线性空间 $E \triangleq (\mathbb{R}^{\infty}, ||\cdot||^{\triangle})$中, 如果拟范 $||\cdot||^{\triangle}$ 定义为

$$||x||^{\triangle} = ||\{\xi_k\}||^{\triangle} = |\xi_1| \quad (\forall x = \{\xi_k\} \in E),$$

则其单位球面为 $S_1(E) = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots):\ \xi_1 = \pm 1, \xi_k \in \mathbb{R}, k \geqslant 2\}$. 下面我们来验证 $S_1(E)$ 的紧性.

证法 1 证明 $S_1(E)$ 是"自列紧集". 对于任意的元列 $\{x_n\} \subset S_1(E)$, 由单位球面的性质可知: $\{x_n\}$ 中第一个坐标为 $+1$ 或 -1 者至少有一个为无穷集. 不妨假设前者成立, 则存在子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, 使得 x_{n_k} 的第一个坐标 $\xi_1^{(n_k)} = 1 (k = 1, 2, \cdots)$.

令 $x_0 = (1, 1, \cdots)$, 则 $||x_{n_k} - x_0||^{\triangle} = 1 - 1 = 0 \to 0$. 此说明 $\{x_n\}$ 有收敛子列, 从而 $S_1(E)$ 是"自列紧".

证法 2 证明 $S_1(E)$ 是"紧集".

事实上, 若 $\{G_\alpha\}$ 是 $S_1(E)$ 的开覆盖, 由于 $x_1 = \{1, 0, \cdots\}, x_2 = \{-1, 0, \cdots\} \in S_1(E)$, 故存在 $G_1, G_2 \in \{G_\alpha\}$, 使得 $x_1 \in G_1, x_2 \in G_2$. 对任意 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots\} \in S_1(E)$, 则 $|\xi_1| = ||x|| = 1$. 不妨设 $\xi_1 = 1$. 由 $x_1 \in G_1$, 且 G_1 为开集知存在 $\delta > 0$, 使得开球 $O(x_1, \delta) \triangleq \{y:\ ||y - x_1|| < \delta, x \in E\}$ 有性质: $O(x_1, \delta) \subset G_1$. 注意到

$$||x - x_1|| = |\xi_1 - 1| = |1 - 1| = 0 < \delta,$$

故知 $x \in O(x_1, \delta) \subset G_1 \subset G_1 \bigcup G_2$. 以上说明 $S_1(E) \in G_1 \bigcup G_2$, 故 $S_1(E)$ 为紧集. □

注 E 也可取为 $(\mathbb{C}, ||\cdot||^{\triangle})(||\cdot||^{\triangle}$ 定义不变), 则结论不变.

性质 5* 在赋“拟范”空间 $E^{\triangle}$ 中, 若 $\dim(E^{\triangle})<\infty$, 则其单位球面 S_1 必为自列紧的.

证法 1 设 $E_0=\{x\colon \|x\|^{\triangle}=0\}$, 由拟范的定义可知 E_0 为 $E^{\triangle}$ 的线性子空间. 因为 $E^{\triangle}$ 是有限维的, 由线性代数知识可知 $E^{\triangle}$ 可分解为 E_0 与另一个线性子空间 E_1 的直和: $E^{\triangle}=E_0\dot{+}E_1$.

注意到拟范的定义, 对于任意元 $x\in E^{\triangle}$, 当设 $x=x_0+x_1(x_0\in E_0,x_1\in E_1)$ 时, 则有

$$\|x_1\|^{\triangle}=\|x_1\|^{\triangle}+\|x_0\|^{\triangle}\geqslant\|x\|^{\triangle}\geqslant\|x_1\|^{\triangle}-\|x_0\|^{\triangle}=\|x_1\|^{\triangle}.$$

且当注意到 E_1 为 E_0 的代数补子空间时, 故知对任意的元 $x_1\in E_1(x_1\neq\theta)$, 必有 $\|x_1\|^{\triangle}\neq 0$. 这样, 原拟范数“限制”在 E_1 上时, 便成为“范数”.

由于对任意的元列 $\{x_n\}\subset S_1(E^{\triangle})$, 从上面讨论可知 x_n 可分解为 $x_n=x_0^{(n)}+x_1^{(n)}$, 其中 $x_0^{(n)}\in E_0,x_1^{(n)}\in S_1(E_1)$. 在有限维赋范空间 E_1 中使用上节定理 1, 则知存在子列 $\{x_1^{(n_k)}\}\subset\{x_1^{(n)}\}$ 与点 $x_1^{(0)}\in S_1(E_1)$, 使得 $x_1^{(n_k)}\to x_1^{(0)}$. 而当注意到上式, 由

$$\|x_{n_k}-x_1^{(0)}\|^{\triangle}=\|x_1^{(n_k)}-x_1^{(0)}\|^{\triangle}\to 0$$

及 $x_1^{(0)}\in S_1(E^{\triangle})$ 时, 便知 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 在 $S_1(E^{\triangle})$ 的收敛子列, 故 $S_1=S_1(E^{\triangle})$ 是自列紧的.

证法 2 令 $E_0=\{x\in E^{\triangle}\colon \|x\|^{\triangle}=0\}$. 作商空间 $\widehat{E}=E^{\triangle}/E_0$. 由后面 §1.12, 我们将知道 E_0 必为闭线性子空间, 从而商空间 $\widehat{E}=E^{\triangle}/E_0$ 必构成一“赋范”线性空间 (此亦为将“赋拟范”空间转变为“赋范”空间的方法). 并且由 E_0 的取法, 此时还有

$$\|\widehat{x}\|=\|x\|^{\triangle}\quad(\forall x\in\widehat{x}\in\widehat{E}).\tag{1.6.1}$$

这样一来, 由于商空间 $\widehat{E}$ 是有限维的赋范空间, 由上节定理 1 可知其单位球面 $S_1(\widehat{E})$ 必为自列紧集.

现在任取点列 $\{x_n\}\subset S_1(E^{\triangle})$, 则由式 (1.6.1) 可知, 其对应的商元列 $\{\widehat{x}_n\}\subset S_1(\widehat{E})$. 故由 $S_1(\widehat{E})$ 的自列紧性, 存在子列 $\{\widehat{x}_{n_k}\}\subset\{\widehat{x}_n\}$ 及点 $\widehat{x}_0\in S_1(\widehat{E})$, 使得

$$\widehat{x}_{n_k}\to\widehat{x}_0\ (k\to\infty).$$

当任取 $x_0\in\widehat{x}_0$ 时, 由式 (1.6.1) 可知 $\|\widehat{x}_0\|=\|x_0\|^{\triangle}=1$, 即 $x_0\in S_1(E^{\triangle})$. 而且再由式 (1.6.1) 及商映射的线性可知

$$\|x_{n_k}-x_0\|^{\triangle}=\|(x_{n_k}-x_0)\widehat{\ }\|=\|\widehat{x}_{n_k}-\widehat{x}_0\|\to 0.$$

即说明了在 $S_1(E^{\triangle})$ 中, 任意点列有收敛子列, 故其必为自列紧的. □

§1.7　赋准范空间的一些特征

首先, 我们注意到在赋准范空间中, §1.5 的 Riesz 引理之证明是失效的. 而且, 在任意的赋准范空间中, 单位球面未必存在 (因存在赋准范空间, 其准范数可以均小于 1, 例如空间 (s)). 因此, 如果我们想推广 Riesz 引理, 并且保持其在该节证明定理时的作用, 则可以提出如下问题:

问题* *对于赋准范空间 E, 是否存在两个正数 ε_0 和 δ_0, 使得对于 E 中任意的闭、真线性子空间 E_0, 均存在元 $x_1 \in S_{\delta_0}$(半径为 δ_0 的原心球面), 使得*

$$d(x_1, E_0) \triangleq \inf_{y \in E_0} ||x_1 - y||^* \geqslant \varepsilon_0.$$

事实上, 对于一般地赋准范空间, 上面问题的回答是否定的. 我们有下面的反例:

反例* *在赋准范空间 (s) 中, 对于任意正数 ε, 均存在一个闭、真子空间 E_0, 使得对于空间的任意元 $x \in (s)$, 均有 $d(x, E_0) < \varepsilon$.*

验证　对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$, 则当取线性子空间

$$E_0 \triangleq \left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_n e_n \colon \lambda_n \in \mathbb{K}, 1 \leqslant n \leqslant N \right\}$$

(其中 $e_n = (0, \cdots, 0, \underset{(n)}{1}, 0, \cdots), 1 \leqslant n \leqslant N$) 时, 由 §1.5 中引理 1 后的推理 3 可知, E_0 显然为 (s) 中一个闭线性子空间. 而对于任意元 $x = \{\xi_n\} \in (s)$, 当取 $y = (\xi_1, \cdots, \xi_n, 0, \cdots) \in E_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} d(x, E_0) &\leqslant d(x, y) = ||x - y||^* \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|} \\ &< \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

但对于有限维的赋准范空间 $E_{(n)}$, 上面问题的回答是肯定的. 即我们有下面的命题:

命题 1*(有限维赋准范空间中的 Riesz 引理)　*设 $E_{(n)}$ 为任意 n 维赋准范空间, 则必存在两个正数 ε_0 和 δ_0, 使得对于 $E_{(n)}$ 中的任意闭、真线性子空间 E_0, 均存在元 $x_1 \in S_{\delta_0}$, 使得*

$$||x_1 - y||^* \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall y \in E_0.$$

证明 我们介绍两个证法：

证法 1 首先, 由 §1.5 引理 1 后面的推理 1, 当记空间准范为 $||x||^*$, 并记空间上的欧氏范数为 $||x||_d$ 时, 我们有关系式

$$||x||^* \to 0 \Longleftrightarrow ||x||_d \to 0, \tag{1.7.1}$$

由此, 立即得到下面的结论：存在正数 ρ_0 和 δ_0, 使得

$$||x||_d > \rho_0 \Longrightarrow ||x||^* \geqslant \delta_0 \quad (\forall x \in E_{(n)}). \tag{1.7.2}$$

(事实上, 若式 (1.7.2) 不成立, 则对于任意的 $m \in \mathbb{N}$ 必存在 x_m, 使得 $||x_m||_d > m$ 及 $||x_m||^* < \frac{1}{m}$ 均成立. 但此显然与式 (1.7.1) 矛盾!)

由此可知, 在准范数下, 半径为 δ_0 的原心球面 $S_{\delta_0} = \{x \in E_{(n)}: \ ||x||^* = \delta_0\}$ 是"完整"的 (无"洞"的).

同样由式 (1.7.1), 我们还可以得到一个欧氏范数下的原心闭球

$$B_{r_1}^{(d)} \triangleq \{x \in E_{(n)}: \ ||x||_d \leqslant r_1\},$$

及一个准范数下的原心闭球 $B_{\varepsilon_1} \triangleq \{x \in E_{(n)}: \ ||x||^* \leqslant \varepsilon_1\}$, 使得关于准范的原心闭球 B_{δ_0} 有关系式

$$B_{\varepsilon_1} \subset B_{r_1}^{(d)} \subset B_{\delta_0}. \tag{1.7.3}$$

这样一来, 对于任意的真线性子空间 $E_0 \subset E_{(n)}$ (由 §1.5 中引理 1 后的推理 3 可知其必为闭集), 当我们对于欧氏范数下的赋范空间运用 Riesz 引理时, 则可得到球面 $S_{r_1}^{(d)}$ 上的一点 x_1^0, 使得

$$d(x_1^0, E_0) = ||x_1^0||_d = r_1 \tag{1.7.4}$$

(注意, 此时可取 x_1^0 为"垂直"于 E_0 的向量).

注意到式 (1.7.3) 的第二个关系式, 由于准范的原心球面 S_{δ_0} 是完整的, 故对于元 $x_1^0 \in B_{r_1}^{(d)} \subset B_{\delta_0}$, 必存在数 $\lambda_1 \geqslant 1$, 使得 $||\lambda_1 x_1^0||^* = \delta_0$. 今设 $x_1 = \lambda_1 x_1^0$ 及 $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1}{2}$, 由式 (1.7.3) 和 (1.7.4) (注意准范数性质 $||2x||^* \leqslant 2||x||^*$) 可得

$$x_1 + B_{\frac{\varepsilon_1}{2}} \subset x_1 + B_{\frac{r_1}{2}}^{(d)}, \quad (x_1 + B_{\frac{r_1}{2}}^{(d)}) \bigcap E_0 = \varnothing.$$

由此立即导出

$$||x_1 - y||^* \geqslant \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_0, \ \forall y \in E_0. \qquad \square$$

证法 2 当得到式 (1.7.2), 知道准范球面 S_{δ_0} 是"完整"的以后, 我们由式 (1.7.1) 同样可知, 必存一个欧氏范数的原心球 $B_{r_1}^{(d)} \subset B_{\delta_0}$. 令

$$\varepsilon_0 = \inf_{\|x\|_d \geqslant r_1} \|x\|^*. \tag{1.7.5}$$

可以断言: $\varepsilon_0 > 0$ (事实上, 如果 $\varepsilon_0 = 0$, 则必存在元列 $\{x_n\}$, 使得 $\|x_n\|_d \geqslant r_1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, 且 $\|x_n\|^* \to 0(n \to \infty)$. 此显然与式 (1.7.1) 矛盾!)

这样一来, 对于任意真线性子空间 E_0, 与证法 1 一样, 由对欧氏 (范数) 空间使用 Riesz 引理, 知: 存在 $x_1^0 \in S_{r_1}^{(d)}$, 使得 $d(x_1^0, E_0) = r_1$, 从而存在 $\lambda_1 \geqslant 1$, 使得 $\|\lambda_1 x_1^0\|^* = \delta_0$. 令 $x_1 = \lambda_1 x_1^0$, 则

$$\|x_1 - y\|_d \geqslant d(x_1, E_0) = d(\lambda_1 x_1^0, E_0) = \lambda_1 r_1 \geqslant r_1 \quad (\forall y \in E_0).$$

由式 (1.7.5), 立即得出 $\|x_1 - y\|^* \geqslant \inf\limits_{\|x\|_d \geqslant r_1} \|x\|^* = \varepsilon_0 (\forall y \in E_0)$. □

注意到 Riesz 引理在无穷维"赋准范"空间中的无效性, 以及即使在有限维的赋准范空间中, 元的准范数无法对其坐标予以控制 (即虽然其准范有界, 但其坐标可能无界), 因此上节有关赋范空间用其单位球面的自列紧性与否来判断其维数有限与否的定理, 在赋准范空间就未必成立了. 我们可以看到下面两个性质.

性质 1 *在准范空间 E 中, 若 $\dim(E) < \infty$, 则当 $S_r \neq \varnothing$ 时, S_r 未必是紧集.*

反例 *仍取空间 $(a_{(1)}) \triangleq (\mathbb{R}, \|\cdot\|_a^*)$(见 §1.3 中例 6), 其中*

$$\|x\|_a^* = \begin{cases} |x|, & \text{当 } |x| \leqslant 1\text{时}, \\ 1, & \text{当 } |x| \geqslant 1\text{时}, \end{cases}$$

则 $S_1 = \{x \in \mathbb{R}: \ |x| \geqslant 1\}$. 显然 S_1 在 $\mathbb{R}$ 中是无界集, 从而非紧集 (事实上, 特取 $x_n = n$. 显然 $\{x_n\} \subset S_1$, 且

$$\|x_n - x_m\|_a^* = \|n - m\|_a^* = 1 \ \ (\forall n \neq m),$$

故 S_1 非列紧集, 从而 S_1 非紧集).

性质 2* *在赋准范空间中, 即使 $S_r \neq \varnothing$ 且"紧", 也未必有$\dim(E) < \infty$.*

由 §1.3 中例 7, 我们可以作出下面的反例.

反例 1* *空间 $(b) \triangleq (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_b^*)$, 其中准范数定义为*

$$\|x\|_b^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|\xi_k\|_b^*, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (b)$$

(其中准范 $\|\xi_k\|_b^*$ 如 §1.3 中例 7).

可以验证 $(b) \triangleq (\mathbb{R}^\infty, ||\cdot||_b^*)$ 显然为无穷维的赋准范空间, 但其单位球面 S_1 是紧的. 我们分四步验证之:

(1) 由此空间准范定义可知: S_1 中的元素必是形如 $x = (\omega_1, \omega_2, \cdots)$, 其中 $\omega_n = \pm 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

(2) 对任意元列 $\{x_m\} \subset S_1$, 设 $x_m = \{\omega_1^{(m)}, \omega_2^{(m)}, \cdots\}$, 其中 $\omega_n^{(m)} = \pm 1$ $(\forall m, n \in \mathbb{N})$. 为方便起见, 设 $x_m(n) = \omega_n^{(m)}$ 为 x_m 的第 n 个坐标.

对于数列 $\{x_m(1)\}$, 其或含有无穷个 $+1$, 或含有无穷个 -1, 故可选取子列 $\{x_{1,m}\} \subset \{x_m\}$, 使得 $\{x_{1,m}(1)\}$ 为常数列, 故为收敛于 $\omega_1(=\pm 1)$ 的子列.

同理, 对于数列 $\{x_{1,m}(2)\}$, 其或含有无穷个 $+1$, 或含有无穷个 -1, 故可选取子列 $\{x_{2,m}\} \subset \{x_{1,m}\}$, 使得 $\{x_{2,m}(2)\}$ 为常数列, 故为收敛于 $\omega_2(=\pm 1)$ 的子列.

……

对于数列 $\{x_{n,m}(n+1)\}$, 其或含有无穷个 $+1$, 或含有无穷个 -1, 故可选取子列 $\{x_{n+1,m}\} \subset \{x_{n,m}\}$, 使得 $\{x_{n+1,m}(n+1)\}$ 为常数列, 故为收敛于 $\omega_{n+1}(=\pm 1)$ 的子列.

……

取“对角线”子列 $\{x_{mm}\}$, 则有

$$x_{m,m}(n) \to \omega_n(=\pm 1)(m \to \infty), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(3) 在 $(b) \triangleq (\mathbb{R}^\infty, ||\cdot||_b^*)$ 中, 必有

$$||x_m||_b^* \to 0 \Leftrightarrow |x_m(n)| \to 0 \ (m \to \infty), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(i) 事实上, 若 $||x_m||_b^* \to 0(m \to \infty)$, 则由 (b) 中准范的定义有, $||x_m(n)||_b^* \to 0(m \to \infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$; 再由 $(b_{(1)})$ 中范数的定义可知 $x_m(n) \to 0(m \to \infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 故“$\Rightarrow$”成立.

(ii) 另一方面, 假设 $x_m(n) \to 0(m \to \infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 首先取 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由假设知

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} |x_m(n)| \to 0, (m \to 0).$$

故存在 $M \geqslant 0$, 使得当 $m \geqslant M$ 时, 均有 $|x_m(n)| \leqslant 1 (1 \leqslant n \leqslant N)$ 且

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} |x_m(n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 当 $m \geqslant M$ 时, 由 $(b_{(1)})$ 中准范数的定义, 有

$$\begin{aligned}
\|x_m\|_b^* &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|x_m(k)\|_b^* \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} |x_m(n)| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|x_m(k)\|_b^* \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} |x_m(n)| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

这说明了 "$\Leftarrow$" 是正确的.

(4) 由上面 (2) 和 (3), 当令 $x_0 = (\omega_1, \omega_2, \cdots)$ 时, 可知 $x_0 \in S_1$ 且

$$\|x_{m,m} - x_0\|_b^* \to 0 \quad (m \to \infty),$$

此即说明 S_1 中的任意点列 $\{x_m\}$ 有收敛的子列 $\{x_{m,m}\}$, 故 S_1 是自列紧的.

反例 2* 空间 $(b_1) \triangleq (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_{b_1}^*)$, 其中准范数定义为

$$\|x\|_{b_1}^* = \|\xi_1\|_b^* + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} (\|\xi_k - \xi_1\|_b^* + \|\xi_k + \xi_1\|_b^*), \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (b_1)$$

(这里 $\|\cdot\|_b^*$ 的定义同反例 1*).

易证 $\|\cdot\|_{b_1}^*$ 为准范数, 且有

$$\|x\|_{b_1}^* \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (b_1),$$

此外, 上式等号成立的条件是

$$\begin{cases} \|\xi_1\|_b^* = 1, \\ \|\xi_k - \xi_1\|_b^* = 1, \\ \|\xi_k + \xi_1\|_b^* = 1. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |\xi_1| = 1, \\ |\xi_k - \xi_1| = 1, \\ |\xi_k + \xi_1| = 1. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \pm 1, \\ \xi_k = 0, \\ \forall k \geqslant 2. \end{cases}$$

由此即知 $S_2 = \{(\pm 1, 0, \cdots)\}$, 故 S_2 只含有两个点, 当然是紧集 (自列紧集). 但是

$$\dim(b_1) = \infty.$$ □

由 §1.5 引理 1 后的推理 1, 从上面命题 1* 的证明中我们不难得到以下命题:

命题 2* 对于任意有限维的赋准范空间 $E_{(n)}$, 其必存在某一"完整"的自列紧的球面 (球).

事实上, 对于改赋"范数"后的此空间, $(E_{(n)}, ||\cdot||_d)$ 应用上节定理 1 可知其单位"球面"$S_1^{(d)}$ 必是自列紧的 (而从范数的性质可知对任意元 $x \neq \theta$, 必有 $\frac{x}{||x||_d} \in S_1^{(d)}$. 由此不难导出整个范数 $||\cdot||_d$ 的单位"球"$B_1^{(d)}$ 也是自列紧的). 而从本节开始的命题 1 的证明中我们又知, 对范数的原心球 $B_1^{(d)}$, 其内必含有一个"完整的"原准范数的原心球 B_{ε_0}. 注意到此时其球面 (球) 均为 $B_1^{(d)}$ 的子集, 又由 §1.5 引理 1 后面的推理 1 可知, 按范收敛与按原准范收敛是相同的 (以及准范 $||x||$ 是 x 的连续泛函), 从而立即可以得到本命题的结论. □

我们可以证明以下判别赋准范空间是有限维的命题 (参见文献 [31]):

命题 3* 对于赋准范空间 E, 如果其球面 S_{r_0} 为自列紧集, 那么, 当以下条件有一成立时, 则 E 必是有限维的:

(1) 存在元 $x_1 \in E$ 有 $||x_1||^* > r_0$;

(2) 准范是"不减"的 (即: $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \Rightarrow ||\lambda_1 x||^* \leqslant ||\lambda_2 x||^*, \quad \forall x \in E$).

和赋范空间不同的是, 在赋准范空间中还有如下的性质:

性质 3 赋准范空间的任意球可以是非凸集, 但同时其任意球却是可以含有一个凸开集的.

事实上, 当赋准范空间是"有限维"时, 由 §1.5 引理 1 后的推理 1 可知, 当此空间 $E_{(n)}$ 上定义了一个准范 $||x||^*$ 和一个范数 $||x||$ 时, 此两范数是等价的. 故任意准范 $||x||^*$ 的球内必含有范数 $||x||$ 的一个闭球. 由此易知此性质成立.

而当赋准范空间是无穷维时, 情形就复杂得多. 对于仍具有性质 3 的例子可见下面命题:

命题 4 在赋准范空间 (s) 中, 其任意 (不含全空间的) 球均是非凸集, 但其内均包含一个凸开集.

证明 (1) (s) 中任意球均不是凸集.

由于准范数定义的距离具有平移不变性, 故仅对 (s) 中的原心球验证即可. 回忆 (s) 空间的准范数定义为

$$||x||^* = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|} \qquad (\forall x = \{\xi_n\} \in (s)),$$

故对于一个不含全空间的原心球 B_{r_0}, 必有 $0 < r_0 < 1$.

对于上述的半径 r_0, 必存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $r_0 \leqslant \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{2^n}$. 设 $\alpha = \min\{\frac{1}{2}r_0, \frac{1}{2^{n_0+3}}\}$, 则 $2^{n_0+2}\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. 取 $\xi, \eta_1, \eta_2 > 0$, 使得 $x = \xi \sum_{i=1}^{n_0} e_i$, $y = \eta_1 e_{n_0+1}$ 和 $z = \eta_2 e_{n_0+2}$ 满足

$$||x||^* = r_0 - \alpha, \quad ||y||^* = \alpha, \quad ||z||^* = \alpha,$$

其中 $e_i = (0, \cdots, 0, \underset{\text{第 }(i)\text{ 项}}{1}, 0, \cdots)$. 显然 $\|x+y\|^* = \|x+z\|^* = r_0$.

另一方面,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x+z)\right\| &= \left\|x+\frac{1}{2}(y+z)\right\| \\ &= \|x\|^* + \frac{1}{2^{n_0+1}}\left(\frac{\frac{1}{2}\eta_1}{1+\frac{1}{2}\eta_1}\right) + \frac{1}{2^{n_0+2}}\left(\frac{\frac{1}{2}\eta_2}{1+\frac{1}{2}\eta_2}\right) \\ &> r_0 - \alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n_0+1}}\frac{\eta_1}{1+\eta_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n_0+2}}\frac{\eta_2}{1+\eta_2}\right) \\ &= r_0 - \alpha + \frac{1}{2}(\|y\|^* + \|z\|^*) \\ &= r_0,\end{aligned}$$

亦知球 B_{r_0} 不是凸的. □

(2) (s) 中任意球内必含有凸的开集.

事实上, 对于空间 (s) 中任意开球 B_{r_0}, 我们取 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{2^n} < \frac{r_0}{2}.$$

今作集 V_0 如下:

$$V_0 = \left\{\{\xi_n\}:\ |\xi_n| < \frac{r_0}{2}(1\leqslant n\leqslant n_0)\ \text{及}\ \xi_n \in \mathbb{K}(n > n_0)\right\},$$

则 V_0 显然是 θ 点的一个开、凸邻域. 而且, 对于任意元 $y \in V_0$, 当令 $y = \{\xi_n\}$ 时, 则有

$$\begin{aligned}\|y\| &= \sum_n \frac{1}{2^n}\frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|} \\ &= \sum_{n\leqslant n_0}\frac{1}{2^n}\frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|} + \sum_{n>n_0}\frac{1}{2^n} \\ &< \sum_{n\leqslant n_0}\frac{1}{2^n}|\xi_n| + \frac{r_0}{2} \\ &< \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2} = r_0.\end{aligned}$$

由此得出 $V_0 \subset B_{r_0}$. □

同样存在着不具有上面性质 3 的无穷维赋准范空间. 反例可见于下面两个命题:

命题 5* 在空间 $(\ell^\beta)(0<\beta<1)$ 中, 其任意球内均不含有凸开集.

证明 同样地，由准范定义的距离之"平移不变性"，我们可以仅对原心球来考虑. 对于任意 (ℓ^β) 空间中的原心球 B_{r_0}，我们反设其含有一个凸的开集 V，则由距离空间中球是邻域基，可知：存在一个原心球 B_δ，使得 $B_\delta \subset V$. 今取自然数 n_0，使得 $n_0^{1-\beta}\delta > \delta_0$. 注意到 $\delta^{\frac{1}{\beta}} e_k \in B_\delta (1 \leqslant k \leqslant n_0)$，这里 $e_k = (0, \cdots, 0, \underset{(n)}{1}, 0, \cdots)(k \in \mathbb{N})$，故由 V 的凸性假设有

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{n_0}(\delta^{\frac{1}{\beta}} e_k) \in V \subset B_{r_0}. \tag{1.7.6}$$

但另一方面，由

$$\|x_0\|_\beta = \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{n_0}(\delta^{\frac{1}{\beta}} e_k) \right\|_\beta = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\delta}{n_0^\beta} = n_0^{1-\beta}\delta > r_0,$$

从而 $x_0 \notin B_{r_0}$，与式 (1.7.6) 矛盾. □

注 1 空间 (ℓ^β) 是存在"真"凸邻域的 (即非全空间的凸开集)，而且均是准范无界集. 例如

$$V_\varepsilon = \{\{\xi_k\}:\ |\xi_1| < \varepsilon \text{ 及 } \xi_k \in \mathbb{K}(k > 1)\}$$

即是其 θ 点的凸、开邻域.

注 2 用上述命题 5* 的证明，我们可以看出：即使在一个完备的赋准范空间中，**紧集的闭凸包也未必是紧集**. [下面反例给出一个紧集，其凸包是准范无界集，从而必不是紧集 (这是因为在度量空间中紧与自列紧是等价的，对于一个度量无界的点集，我们必能从中选出一列 $\{x_n\}$，使得 $d(x_m, x_n) > 1\ \ (\forall n \neq m \in \mathbb{N})$，从而度量无界的点集不能是自列紧集，也不是紧集). 也可以从另一角度来看，由于度量是连续函数，而紧集上的连续函数是有界的，从而"度量无界"的点集一定不是紧的.]

反例* 在 (ℓ^β) 空间中 $(0 < \beta < 1)$，可取 $\delta_0 > 0$，使得 $\beta + \beta\delta_0 < 1$. 显然 $A \triangleq \{\frac{e_n}{n^{\delta_0}}, \theta\}$ 是紧集. 但是其凸包中的元

$$x_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m} \frac{e_n}{n^{\delta_0}}$$

有性质：

$$\|x_m\|_\beta = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{m}\right)^\beta \frac{1}{n^{\delta_0\beta}} \geqslant m \frac{1}{m^{\beta+\delta_0\beta}} = m^{1-(\beta+\delta_0\beta)} \to \infty \quad (m \to \infty),$$

从而可知其凸包一定是无界集.

命题 6* 在空间 $L^\beta[0,1](0 < \beta < 1)$ 中，除了全空间外不存在任意开凸集.

证明 反之, 如果此空间具有非全空间的凸、开集. 由平移不变性, 不妨设此凸开集 V_0 是 θ 点的邻域 (即 $\theta \in V_0$). 注意到"球"为距离空间的点之邻域基, 因此可以假设某原心球 $B_{r_0} \triangleq \{x: \|x\|^* \leqslant r_0\}$ 满足条件 $B_{r_0} \subset V_0$.

对任意元 $x \in L^\beta[0,1]$, 取自然数 n_0, 使得 $\|x\|_\beta < r_0 n_0^{1-\beta}$. 然后, 利用不定积分 $\int_a^t |x(t)^\beta| dt$ 关于 t 的连续性, 可将区间 $[0,1]$ 划分为

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_0} = 1,$$

使其有

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} |x(t)|^\beta dt = \frac{\|x\|_\beta}{n_0} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n_0).$$

令 $y_k(t) = n_0 x(t) \chi_{[t_{k-1},t_k]}(t)$, 其中 $\chi_{[a,b]}(t)$ 是区间 $[a,b]$ 的特征函数, 则由 n_0 的取法可知

$$\begin{aligned}\|y_k\|_\beta &= n_0^\beta \|x(t)\chi_{[t_{k-1},t_k]}(t)\|_\beta \\ &= n_0^\beta \frac{\|x\|_\beta}{n} = \frac{\|x\|_\beta}{n_0^{1-\beta}} \\ &< r_0.\end{aligned}$$

故有

$$y_k \in B_{r_0} \subset V_0 \ (1 \leqslant k \leqslant n_0),$$

因此, 从 V_0 的凸性便可导出

$$x = \sum_{k=1}^{n_0} x(t)\chi_{[t_{k-1},t_k]}(t) = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{y_k}{n_0} \in V_0.$$

此即证得 $V_0 = L^\beta[0,1]$, 与 V_0 的假设矛盾! □

§1.8 赋 (准) 范空间的完备性及例子

首先我们给出下面的定义:

定义 1 设 E 为赋 (准) 范空间, $\{x_n\} \subset E$. 称 $\{x_n\}$ 为**Cauchy 列**是指: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 只要 $n, m \geqslant N$, 就有 $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. 称 E 是**完备的**是指 E 中的任意一个Cauchy列在 E 中均有极限. 称完备的赋范空间为**Banach 空间** (**巴拿赫空间**). 完备的赋准范空间称为**Fréchet 空间**(**弗雷歇空间**).

从数学分析的知识, 我们首先可以给出下面一个例子:

例 1 任意 n 维数域空间 (欧氏空间) $\mathbb{K}^n$ 是Banach空间.

例 2 赋范空间 $(c_0),(c)$ 和 (ℓ^∞) 均为Banach 空间.

验证 回忆到上面这些空间均是以 $\sup_{1\leqslant k<\infty}|\xi_k|$ 为范数的, 其中元 $x=\{\xi_k\}$. 下面仅以 (c) 为例验证之.

任取 Cauchy 列 $\{x_n\}\subset(c)$, 设

$$x_n=\{\xi_k^{(n)}\}_k\ \ (\forall n\in\mathbb{N}),$$

则知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $m,n>N$ 时, 有

$$||x_m-x_n||=\sup_k|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|<\varepsilon. \tag{1.8.1}$$

由此可知, 对任意的 $k\in\mathbb{N}$, 当 $m,n\geqslant N$ 时, 均有 $|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}|<\varepsilon$, 即 $\{\xi_k^{(n)}\}_n$ 均是 Cauchy 数列, 从而必存在一个数 $\xi_k^{(0)}$, 使得

$$\xi_k^{(n)}\to\xi_k^{(0)}(n\to\infty),\quad \forall k\in\mathbb{N}. \tag{1.8.2}$$

现在再次注意到式 (1.8.1), 则对任意的 $k\in\mathbb{N}$, 一致地有

$$|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|<\varepsilon\ \ (\forall m,n>N).$$

故从式 (1.8.2), 当在上式中令 $m\to\infty$ 时, 则有

$$|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|\leqslant\varepsilon\ \ (\forall n>N).$$

也即得到, 当 $n>N$ 时, 有

$$||x_n-x_0||=\sup_k|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|\leqslant\varepsilon \tag{1.8.3}$$

(这里, $x_0=\{\xi_k^{(0)}\}$).

注意到不等式

$$|\xi_{k_1}^{(0)}-\xi_{k_2}^{(0)}|\leqslant|\xi_{k_1}^{(0)}-\xi_{k_1}^{(n)}|+|\xi_{k_1}^{(n)}-\xi_{k_2}^{(n)}|+|\xi_{k_2}^{(n)}-\xi_{k_2}^{(0)}|, \tag{1.8.4}$$

以及每个元 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}_k\in(c)$, 而从空间 (c) 定义即知 $\{\xi_k^{(n)}\}_k$ 是 Cauchy 数列, 由此并注意到式 (1.8.4) 即知 $\{\xi_k^{(0)}\}$ 亦为 Cauchy 数列, 从而 $x_0=\{\xi_k^{(n)}\}\in(c)$. 这样一来, 则从上面的式 (1.8.3) 导出了空间 (c) 的完备性. □

例 3 $(\ell^p)\,(p\geqslant1)$ 是 Banach 空间.

验证 对任意 Cauchy 列 $\{x_n\}\subset(\ell^p)\,(p\geqslant1)$. 当设 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}_k\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$ 时, 则知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $m,n\geqslant N$ 时, 有

$$||x_m-x_n||=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}|\Big)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon. \tag{1.8.5}$$

由此可知, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, $\{\xi_k^{(n)}\}_n$ 均为 Cauchy 数列, 从而存在数 $\xi_k^{(0)}$, 使得

$$\xi_k^{(n)} \to \xi_k^{(0)} \quad (n \to \infty). \tag{1.8.6}$$

现再次注意到式 (1.8.5), 则对于任意的 $k_0 \in \mathbb{N}$ 均有

$$\Big(\sum_{k=1}^{k_0} |\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(n)}|\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad (\forall\, m, n > N),$$

因此, 上式当令 $m \to \infty$ 时, 注意到式 (1.8.6), 则有: 对任意的 $k_0 \in \mathbb{N}$,

$$\Big(\sum_{k=1}^{k_0} |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}|\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \quad (\forall\, n > N), \tag{1.8.7}$$

当令 $x_0 = \{\xi_k^{(0)}\}$ 时, 式 (1.8.7) 即导出 $||x_n - x_0|| \leqslant \varepsilon \ \ (\forall n > N)$, 也即有

$$||x_n - x_0|| \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{1.8.8}$$

最后, 再由式 (1.8.7)(注意 Minkowski 不等式) 则有

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(0)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

由此即知 $x_0 \in (\ell^p)$. 因此, 结合式 (1.8.8) 即导出了空间 $(\ell^p)(p \geqslant 1)$ 的完备性. □

例 4 $(\ell^\beta)\,(0 < \beta < 1)$ 是完备的赋准范空间 (Fréchet 空间).

验证 类似上面 $(\ell^p)\,(p \geqslant 1)$ 的证法, 仅将那里的范数 $(\sum_k |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ 换为这里的准范数 $\sum_k |\xi_k|^\beta$ 则可. □

例 5 (s) 为 Fréchet 空间.

验证 由 (s) 准范为

$$||x||^* = \sum_k \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|} \qquad (\forall\, x = \{\xi_k\} \in (s)).$$

且注意到 §1.3 例 3 后面的注

$$||x||^* \to 0 \Longleftrightarrow \xi_k \to 0 \quad (\forall\, k \in \mathbb{N}), \tag{1.8.9}$$

故对于任意 Cauchy 列 $\{x_n\} \subset (s)$, 由 $||x_n - x_m||^* \to 0 \ \ (n, m \to \infty)$ 及式 (1.8.9) 则有

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| \to 0 (n, m \to \infty),$$

其中 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}, n\in\mathbb{N}$. 而由数域 $\mathbb{K}$ 的性质知：存在 $\xi_k^{(0)}$, 使得

$$\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}\to 0\quad(n\to\infty),\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

令 $x_0=\{\xi_k^{(0)}\}$ 再注意到式 (1.8.9) , 则可导出

$$||x_n-x_0||^*\to 0\quad(n\to\infty).$$

显然, $x_0\in(s)$ 由此知空间 (s) 是完备的, 即为 Fréchet 空间. □

例 6 空间 $C[a,b]$(一般为 $C(\Omega)$, 其中 Ω 为“紧”空间) 是 Banach 空间.

验证 对于任意的 Cauchy 列 $\{x_n\}\subset C[a,b]$, 当设 $x_n=x_n(t)\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$ 时, 则知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n,m>N$ 时, 有

$$||x_n-x_m||=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.\tag{1.8.10}$$

由此, 对于任意的 $t\in[a,b]$ 存在 $x_0(t)$, 使得

$$x_n(t)\to x_0(t)\quad(n\to\infty),\quad\forall t\in[a,b].\tag{1.8.11}$$

注意到式 (1.8.10), 知对上述的 $\varepsilon>0$ 有

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon\quad(\forall n,m>N),\quad\forall t\in[a,b].$$

在上式中令 $m\to\infty$, 从式 (1.8.11) 则知

$$|x_n(t)-x_0(t)|\leqslant\varepsilon\ \ (\forall n>N),\quad\forall t\in[a,b].$$

此即 $x_n(t)$ 一致收敛于 $x_0(t)$, 也即有

$$||x_n-x_0||=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x_0(t)|\to 0\ \ (n\to\infty).\tag{1.8.12}$$

此外, 由数学分析我们还知, $x_0(t)$ 也必为连续函数, 即 $x_0\in C[a,b]$. 因而, 由式 (1.8.12) 就导出了空间 $C[a,b]$ 的完备性. □

注 1 数列空间 (c) 亦可视为连续函数空间 $C(\Omega)$(其中 $\Omega=\{0,\frac{1}{n}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集). 此时, 对于任意的元 $x=\{\xi_n\}\in(c)$, 我们可视其为元 $x(t)\in C(\Omega)$, 其中 $\xi_n=x(\frac{1}{n})\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$. 且由空间 (c) 的定义可知, 当设 $\xi_n\to\xi_0\ \ (n\to\infty)$ 时, 有 $\xi_0=x(0)$.

注 2 空间的完备性与其 (准) 范数的定义是密切相关的. 例如从代数的意义来说, 我们均有 $(\ell^p)\subsetneqq(c_0)\,(p>0)$. 因为任意 $(\ell^p)(p>0)$ 中的元 $x=\{\xi_n\}$ 均满足 $\xi_n\to 0(n\to\infty)$, 也即 $x\in(c_0)$. 而且从上面的例子也知到, $(\ell^p)(p\geqslant 1)$ 和

(ℓ^β) $(0<\beta<1)$ 在各自的范数或准范数下均是完备的. 但是, 如果将例如 $(\ell^p)(p\geqslant 1)$ 空间中的元的范数换为 (c_0) 空间的范数, 我们记此赋范空间: $E=(\ell^p,||x||_c)(p\geqslant 1)$, 那么, E 就不是完备的空间了. 事实上, 当取 E 中元列为

$$x_n=\left(1,\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}},\cdots,\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}},0,0,\cdots\right)\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

时, 则按现在的范数, 有 (不妨假设 $m>n$)

$$\begin{aligned}||x_n-x_m||_c&=\left\|\left(0,\cdots,0,\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{p}},\cdots,\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p}},0,\cdots\right)\right\|_c\\&=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{p}}\to 0\quad(n,m\to\infty).\end{aligned}$$

但 $\{x_n\}$ 在 E 中却不存在极限 (因为若 $\{x_n\}$ 收敛于 $x_0\in E$, 则 $||x_n-x_0||_c\to 0$, 由此可知 $\{x_n\}$ 按坐标收敛于 x_0, 故 $x_0=\{(\frac{1}{n})^{\frac{1}{p}}\}$. 但这与 $x_0\in E$ 矛盾, 因为 $\sum_{k=1}^{\infty}[(\frac{1}{n})^{\frac{1}{p}}]^p=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是不收敛的级数).

例 7　$L^p[a,b]$ $(p\geqslant 1)$ 为 Banach 空间.

验证　对任意 Cauchy 列 $\{x_n\}\subset L^p[a,b]$ $(p\geqslant 1)$, 由于对任意的 $\varepsilon>0$, 均存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $m,n>N$ 时, 有 $||x_m-x_n||<\varepsilon$. 由此, 我们可以从 $\{x_n\}$ 中选出一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使其满足条件

$$||x_{n_{k+1}}-x_{n_k}||<\frac{1}{2^k}\qquad(\forall k\in\mathbb{N}).$$

由此可知 $\sum_{k=1}^{\infty}||x_{n_{k+1}}-x_{n_k}||<\infty$. 令

$$y_m(t)=|x_{n_1}(t)|+\sum_{k=1}^{m}|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)|.$$

由范数的三角不等式 (Minkowski 不等式) 可知

$$\begin{aligned}||y_m||&\leqslant||x_{n_1}||+\sum_{k=1}^{m}||x_{n_{k+1}}-x_{n_k}||\\&\leqslant||x_{n_1}||+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}<||x_{n_1}||+1.\end{aligned}$$

显然 $y_m(t)\geqslant 0$ 且关于 m 单增, 令 $y_\infty(t)=\lim_{m\to\infty}y_m(t)$, 由 Levi 引理可知

$$\begin{aligned}\int_a^b|y_\infty|^p dt&=\int_a^b|\lim_{m\to\infty}y_m|^p dt\\&=\int_a^b\lim_{m\to\infty}|y_m|^p dt\\&=\lim_{m\to\infty}\int_a^b|y_m|^p dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{m\to\infty} ||y_m||^p \\ &\leqslant (||x_{n_1}|| + 1)^p.\end{aligned}$$

此式说明 $y_\infty \in L^p[a,b]$, 从而

$$|x_{n_1}(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|$$

对几乎所有的 $t \in [a,b]$ 是收敛的, 而且收敛于 $y_\infty(t)$. 由于级数绝对收敛必条件收敛, 故知上面去掉绝对值后的级数是收敛的, 也即存在 x_∞, 使得

$$\lim_{m\to\infty} x_{n_m}(t) = x_\infty(t), \quad \text{a.e. } t \in [a,b].$$

再由

$$|x_{n_{m+1}}| \leqslant |x_{n_1}(t)| + \sum_{k=1}^{m} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| = y_m(t) \quad (\forall\, m \in \mathbb{N}),$$

令 $m \to \infty$, 可得

$$|x_\infty(t)| \leqslant y_\infty(t), \quad \text{a.e. } t \in [a,b],$$

因此由 $y_\infty \in L^p[a,b]$ 可知 $x_\infty \in L^p[a,b]$. 从级数的角度来看, 即有

$$x_\infty(t) = x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)).$$

而利用范数 $||\cdot||$ 的连续性及 Minkowski 不等式, 则可导出

$$\begin{aligned}||x_\infty - x_{n_m}|| &= \left\| x_\infty - \left(x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=m}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \right\| \\ &\leqslant \sum_{k=m}^{\infty} ||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|| \\ &\leqslant \frac{1}{2^{m-1}}.\end{aligned}$$

再利用三角不等式

$$||x_n - x_\infty|| \leqslant ||x_n - x_{n_k}|| + ||x_{n_k} - x_\infty||,$$

以及注意到 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列, 便知 $\{x_n\}$ 按范收敛于 x_∞, 从而空间 $L^p[a,b]$ 是完备的, 故为 Banach 空间. □

例 8 空间 $L^\beta[a,b]$ $(0<\beta<1)$ 为 Fréchet 空间.

验证 与例 7 的证明相同, 只是将那里的 $(\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$ 换为 $\int_a^b |x(t)|^\beta dt$, 则可类似导出. □

例 9 空间 $L^\infty[a,b]$ ("概有界" 可测函数之全体) 为 Banach 空间.

验证 我们证明一个更一般的结论: 设 $M(\Omega,\mathbb{B},\mu)$ (亦可记为 $L^\infty(\Omega,\mathbb{B},\mu)$) 是测度空间 $(\Omega,\mathbb{B},\mu)$ 上一切 "概有界" 的复值可测函数所组成的线性空间, 赋以范数 $\|\cdot\|_\infty$,

$$\|x\|_\infty = \inf_{E_0}\left\{\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|x(t)|:\ \mu(E_0)=0\right\},\quad \forall x=x(t)\in M(\Omega,\mathbb{B},\mu)$$

后, 构成一个 Banach 空间. 由 §1.2 例 8 可知 $M(\Omega)$ 是赋范线性空间.

下面来证明其完备性. 设 $\{x_n\}\subset M(\Omega,\mathbb{B},\mu)$ 是 Cauchy 点列, 则对任意的 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $N_k\in\mathbb{N}$, 使得

$$\|x_m-x_n\|<\frac{1}{k},\quad \forall m,n>N_k,$$

即

$$\inf\left\{\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|x_m(t)-x_n(t)|:\ \mu(E_0)=0\right\}<\frac{1}{k},\quad \forall m,n>N_k.$$

由下确界的定义, 注意到可列个零测度集的并仍是零测度集, 则存在 E_k, 使得 $\mu(E_k)=0$ 且

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_k}|x_m(t)-x_n(t)|<\frac{1}{k},\quad \forall m,n>N_k.$$

令 $E_0=\bigcup_{k=1}^\infty E_k$, 则 $\mu(E_0)=0$, 且有

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|x_m(t)-x_n(t)|\leqslant \sup_{t\in\Omega\setminus E_k}|x_m(t)-x_n(t)|<\frac{1}{k},\ \forall m,n>N_k.\tag{1.8.13}$$

由此可知, 对任意的 $t\in\Omega\setminus E_0$, $\{x_n(t)\}$ 是 Cauchy 数列. 由数域的完备性, 存在定义在 $\Omega\setminus E_0$ 上的函数 $x_0(t)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x_0(t)$. 令 $x_0(t)$ 在 E_0 上恒取值为 0. 这样, $x_0(t)$ 在整个 Ω 上有定义. 在 (1.8.13) 式中, 令 $m\to\infty$, 则有

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|x_0(t)-x_n(t)|\leqslant\frac{1}{k},\ \forall n>N_k.$$

由此并注意到 $\mu(E_0)=0$, 则有

$$\inf_{\mu(E_0')=0}\ \sup_{t\in\Omega\setminus E_0'}|x_0(t)-x_n(t)|\leqslant\frac{1}{k},\ \forall n>N_k,$$

即 $\|x_n-x_0\|\leqslant\frac{1}{k}$ $(\forall n>N_k)$, 从而 $\{x_n\}$ 按范收敛于 x_0, 故 $M(\Omega)$ 是完备的. □

注 1 当 $\mu(\Omega)<\infty$ 时, 不难看出, 当 $x\in M(\Omega)$ 时, 必有 $x\in L^p(\Omega)\,(p\geqslant 1)$. 而且可知

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_\Omega |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=\mathrm{Vrai}\max_{t\in\Omega}|x(t)|,$$

其中 $\mathrm{Vrai}\max_{t\in\Omega}|x(t)|$(亦记为: $\mathrm{ess.}\sup_{t\in\Omega}|x(t)|$) 表示 $M(\Omega)$ 中 $x(t)$ 的范数. 因此, 人们常常也把空间 $M(\Omega)$ 记为 $L^\infty(\Omega)$ (无论 Ω 是否测度有限).

对于空间 $M(\Omega)$, 当 $\Omega=\mathbb{N}$ 而 μ 取为 "记数测度时", 得到的空间就是 $(m)=\ell^\infty$. 故我们又得到了空间 $(m)=\ell^\infty$ 的完备性 (参见本节例 2).

注 2 类似地, 也有如下的结果:

对于任意的元 $\{\xi_n\}\in(\ell^{p_0})\,(p_0\geqslant 1)$, 有 $\{\xi_n\}\in\ell^p\,(\forall p\geqslant p_0)$, 而且

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^\infty|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\sup_{k\in\mathbb{N}}|\xi_k|.$$

事实上, 前一个结论由 §1.2 注 3 直接可以得到. 下面我们仅来验证第二个结论. 由此从 Minkowski 不等式并再次注意到 §1.2 注 3 ($(\sum_{k=1}^\infty|\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ 关于 p 是单减的), 对任意的 $n,m\in\mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}|\xi_m|&\leqslant\left(\sum_{k=1}^\infty|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=n+1}^\infty|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=n+1}^\infty|\xi_k|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}.\end{aligned}$$

令 $p\to\infty$ 对上式求极限, 注意使用数学分析中的方法, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}\sup_{k\in\mathbb{N}}|\xi_k|&\leqslant\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^\infty|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|+\left(\sum_{k=n+1}^\infty|\xi_k|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}\\&\leqslant\sup_{k\in\mathbb{N}}|\xi_k|+\left(\sum_{k=n+1}^\infty|\xi_k|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}},\end{aligned}$$

从而当 $n\to\infty$ 时, 就得到了所需结果. □

例 10* $S[a,b]$ ($[a,b]$ 区间上概有界的可测函数之全体) 是一个 Fréchet 空间.

验证 只要注意到, 由 $S[a,b]$ 空间中准范数的定义

$$||x||=\int_a^b\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}dt,$$

我们可以导出：在 $S[a,b]$ 空间中, 其元列按 "准范" 收敛即为相应元 (函数)"依测度收敛"; 也即有, 对于 $\{x_n, x_0\} \subset S[a,b]$, 当 $n \to \infty$ 时,

$$x_n \to x_0 \Longleftrightarrow \mu\{t \in [a,b]\colon\ |x_n(t) - x_0(t)| \geqslant \sigma\} \to 0 \quad (\forall \sigma > 0).$$

设 $\{x_n\} \subset S[a,b]$ 是 Cauchy 点列, 使用上面的结论则有：对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $n_k \in \mathbb{N}$, 使得

$$\mu\left\{t \in [a,b]\colon\ |x_n(t) - x_m(t)| \geqslant \frac{1}{2^k}\right\} \leqslant \frac{1}{2^k} \quad (\forall m, n \geqslant n_k). \tag{1.8.14}$$

不妨假设 $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots$, 令 $E_k = \{t \in [a,b]\colon\ |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| \geqslant \frac{1}{2^k}\}$, 则 $\mu(E_k) \leqslant \frac{1}{2^k}$. 对任意 $t \in [a,b] \setminus (\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k)$, 我们有

$$|x_{n_k}(t) - x_{n_N}(t)| < \frac{1}{2^k} \quad (k \geqslant N),$$

从而

$$|x_{n_{k+m}}(t) - x_{n_k}(t)| < \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\forall k \geqslant N, m \geqslant 1), \tag{1.8.15}$$

即 $\{x_{n_k}(t)\}$ $(\forall t \in [a,b] \setminus (\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k))$ 是 Cauchy 点列, 故有极限 $x_0(t)$. 而且, 注意到 N 的任意性, 可知 $x_0(t)$ 在

$$\bigcup_{N=1}^{\infty}\left([a,b]\Big\backslash\Big(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\Big)\right) = [a,b]\Big\backslash \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k$$

有定义. 再注意到

$$\mu\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\Big) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\Big) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} \mu(E_k) \leqslant \frac{1}{2^{N-1}} \quad (\forall N \in \mathbb{N}),$$

从而 $\mu(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k) = 0$. 故 x_0 在 $[a,b]$ 上是确定的. 在式 (1.8.15) 中令 $m \to \infty$, 则有

$$|x_0(t) - x_{n_k}(t)| < \frac{1}{2^{k-1}}, \qquad \forall t \in [a,b] \setminus \Big(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\Big), k \geqslant N;$$

从而

$$\left\{t \in [a,b]\colon\ |x_0(t) - x_{n_k}(t)| \geqslant \frac{1}{2^{k-1}}\right\} \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} E_k, \quad \forall k \geqslant N.$$

故当 $k \geqslant N$ 时,

$$\mu\left\{t \in [a,b]\colon |x_0(t) - x_{n_k}(t)| \geqslant \frac{1}{2^{k-1}}\right\} \leqslant \mu\Big(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k\Big) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} \mu(E_k) \leqslant \frac{1}{2^{N-1}}. \tag{1.8.16}$$

使用三角不等式, 则有

$$\begin{aligned}&\left\{t\in[a,b]:\ |x_0(t)-x_n(t)|\geqslant\frac{1}{2^{N-2}}\right\}\\ \subset&\left\{t\in[a,b]:\ |x_0(t)-x_{n_N}(t)|\geqslant\frac{1}{2^{N-1}}\right\}\bigcup\left\{t\in[a,b]:\ |x_{n_N}(t)-x_n(t)|\geqslant\frac{1}{2^{N-1}}\right\}\\ \subset&\left\{t\in[a,b]:\ |x_0(t)-x_{n_N}(t)|\geqslant\frac{1}{2^{N-1}}\right\}\bigcup\left\{t\in[a,b]:\ |x_{n_N}(t)-x_n(t)|\geqslant\frac{1}{2^{N}}\right\}.\end{aligned}$$

在式 (1.8.14) 中, 令 $k=N, m=n_N$ 结合式 (1.8.16), 则可导出当 $n\geqslant n_N$ 时, 便有

$$\mu\left\{t\in[a,b]:\ |x_0(t)-x_n(t)|\geqslant\frac{1}{2^{N-2}}\right\}\leqslant\frac{1}{2^{N-1}}+\frac{1}{2^N}<\frac{1}{2^{N-2}}.$$

注意到 $N\geqslant 3$ 的任意性, 便知 $\{x_n\}$ 依测度收敛于 x_0, 从而由证明开始时的叙述可推出 $\{x_n\}$ 依 $S[a,b]$ 中准范收敛于 x_0, 故 $S[a,b]$ 是完备的, 也即是 Fréchet 空间. □

从上面一些例子, 不要以为凡是赋 "准" 范空间就一定是完备的. 我们可以看下面的两个相反的例子:

反例 1 空间 (c_{00}) (参见 §1.2 例 1) 是不完备的赋范空间.

验证 在 (c_{00}) 中取元列 $\{x_n\}$ 如下:

$$x_n=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots\right)(\forall\, n\in\mathbb{N}).$$

显然 (不妨假设 $m>n$), 由

$$\begin{aligned}||x_n-x_m||&=\left\|(0,\cdots,0,\frac{1}{n+1},\cdots,\frac{1}{m},0,\cdots)\right\|\\ &=\sup_{n+1\leqslant k\leqslant m}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}\to 0\quad(n,m\to\infty)\end{aligned}$$

则知 $\{x_n\}$ 是 (c_{00}) 中一个 Cauchy 点列, 但此点列在 (c_{00}) 空间中是没有极限的. 事实上, 反之若存在元 $x_0\in(c_{00})$, 使得 $x_n\to x_0(n\to\infty)$, 则当 $x_0=\{\xi_k^{(n)}\}$ 时, 必有

$$||x_n-x_0||=\max\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{k}-\xi_k^{(0)}\right|,\sup_{k>n}|\xi_k^{(0)}|\right\}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故知: $\xi_k^{(0)}=\frac{1}{k}$ $(\forall\, k\in\mathbb{N})$, 但此时 $x_0=\{\frac{1}{k}\}\notin(c_{00})$, 矛盾! □

反例 2 设 $P[a,b]=\{[a,b]$上多项式的全体$\}$, 则其以 $C[a,b]$ 的范数成为一个不完备的赋范空间 (从而其为 $C[a,b]$ 中一个不闭的线性子空间).

验证 由著名的 Weierstrass 定理 (例参见文献 [1] p. 36~38) 可知: "闭区间上的任意连续函数均可由多项式一致逼近", 也即按 $C[a,b]$ 空间的 "范数" 逼近. 由

此, 当我们特取一个不是多项式的连续函数 $x_0 \in C[a,b] \setminus P[a,b]$ 时, 则存在多项式列 $\{p_n^{(0)}(t)\} \subset P[a,b]$, 使得

$$||p_n^{(0)} - x_0|| = \max_{t\in[a,b]} |p_n^{(0)}(t) - x_0(t)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

注意到收敛列必为 Cauchy 列, 故 $\{p_n^{(0)}\}$ 必为空间 $P[a,b]$ 内的一个 Cauchy 列, 但从极限的唯一性可知: $\{p_n^{(0)}\}$ 在 $P[a,b]$ 中没有极限存在, 也即 $P[a,b]$ 不是完备的赋范空间. □

§1.9　空间完备的一些特性

首先, 我们给出赋准范空间完备的判别定理

定理 1　设 E 是赋准范空间, 则 E 是完备的充要条件是: 对于任意的元列 $\{x_k\}$, 如果 $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||^* < \infty$, 则有 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 存在 (也即 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k$ 存在).

证明　"⇒": 设 $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||^* < \infty$, 故当 $y_m = \sum_{k=1}^{m} x_k$ 时, 有 (不妨设 $m > n$)

$$||y_m - y_n||^* = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\|^* \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} ||x_k||^* \to 0 \quad (m, n \to \infty).$$

此即 $\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 列. 由此, 从 E 的完备的假设则知 $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} x_k$ 存在.

"⇐": 对任意的 Cauchy 列 $\{x_k\} \subset E$, 从数学分析知识可知, 必存在子列 $\{x_{k_n}\} \subset \{x_k\}$, 使得

$$||x_{k_{n+1}} - x_{k_n}|| < \frac{1}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

由此则知 $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_{k_{n+1}} - x_{k_n}|| < \infty$. 这样一来, 由定理假设条件, 便可导出 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{k_{n+1}} - x_{k_n})$ 存在, 即有一元 $\overline{x}_0 \in E$, 使得

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) = \overline{x}_0.$$

也即 $\lim_{m\to\infty} x_{k_{n+1}} = \overline{x}_0 - x_{k_1} \triangleq x_0$. 最后, 由 Cauchy 列 $\{x_k\}$ 有子列 $\{x_{k_n}\}$ 收敛于 x_0 立即可导出亦有 $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$, 也即 E 是完备的. □

更一般地, 我们可以给出度量空间 (亦称距离空间) 完备性的判别定理如下:

定理 2　设 (X, d) 是度量空间, 则 X 完备的充要条件是: 对任意的 "闭球套" $\{B(x_n, r_n)\}$, 如果 $r_n \to 0$, 则有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \neq \varnothing$ (并且此时交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$ 必为单点集).

证明 首先, 回忆一下在距离空间中, 球

$$B(x_n,r_n) \triangleq \{x \in X\colon d(x,x_n) \leqslant r_n\},$$

以及 $\{B(x_n,r_n)\}$ 称为 “球套” 是指

$$B(x_n,r_n) \supset B(x_{n+1},r_{n+1}) \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}). \tag{1.9.1}$$

下面我们来证明定理.

“$\Rightarrow$”: 设 (X,d) 完备, $\{B(x_n,r_n)\}$ 为 “闭球套”, 且有 $r_n \to 0$, 则由式 (1.9.1) 可知: 对任意 $m > n\,(m,n \in \mathbb{N})$, 从 $B(x_m,r_m) \subset B(x_n,r_n)$ 可以导出 $d(x_n,x_m) < r_n$. 这样, 由假设 $r_n \to 0$ 立即导出 $\{x_n\}$ 是 X 的 Cauchy 列, 因而从 X 的完备性导出, 存在元 $x_0 \in X$, 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. 由此, 我们断言:

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n,r_n).$$

事实上, 反之, 如果有 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $x_0 \notin B(x_{n_0},r_{n_0})$, 则由 $B(x_{n_0},r_{n_0})$ 是闭集, 距离 $d \triangleq d(x_0,B(x_{n_0},r_{n_0})) > 0$. 而当再次注意到式 (1.9.1) 则立即导出

$$d(x_0,x_n) \geqslant d(x_0,B(x_n,r_n)) \geqslant d(x_0,B(x_{n_0},r_{n_0})) = d > 0 \quad (\forall\, n > n_0).$$

显然, 此与 x_0 为 $\{x_n\}$ 的极限元矛盾!

(此时, 如果还有一点 $\overline{x}_0 \neq x_0$ 亦有 $\overline{x}_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n,r_n)$, 故有

$$0 < d(x_0,\overline{x}_0) \leqslant r_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

而此显然与 $r_n \to 0$ 矛盾! 由此可知, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n,r_n)$ 必为单点集).

“$\Leftarrow$”: 反过来, 假设 E 中任意闭球套当半径趋于 0 时, 其 “交” 必非空. 对于 X 中的任意 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 同样由数学分析的知识可知, 其必可选出一子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$d(x_{n_k},x_{n_{k+1}}) \leqslant \frac{1}{2^k} \quad (\forall\, k \in \mathbb{N}). \tag{1.9.2}$$

从式 (1.9.2) 容易看出闭球列 $\{B(x_{n_k},\frac{1}{2^{k-1}})\}$ 必为 “闭球套”, 且由 $\frac{1}{2^{k-1}} \to 0(k \to \infty)$, 从假设可知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} B(x_{n_k},\frac{1}{2^{k-1}}) \neq \varnothing$.

这样, 当我们取元 $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B(x_{n_k},\frac{1}{2^{k-1}})$ 时, 显然有

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

同样由 “数学分析” 的知识, 从 $\{X_n\}$ 是 Cauchy 列我们立即导出 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. 也即 X 是完备的. □

从上面定理 2 的证明方法, 我们容易得到下面的推论:

推理 1　对于度量空间 (X,d) 中任意 "闭集套" $\{F_n\}(F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots)$, 只要其 "直径" $D_n \triangleq \sup_{x_1,x_2\in F_n} d(x_1,x_2) \to 0\,(n\to\infty)$, 则必存在一元 $x_0 \in X$, 使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}.$$

推理 2*　在赋范线性空间 E 中, 其任意 "开球套" $O(x_n,r_n)$ (其中: $O(x_n,r_n) \triangleq \{x\in E\colon \|x-x_n\| < r_n\}\quad (n\in\mathbb{N})$), 只要 $r_n \nrightarrow 0(n\to\infty)$, 则必有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} O(x_n,r_n) \neq \varnothing.$$

证法 1　由于球套半径 $\{r_n\}$ 为不增有下界的数列, 故存在数 r_0, 使得 $r_n \downarrow r_0 > 0\ \ (n\to\infty)$.

今取一开球 $O(x_{n_0},r_{n_0})$, 使得 $r_{n_0} < \frac{5}{4}r_0$, 则当取闭球 $B_0 = B(x_{n_0},\frac{1}{2}r_0)$ 时, 我们可以断言:

$$B_0 \subset O(x_n,r_n)\quad (\forall\, n\in\mathbb{N}). \tag{1.9.3}$$

事实上, 反之, 如果某球 $O(x_{n_1},r_{n_1})(n_1 > n_0)$ 不满足式 (1.9.3), 那么, 我们可导出此球的直径必不大于球 $O(x_{n_0},r_{n_0})$ 和 $B_0 = B(x_{n_0},\frac{1}{2}r_0)$ 的两半径之和 (如图 1.12 所示)

事实上, 当我们注意到 $x_{n_0} \neq x_{n_1}$ 时, 便可取正数 λ_0, 使得 $\|\lambda_0(x_{n_0}-x_{n_1})\| = \frac{1}{2}r_0$, 由 λ_0 的取法, 可知: 如有

$$\begin{aligned}\|x_{n_0}+\lambda_0(x_{n_0}-x_{n_1})-x_{n_1}\| &= (1+\lambda_0)\|x_{n_0}-x_{n_1}\| \\ &= \|x_{n_0}-x_{n_1}\| + \frac{r_0}{2} < r_{n_1},\end{aligned} \tag{1.9.4}$$

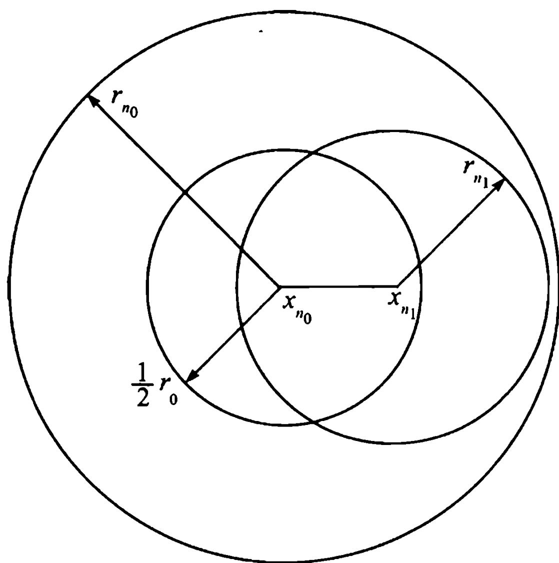


图 1.12

则对任意 $y \in B_0 = (x_{n_0}, \frac{r_0}{2})$, 必有

$$\|y - x_{n_1}\| \leqslant \|y - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x_{n_1}\| \leqslant \frac{r_0}{2} + \|x_{n_0} - x_{n_1}\| < r_{n_1}.$$

由此可知:

$$d(x_{n_0} + \lambda_0(x_{n_0} - x_{n_1}), x_{n_1}) < r_{n_1} \Rightarrow d(y, x_{n_1}) < r_{n_1}, \Big(\forall y \in B_0\Big). \tag{1.9.5}$$

由归谬假设: $B_0 \not\subseteq O(x_{n_1}, r_{n_1})$ 从式 (1.9.4) 及 (1.9.5) 我们则可得到

$$\|x_{n_0} - x_{n_1}\| + \frac{r_0}{2} = d(x_{n_0} + \lambda_0(x_{n_0} - x_{n_1}), x_{n_1}) \geqslant r_{n_1}. \tag{1.9.6}$$

取 $\lambda_1 > 0$, 使得 $\|\lambda_1(x_{n_1} - x_{n_0})\| = r_{n_1}$, 并令 $y = x_{n_1} + \lambda_1(x_{n_1} - x_{n_0})$; 那么则有

$$\|y - x_{n_0}\| = \|x_{n_1} + \lambda_1(x_{n_1} - x_{n_0}) - x_{n_0}\| = (1 + \lambda_1)\|x_{n_1} - x_{n_0}\|$$

及

$$\|y - x_{n_1}\| = \|\lambda_1(x_{n_1} - x_{n_\sigma})\|(= r_{n_1}).$$

从上后一式则有 $y \in S(x_{n_1}, r_{n_1})$, 再注意到球 $O(x_{n_1}, r_{n_1}) \subset O(x_{n_0}, r_{n_0})$, 便有 $\|y - x_{n_0}\| \leqslant r_{n_0}$. 从而得到

$$\begin{aligned}\|x_{n_1} - x_{n_0}\| &= (1 + \lambda_1)\|x_{n_1} - x_{n_0}\| - \|\lambda_1(x_{n_1} - x_{n_0})\| \\ &= \|y - x_{n_0}\| - \|y - x_{n_1}\| \leqslant r_{n_0} - r_{n_1}.\end{aligned}$$

由此从式 (1.9.6) 我们则导出了: $r_{n_0} + \frac{r_0}{2} \geqslant 2r_{n_1}$.

最后, 由 r_{n_σ} 的假设, 从上段结论我们则可得到

$$\frac{5}{4}r_0 + \frac{1}{2}r_0 > 2r_{n_1},$$

也即有 $r_{n_1} < \frac{7}{8}r_0$. 注意到此式当 $n > n_1$ 时也应同样成立. 但此式显然与假设 $r_n \downarrow r_0$ 矛盾. □

证法 2 由假设可知, $\{r_n\}$ 单调递减, 故存在 $r_0 > 0$, 使得 $\lim_{n\to\infty} r_n = r_0$. 因此存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $r_{n_0} \leqslant \frac{5}{4}r_0$. 我们证明

$$B\Big(x_{n_0}, \frac{r_0}{2}\Big) \subset O(x_n, r_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

显然, 为此只需证明 $B(x_{n_0}, \frac{r_0}{2}) \subset O(x_n, r_n) \quad (\forall n > n_0)$. 不妨假设 $x_n \neq x_{n_0}$, 取 $t_0 > 0$, 使得 $t_0\|x_n - x_{n_0}\| = \|t_0(x_n - x_{n_0})\| = \frac{7}{8}r_0 \quad (< r_0 \leqslant r_n)$, 则

$$x_n + t_0(x_n - x_{n_0}) \in O(x_n, r_n) \subset O(x_{n_0}, r_{n_0}),$$

故

$$(1+t_0)\|x_n - x_{n_0}\| = \|[x_n + t_0(x_n - x_{n_0})] - x_{n_0}\| \leqslant r_{n_0} \leqslant \frac{5}{4}r_0.$$

从而

$$\|x_n - x_{n_0}\| \leqslant \frac{5}{4}r_0 - t_0\|x_n - x_{n_0}\| = \frac{5}{4}r_0 - \frac{7}{8}r_0 = \frac{3}{8}r_0.$$

现对任意元 $x \in O(x_{n_0}, \frac{r_0}{2})$, 由三角不等式可得

$$\|x - x_n\| \leqslant \|x - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x_n\| \leqslant \frac{r_0}{2} + \frac{3}{8}r_0 \leqslant \frac{7}{8}r_0 < r_0 \leqslant r_n,$$

故 $x \in O(x_n, r_n)$. 由 x 的任意性便得到所需结论. □

注 1* 值得注意的是, 虽然在赋范空间中任意闭球均是凸闭集, 但是上面推理即使将那里的 "开球套" 换为 "闭凸集套", 也未必是成立的. 我们可见下面两个反例.

反例 1* 在 $C[0,1]$ 中, 取闭凸集列 $\{V_n\}$ 如下: V_1 为: 在 $x_1(t) = t$ 下面、且 $x(1) = 1$ 成立的 "非负" 连续函数 $x(t)$ 的全体; 对 $n = 2, 3, \cdots$, 令 V_n 为: 在函数 $x_n(t)$ 的下面、且 $x(1) = 1$ 的 "非负" 连续函数 $x(t)$ 的全体. 这里, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \text{时}, \\ (n+1)(nt+1-n), & \text{当 } 1-\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1-\frac{1}{n+1} \text{时}, \\ 1, & \text{当 } 1-\frac{1}{n+1} \leqslant t \leqslant 1 \text{时}. \end{cases}$$

(此取法如图 1.13 所示) 那么, 显然有: $\nabla_1 \supset \nabla_2 \supset \cdots \supset \nabla_n \supset \nabla_{n+1} \supset \cdots$ 并且直径

$$D(V_n) \equiv 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

但

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{y_0(t)\}$$

(其中 $y_0(t) = 0$, 当 $0 \leqslant t < 1$时; 而 $y_0(1) = 1$), 故知 $y_0 \notin C[a,b]$. 也即在 $C[a,b]$ 中有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \varnothing.$$ □

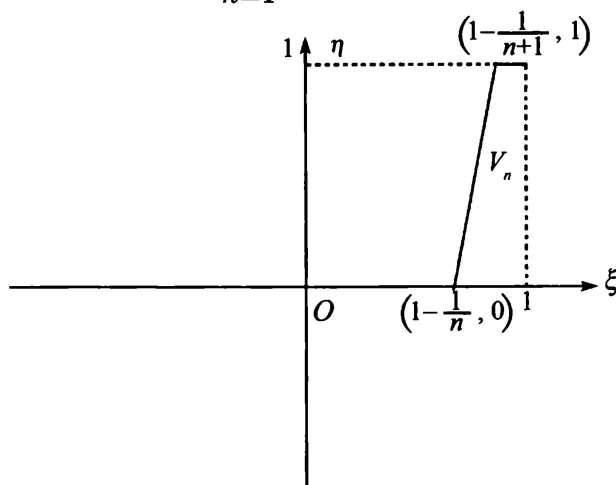


图 1.13

反例 2 在 (c_0) 空间中, $\forall n\in\mathbb{N}$, 令

$$V_n=\{\{\xi_n\}\in(c_0):\ \xi_k=\begin{cases}1, & \text{当}1\leqslant k\leqslant n,\\ \xi_k & \text{当}k\geqslant n,\}.\end{cases}$$

则亦可验证每个 V_n 均是闭凸集, 且有: $\nabla_1\supset\nabla_2\supset\cdots\supset\nabla_n\supset\nabla_{n+1}\supset\cdots$ 及 $D(V_n)\geqslant 1\quad(\forall n\in\mathbb{N})$. 但在 (c_0) 空间中亦有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n=\varnothing.$$ □

注 2** 大多数学习泛函分析的学者都未曾想到的是: 即使在完备的赋 "准范" 空间 (更别提一般的完备度量空间) 中, 对于其内的 "闭球套" $\{B_n\}$, 当其半径 $r_n\nrightarrow 0$ 时, 也导不出 $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\neq\varnothing$. 下面, 我们可以举出一个反例:

反例 1** 取一维赋准范空间 $E=(\mathbb{R},||\cdot||^*)$, 其中准范数定义如下 (如图 1.14 所示):

$$||x||^*=\begin{cases}|x|, & \text{当}\ |x|\leqslant 1\text{时},\\ \dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{2}, & \text{当}\ |x|>1\text{时}.\end{cases}$$

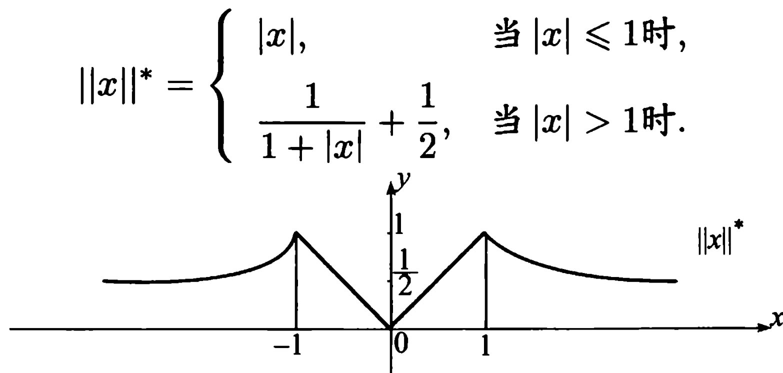


图 1.14

注意到对于函数 $f(x)=||x||^*$, 当 $x>1$ 时, 有 $|f'(x)|=|\frac{-1}{(x+1)^2}|\leqslant\frac{1}{4}$; 当 $0\leqslant x<1$ 时, 有 $|f'(x)|=1$ 以及 $f(x)$ 的对称性. 因此, 利用 §1.3 中例 6 后的命题及后面的证法, 注意到当 $|x|>1$ 时, 均有 $\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 1$, 则不难验证这里的 $||x||^*$ 确为一准范数.

在此准范空间中, 我们取 "闭球套" 如下: 任取球心 $x_0\in\mathbb{R}$, $|x_0|>1$ 半径 $r_0\in(\frac{1}{2},\ \infty)$, 从准范数定义可知

$$B(x_0,r_0)=[x_0-r_0,\ x_0+r_0]\bigcup\Big[x_0+\frac{1}{r_0-\frac{1}{2}}+1,\infty\Big)\bigcup\Big(-\infty,\ x_0-\frac{1}{r_0-\frac{1}{2}}-1\Big].$$

然后, 特取球心 $x_n=3\cdot 4^n$, 半径 $r_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4^{n+1}}$, 则球

$$\begin{aligned}B(x_n,r_n)=&\Big[3\cdot 4^n-\frac{1}{4^{n+1}}-\frac{1}{2},\ 3\cdot 4^n+\frac{1}{4^{n+1}}+\frac{1}{2}\Big]\bigcup\\ &[3\cdot 4^n+4^{n+1}+1,\ \infty)\bigcup(-\infty,\ 3\cdot 4^n-4^{n+1}-1]\\ =&\Big[3\cdot 4^n-\frac{1}{4^{n+1}}-\frac{1}{2},\ 3\cdot 4^n+\frac{1}{4^{n+1}}+\frac{1}{2}\Big]\bigcup\\ &[7\cdot 4^n+1,\ \infty)\bigcup(-\infty,\ -4^n-1].\end{aligned}$$

注意到

$$B(x_{n+1},r_{n+1})\subset[3\cdot 4^{n+1}-1,\ \infty)\bigcup(-\infty,\ -4^{n+1}-1]$$
$$\subset[7\cdot 4^{n}+1,\ \infty)\bigcup(-\infty,\ -4^{n}-1],$$

我们立即得到 $B(x_{n+1},r_{n+1})\subset B(x_n,r_n)\quad(\forall n\in\mathbb{N})$. 也即 $\{B(x_n,r_n)\}$ 确为"闭球套"(且半径 $r_n\downarrow\frac{1}{2}$). 但是, 注意到关系式

$$[-4^n,4^n]\bigcap B(\dot{x}_n,r_n)=\varnothing\quad(\forall n\in\mathbb{N}),$$

则可导出 $\bigcap_{n=1}^{\infty}B(x_n,r_n)=\varnothing$. □

对于完备的度量空间而言, 其中有一个非常重要、在理论上很有用途的性质 (其在后面有关线性算子的开映像、闭图像原理和一致有界原理 (共鸣定理) 两章中都将要用到). 为了讲述它, 首先, 介绍如下定义:

定义 1 度量空间 (X,d)中的集 M 称为**(稀)疏的**是指其闭包 $\overline{M}$ 不含有 E 中的内点. 集 A 称为**第一纲**的, 是指其可表示为可列个稀疏集的并. 即

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\quad(M_n\text{为稀疏集},\quad\forall n\in\mathbb{N}).$$

称 B 是**第二纲**的, 是指 B 不是第一纲集.

注 疏集是涉及到集合"纲"性质的主要切入点, 在论证时, 常用其如下的等价定义: 集 M 是"疏集", 是指 E 中的任意开集 G 中必含有一开子集 G_0, 使得 G_0 中无 M 中的点.

有了上面集合"纲"的概念, 我们可以引入完备度量空间的一个特性. 特别值得注意的是下面导出此性质的证明方法, 此即为著名的"纲推理方法".

定理 3 完备的度量空间 (X,d) 必为第二纲集.

证明 反之, 如果 X 是第一纲集, 并设

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\quad(M_n\text{为稀疏集},\quad\forall n\in\mathbb{N}).\tag{1.9.7}$$

在空间 X 中任取一球 $B(x_1,r_1)$, 由于 M_1 是疏集, 则在 $B(x_1,r_1)$ 内必存在一球 $B(x_2,r_2)$, 使得其内无 M_1 中的点 (不妨假设 $r_2<\frac{r_1}{2}$). 对于球 $B(x_2,r_2)$, 由于 M_2 是疏集, 则在 $B(x_2,r_2)$ 内必存在一球 $B(x_3,r_3)$, 使得其内无 M_2 中的点 (不妨设 $r_3<\frac{r_2}{2}$). 如此下去, 我们就得到一列"闭球套" $\{B(x_n,r_n)\}$, 具有性质

$$B(x_n,r_n)\text{内无集}M_{n-1}\text{的点},\quad r_n<\frac{r_{n-1}}{2}(n\geqslant 2).\tag{1.9.8}$$

显然由此知 $r_n \to 0, (n \to \infty)$, 从而由空间 X 的完备性及前面定理 2 导出, 在 X 内存在 x_0, 使得 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$, 即

$$x_0 \in B(x_n, r_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

这样, 再次注意到式 (1.9.8) , 则知 $x_0 \notin M_n (\forall\, n \in \mathbb{N})$. 但此显然与式 (1.9.7) 矛盾! □

作为本节的最后, 我们介绍一个在线性代数和微分方程理论中常用的借助迭代法求解的定理. 为此, 我们介绍如下定义:

定义 2 设 A 为定义且取值均在 (X, d) 内的一个映像, 我们称其为**压缩的**是指存在一正数 $\alpha < 1$, 使有

$$d(Ax_1, Ax_2) \leqslant \alpha d(x_1, x_2), \quad \forall\, x_1, x_2 \in X.$$

特别地, 当 X 为赋准 (拟) 范空间时, 上式即为

$$||Ax_1 - Ax_2|| \leqslant \alpha ||x_1 - x_2||, \quad \forall\, x_1, x_2 \in X.$$

此时亦称 A 为α **阶 Lipschitz 算子.**

定理 4 设 A 为完备度量空间 (X, d) 到其自身的压缩映像, 则必存在唯一的元 $x_0 \in X$, 使得 $Ax_0 = x_0$ (此时, x_0 亦称为 A 的"**不动点**"). 同样, x_0 亦可视为算子方程 $(A - I)x = \theta$ 的唯一解 (这里 I 表示恒等映像).

证明 迭代法. 任取元 $x \in X$. 令

$$x_1 = Ax, \quad x_{n+1} = Ax_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$

则

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k}) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leqslant (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{n+k-1}) d(x, x_1) \\ &= \frac{\alpha^n (1 - \alpha^k)}{1 - \alpha} d(x, x_1) \\ &< \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x, x_1) \to 0 \quad (n, k \to \infty). \end{aligned}$$

故知 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 列. 由此从 X 的完备性, 必存在一元 $x_0 \in X$, 使有 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. 注意到 $x_{n+1} = Ax_n$ 以及从 A 为压缩映像可知 A 是连续的, 当上式两端取极限后, 立即证得

$$Ax_0 = x_0.$$

最后, 我们指出满足上面算子方程的 x_0 必是唯一的. 事实上, 若对于任意的元 $y_0 \in X$ 亦有 $Ay_0 = y_0$, 则由 A 的假设及 x_0 和 y_0 的性质则有

$$d(x_0, y_0) = d(Ax_0, Ay_0) \leqslant \alpha d(x_0, y_0).$$

注意到 $0 < \alpha < 1$, 从上立即得出 $d(x_0, y_0) = 0$, 也即有 $x_0 = y_0$. 证毕. □

§1.9 附录* 用第二纲集方法证明准范数乘的连续性

在 "巴拿赫空间引论" [1] 第 63 页, 我们曾利用集合的 "对称差", 从实变函数论的方法验证过准范数的数乘 $||\alpha \cdot x||^*$ 是 (α, x) 的二元连续函数. 这里, 我们从第二纲的性质亦可将此结果导出来.

事实上, 由于数域 $\mathbb{K}$ 完备, 故必是第二纲集, 因此, 令一列数集 $\{M_n\}$ 如下: 对于任意数 $\varepsilon > 0$,

$$M_n \triangleq \left\{\alpha\text{: 对于任意 } ||x|| \leqslant \frac{1}{n}, \text{有} ||\alpha x||^* \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

则由 $||\alpha x||^*$ 对 x 的连续性可知: $\mathbb{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. 因此, 从第二纲性质知, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 及 $\mathbb{K}$ 中一个开球 $B(\alpha_0, r_0)$, 使得

$$B(\alpha_0, r_0) \subset \overline{M_{n_0}} = M_{n_0}.$$

此即: 对于任意的 $\alpha \in B(\alpha_0, r_0)$, 一致地有下列关系式成立:

$$||\alpha x||^* \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\, ||x|| \leqslant \frac{1}{n_0}. \tag{1.9.9}$$

这样, 对于任意 $x_n \to x_0, \alpha_n \to \alpha_0 (n \to \infty)$, 注意到

$$||\alpha_n x_n - \alpha_0 x_0||^* \leqslant ||\alpha_n(x_n - x_0)||^* + ||(\alpha_n - \alpha_0)x_0||^*, \tag{1.9.10}$$

由式 (1.9.9) 和数乘的准范 (对于数) 的 "单边连续性" 定义, 立即可知: $\alpha_n x_n \to \alpha_0 x_0 (n \to \infty), \forall \alpha B(\alpha_0, r_0)$.

最后, 对于任意 $x_n \to x_0, \alpha_n^* \to \alpha_0^* (n \to \infty)$; 由不等式

$$||\alpha_n^* x_n - \alpha_0^* x_0||^* \leqslant ||(\alpha_n^* - \alpha_0^* + \alpha_0)x_n - \alpha_0 x_0||^* + ||(\alpha_0^* - \alpha_0)(x_n - x_0)||^*$$

和式 (1.9.10) 及数乘的准范 (对于元) 的 "单边连续性" 定义, 我们立即导出: $\alpha_n^* x_n \to \alpha_0^* x_0 (n \to \infty)$, 从而证得所需结论. □

§1.10 赋 (准) 范空间的可分性

首先, 我们给出在距离空间中的可分性的定义.

定义 1 距离空间 (X,d) 中的集 A 称为在集 B 中**稠密**, 是指对于 B 中任意点的任意球域 (邻域), 其内均有 A 中的点. 特别地, 如果 X 内存在一可数集 D 使其在 X 中稠密, 即 $\overline{D}=X$, 则 X 称为**可分空间**.

定义 1 亦适用于拓扑空间.

为了后面的例子的需要, 我们介绍下面一个命题:

命题 任意可分的距离空间 X, 其内任意非空子集 (空间)X_0 必亦是可分的.

证明 由 X 可分, 故必存在一可数稠密子集 $\{x_n\}$, 且由 X 为距离空间, 故可作一列开球 $\{O(x_n,\frac{1}{m})$: $n,m\in\mathbb{N}\}$, 并且有 $X=\bigcup_{n,m}O(x_n,\frac{1}{m})$. 对于任意非空的子集 $X_0\subset X$, 有 $X_0=\bigcup_{n,m}[X_0\bigcap O(x_n,\frac{1}{m})]$. 这样, 对任意的 $n,m\in\mathbb{N}$, 只要 $X_0\bigcap O(x_n,\frac{1}{m})\neq\varnothing$, 我们就可从中取出一元. 显然, 这些元的全体必至多为可数的, 可记为 $\{y_k\}$, 并且有 $\{y_k\}\subset X_0$.

我们来证明 $\{y_k\}$ 必稠于 X_0. 事实上, 对任意的 $y\in X_0\subset X$, 由 $\{x_n\}$ 的假设可知, 对于任意 $\varepsilon>0$, 必存在元 x_{n_0} 及 $m_0>\frac{2}{\varepsilon}$, 使有 $y\in O(x_{n_0},\frac{1}{m_0})$, 因此, $X_0\bigcap O(x_{n_0},\frac{1}{m_0})\neq\varnothing$, 从而由上段可知必存在 $y_{k_0}\in\{y_k\}$, 使得 $y_{k_0}\in X_0\bigcap O(x_{n_0},\frac{1}{m_0})$, 由此便可得出

$$d(y,y_{k_0})\leqslant d(y,x_{n_0})+d(x_{n_0},y_{k_0})<\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m_0}<\varepsilon.$$

也即 $\{y_k\}$ 在 X_0 中稠密, 从而 X_0 为可分空间. □

注* 上面的命题, 对于非度量空间的拓扑空间来说是未必成立的, 此可由下面有趣的反例看出.

反例* 设拓扑空间 $E=(\mathbb{R}^2,\tau)$, 其中拓扑 τ 由以下"邻域基"$\mathcal{U}$ 组成: $\mathcal{U}=\{$所有"左, 下"边为"闭", "右, 上"边为"开"的矩形$\}$. 取子空间 E_0 为第 II, IV 象限的对角线 (如图 1.15 所示). 由此拓扑空间 E 与欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 等价, 故知其是可分的.

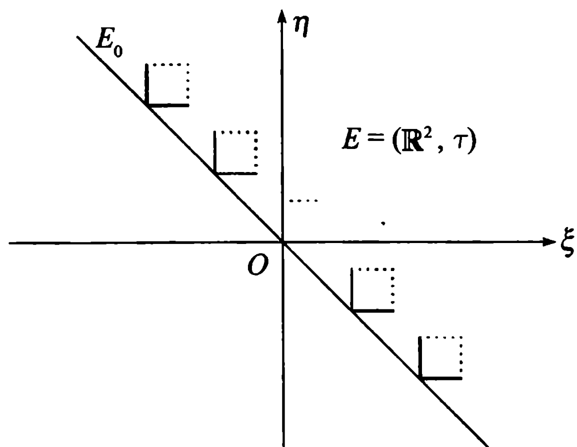


图 1.15

事实上, 由于 E 在子集 E_0 上的诱导拓扑显然为"离散拓扑"(即, 任意"单点集"均为"开集", 从而也为"闭集"). 但由 E_0 为直线, 故其有非可数个点. 由此可知, 对于 E_0 中任意可数集 D, 从离散拓扑的性质可知, D 必为闭集. 从而, $\overline{D}=D\neq E_0$, 此即 E_0 是不可分的. □

下面介绍常用的可分与不可分的赋 (准) 范空间的例子.

例 1　n 维欧氏空间 $\mathbb{K}^n$ 是可分的.

验证　此可由 "数学分析" 知识直接得到. 这里只要令

$$D \triangleq \{(r_1, r_2, \cdots, r_n): \quad r_k \in \mathbb{Q}, k = 1, 2, \cdots, n\},$$

其中 $\mathbb{Q}$ 为有理数域. 则知 D 为可数集, 且有 D 稠于 $\mathbb{K}^n$. 由此知 $\mathbb{K}^n$ 可分.　□

例 2　空间 (c) 是可分的.

验证　对于任意的实数 $\varepsilon > 0$, 任意的元 $x \in (c)$, 如果设 $x = \{\xi_k\}$ 且 $\xi_k \to \xi_0 (k \to \infty)$, 则必存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使有

$$|\xi_k - \xi_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall k > k_0. \tag{1.10.1}$$

而对上面的 ξ_0 显然存在有理数 r_0, 使得

$$|\xi_0 - r_0| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.10.2}$$

然后, 对前 k_0 个数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{k_0}$, 亦可找到相应的有理数 $r_1, r_2, \cdots, r_{k_0}$, 使有

$$|\xi_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 1, 2, \cdots, k_0). \tag{1.10.3}$$

这样, 当令元 $y = (r_1, r_2, \cdots, r_{k_0}, r_0, r_0, \cdots)$ 时, 显然有 $y \in (c)$. 并且从关系式 (1.10.1), (1.10.2) 和 (1.10.3) 导出

$$\begin{aligned}
||x - y|| &= \max\left\{\sup_{1 \leqslant k \leqslant k_0} |\xi_k - r_k|, \sup_{k > k_0} |\xi_k - r_0|\right\} \\
&\leqslant \max\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \sup_{k > k_0} (|\xi_k - \xi_0| + |\xi_0 - r_0|)\right\} \\
&< \max\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right\} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

此即 (c) 中的集合

$$D \triangleq \{(r_1, \cdots, r_{k_0}, r_0, r_0, \cdots): \; r_k \in \mathbb{Q}, k = 0, 1, \cdots, k_0; k_0 \in \mathbb{N}\}$$

是稠于 (c) 的. 最后, 注意到 D 的势

$$\overline{\overline{D}} = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \cdots,$$

即 "可列个可列", 故有 $\overline{\overline{D}} = \aleph_0$ (可列势). 此即证得 (c) 是可分的赋范空间.　□

注　从前面定义 1 后的命题, 由例 2 我们立即导出其赋范子空间 (c_{00}) 和 (c_0) 亦是可分空间.

例 3 空间 $(\ell^p)(p \geqslant 1)$ 是可分的.

验证 对于任意的实数 $\varepsilon > 0$, 任意的元 $x \in (\ell^p)$, 如果设 $x = \{\xi_k\}$, 则必存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使有

$$\Big(\sum_{k>k_0} |\xi_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.10.4}$$

此外, 存在相应的有理数 $r_1, r_2, \cdots, r_{k_0}$, 使得

$$\Big(\sum_{k=1}^{k_0} |\xi_k - r_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.10.5}$$

这样, 当令元 $y = (r_1, r_2, \cdots, r_{k_0}, 0, 0, \cdots) \in (\ell^p)$ 时, 则有 $y \in (\ell^p)$. 从关系式 (1.10.4) 和 (1.10.5), 注意到范数的"三角不等式", 便可得到

$$\|x - y\| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{k_0} |\xi_k - r_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k>k_0} |\xi_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由此导出 (ℓ^p) 中的可数集

$$D \triangleq \{(r_1, r_2, \cdots, r_{k_0}, 0, 0, \cdots): \quad r_k \in \mathbb{Q}, 1 \leqslant k \leqslant k_0, k_0 \in \mathbb{N}\}$$

是稠于 (ℓ^p) 的, 此即 (ℓ^p) 是可分的赋范空间. □

例 4 (ℓ^β) 是可分的赋准范空间 $(0 < \beta < 1)$.

验证 与例 3 的证明类似, 只要将那里的 $(\sum_k |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ 换为 $\sum_k |\xi_k|^\beta$ 则可. □

例 5 (s) 是可分的赋准范空间.

验证 对于任意的实数 $\varepsilon > 0$, 任意的元 $x \in (s)$, 如果设 $x = \{\xi_k\}$, 则必存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{k>k_0} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.10.6}$$

此外, 亦存在有理数 $r_1, r_2, \cdots, r_{k_0}$, 使得

$$|\xi_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ (1 \leqslant k \leqslant k_0). \tag{1.10.7}$$

这样, 当令元 $y = (r_1, r_2, \cdots, r_{k_0}, 0, 0, \cdots) \in (s)$ 时, 从关系式 (1.10.6) 和 (1.10.7), 便

可以导出 (注意范数的“三角不等式”)

$$\begin{aligned}||x-y|| &\leqslant \sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-r_k|}{1+|\xi_k-r_k|}+\sum_{k>k_0}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|}\\ &<\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}|\xi_k-r_k|+\frac{\varepsilon}{2}\\ &<\Big(\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}\Big)\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

由此不难证得 (s) 是可分的. □

例 6 空间 $C[a,b]$ 是可分的.

验证 由著名的 Weierstrass 定理可知: $[a,b]$ 上的任意连续函数 $x(t)$, 必可由多项式“一致逼近”(例参见文献 [1] 中 p.36~38), 也即按 $C[a,b]$ 的范数逼近. 而任一多项式在 $[a,b]$ 上又可以由相应的“有理系数”多项式来“一直逼近”. 但后者的全体

$$D=\Big\{\sum_{k=0}^{k_0}r_kt^k:\ r_k\in\mathbb{Q},\ k=1,2,\cdots,k_0;k_0\in\mathbb{N}\Big\}$$

显然是可数集, 由此立即导出 $C[a,b]$ 是可分的. □

例 7 空间 $L^p[a,b](p\geqslant 1)$ 是可分的.

验证 下面分五步来验证:

(1) 对于任意的 $x(t)\in L^p[a,b]$, 由可和函数积分的“绝对连续性”可知: 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使有

$$\int_E|x(t)|^pdt<\Big(\frac{\varepsilon}{3}\Big)^p,\quad \forall E\subset[a,b],\mu(E)<\delta. \tag{1.10.8}$$

(2) 由 $|x(t)|^p$ 可和, 故必为“概有限”可测函数, 因而 $|x(t)|$ 亦如此. 故知, 对上面的 $\delta>0$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得

$$\mu\{t\in[a,b]:\ \ |x(t)|>n_0\}<\delta. \tag{1.10.9}$$

(3) 令

$$x_{n_0}(t)=\begin{cases}x(t), & \text{当}\,|x(t)|\leqslant n_0\text{时};\\ 0, & \text{当}\,|x(t)|>n_0\text{时}.\end{cases}$$

显然有 $x_{n_0}\in L^p[a,b]$, 并且从关系式 (1.10.8) 和 (1.10.9) 立即可得

$$\begin{aligned}||x-x_{n_0}|| &=\Big(\int_a^b|x(t)-x_{n_0}(t)|^pdt\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &=\Big(\int_{\{t:\ |x(t)|>n_0\}}|x(t)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned} \tag{1.10.10}$$

(4) 由鲁金(лузин)定理, 对上述有界可侧函数 $x_{n_0}(t)$ 及 $\varepsilon > 0$, 必有连续函数 $c(t)$, 使得 $|c(t)| \leqslant n_0$ 以及 $\mu\{t: \quad c(t) \neq x_{n_0}(t)\} < (\frac{\varepsilon}{6n_0})^p$. 由此则可导出

$$\begin{aligned}||x_{n_0} - c|| &= \left(\int_a^b |x_{n_0}(t) - c(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\{t: \quad c(t) \neq x_{n_0}(t)\}} |x_{n_0}(t) - c(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant [(2n_0)^p \mu\{t: \quad c(t) \neq x_{n_0}(t)\}]^{\frac{1}{p}} \\ &< \left[(2n_0)^p \left(\frac{\varepsilon}{6n_0}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{1.10.11}$$

(5) 最后, 类似于例 6 的证明, 并注意到在 $[a,b]$ 上函数列的 “一致收敛” 必强于 L^p 空间的范数收敛 (即:“p 幂平均收敛”). 故对上述 $[a,b]$ 上的连续函数 $c(t)$, 必存在 “有理系数” 的多项式 $p(t)$, 使得

$$||c - p|| = \left(\int_a^b |c(t) - p(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.10.12}$$

这样, 综上式 (1.10.10)、(1.10.11) 及 (1.10.12), 我们立即导出

$$||x - p|| < \varepsilon_0.$$

而由 “有理系数” 的多项式全体是可数集, 故从上证得空间 $L^p[a,b]$ 亦是可分的. □

例 8 $L^\beta[a,b]$ 为可分的赋准范空间 $(0 < \beta < 1)$.

验证 与例 7 的证明类似, 仅将那里的积分 $(\int_a^b |x(t)|^p)^{\frac{1}{p}}$ 换为 $\int_a^b |x(t)|^\beta dt$ 即可. □

例 9* $S[a,b]$ 为可分的赋准范空间.

验证 我们分四步验证之:

(1) 对于任意的 $x(t) \in S[a,b]$, 注意到 $S[a,b]$ 空间由 “概有限” 可测函数组成, 故由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{t: \quad (n-1) \leqslant |x(t)| < n\} = \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\{t: \quad (n-1) \leqslant |x(t)| < n\}\right] = \mu([a,b]) < \infty$$

可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\mu\{t: \quad |x(t)| > n_0\} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.10.13}$$

(2) 令 $x_{n_0}(t)$ 如例 7, 显然 $x_{n_0}(t) \in S[a,b]$ 且从式 (1.10.13) 有

$$||x - x_{n_0}||^* = \int_{\{t: \quad |x(t)| > n_0\}} \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|} dt < \mu\{t: \quad |x(t)| > n_0\} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.10.14}$$

(3) 由鲁金定理, 存在连续函数 $c(t)$, 使得 $\mu\{t\colon c(t)\neq x_{n_0}(t)\}<\frac{\varepsilon}{3}$, 因而有

$$\|x_{n_0}-c\|^*=\int_{\{t|c(t)\neq x_{n_0}(t)\}}\frac{|x_{n_0}(t)-c(t)|}{1+|x_{n_0}(t)-c(t)|}dt<\mu\{t\colon c(t)\neq x_{n_0}(t)\}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.10.15}$$

最后, 对上面的连续函数 $c(t)$, 可找到“有理系数”多项式 $p(t)$, 使其在 $[a,b]$ 上“一致逼近”于 $c(t)$, 从而有按“$S[a,b]$ 中范数逼近”于 $c(t)$. 即, 使其满足

$$\|c-p\|^*<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.10.16}$$

这样, 从式 (1.10.14) ~ (1.10.16), 立即得到: 所有“有理系数”多项式的集合 (此为可数集) 在 $S[a,b]$ 中是稠密的, 也即 $S[a,b]$ 是可分空间. □

当然, 赋 (准) 范空间并不全是可分的, 我们可以看到下面的反例:

反例 1 空间 (ℓ^∞)(或记为 (m)) 是不可分的.

验证 在 (ℓ^∞) 中特取子集

$$A=\{\{\xi_k\}\colon\quad \xi_k\text{仅取}0\text{或}1, k\in\mathbb{N}\},$$

则对任意两元 $x_1,x_2\in A$, 如果 $x_1\neq x_2$, 当令 $x_1=\{\xi_k^{(1)}\},x_2=\{\xi_k^{(2)}\}$ 时, 必存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $\xi_{k_0}^{(1)}\neq\xi_{k_0}^{(2)}$, 而从 A 的取法, 则有 $|\xi_{k_0}^{(1)}-\xi_{k_0}^{(2)}|=1$. 由此导出

$$\|x_1-x_2\|=\sup_k|\xi_k^{(1)}-\xi_k^{(2)}|\geqslant|\xi_{k_0}^{(1)}-\xi_{k_0}^{(2)}|=1.$$

于是得知, A 中两个不同的点的距离均为 1. 从而 A 中的任意子集的闭包为其自身, 即为闭集. 特别地, A 内任意“可数子集” D 也必为闭集. 但从“实分析”中我们得知 A 的势 $\overline{\overline{A}}=2^{\aleph_0}=\aleph$ (连续势), 故必有 $\overline{D}\neq A$, 即 A 不是可分的集合. 这样, 从前面命题的逆否命题立即得知, 空间 (ℓ^∞) 不是可分的. □

反例 2 空间 $L^\infty[a,b]$ (或记为 $M[a,b]$) 是不可分的.

验证 在 $L^\infty[a,b]$ 中, 特取子集 $A\triangleq\{\chi_{[a,t]}\colon\quad a<t\leqslant b\}$ (这里 $\chi(t_1,t_2]$ 代表 $(t_1,t_2]$ 上的特征函数), 则注意到对于任意两元 $x_1,x_2\in A$, 当 $x_1\neq x_2$ 时, 设 $x_i=\chi_{[a,t_i]}(i=1,2)$, 则必有 $t_1\neq t_2$. 不妨假设 $t_1<t_2$, 则有 $\|x_1-x_2\|=\|\chi_{(t_1,t_2]}\|=1$. 这样, 类似上面的反例 1, 容易验证 $L^\infty[a,b]$ 是不可分的. □

反例 3 空间

$$\ell^{p^*}(\Gamma)\triangleq\{\{\xi_\gamma\}\colon\sum_{\gamma\in\Gamma}|\xi_\gamma|^{p^*}<\infty\}(p^*>0).$$

(注意: 以后用 p^* 时, 强调 p^* 可取 $(0,1)$ 部分. 一般来说, 凡记 p^* 时, 代表含 $(0,1)$; 凡记 β^* 时, 代表含 $\beta^*=1$.) 那么, 当 Γ 的势 $\overline{\overline{\Gamma}}>\aleph_0$ 时, $\ell^{p^*}(\Gamma)$ 为不可分的赋准范或赋范空间.

验证 特取 $\ell^{p^*}(\Gamma)$ 中的子集

$$A \triangleq \{\{\xi_\gamma\}: \xi_\gamma = 0, (\gamma \neq \delta); \xi_\gamma = 1, (\gamma = \delta), \quad \forall \delta \in \Gamma\}.$$

显然可知, 对任意的 $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, 当设 $x_1 = \{\xi_\gamma^{(1)}\}, x_2 = \{\xi_\gamma^{(2)}\}$ 时, 则有

$$||x_1 - x_2||^* = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\xi_\gamma^{(1)} - \xi_\gamma^{(2)}|^{p^*} = 2.$$

而当注意 $\overline{\overline{A}} > \aleph_0$ 时, 类似可知这里的空间 $\ell^{p^*}(\Gamma)$ 是不可分的. □

反例 4 对于任意"不可分"的赋 (准) 范空间 E, 当我们在 E 中改赋一新准范为

$$||x||^* = ||x|| + \frac{||x||}{1 + ||x||}, \quad \forall x \in E$$

时 (这里 $||\cdot||$ 为 E 中原来的 (准) 范数) , 则 $(E, ||\cdot||^*)$ 构成一个不可分的赋准范空间.

验证 首先, 上面定义的 $||\cdot||^*$ 是准范数是容易验证的. 此外, 从其定义还有关系式

$$||x|| \leqslant ||x||^* \leqslant 2||x||, \quad \forall x \in E,$$

因此, 赋 (准) 范空间 $(E, ||\cdot||)$ 与赋准范空间 $(E, ||\cdot||^*)$ 的收敛性是相同的, 因而线性同胚. 由此, 其可分性也是相同的. 所以, 从 E 按 (准) 范 $||\cdot||$ 是不可分的假设则知其新按准范数 $||\cdot||^*$ 也是不可分的. □

反例 5 所有在"半开半闭"区间 $(\alpha, \beta]$ 上的有界连续函数全体 $C_b(\alpha, \beta]$ 在上确界范数的定义下, 构成一个不可分的赋范空间.

验证 在 $C_b(\alpha, \beta]$ 中特取子集 A 如下:

$$A \triangleq \left\{ y(t) \in C_b(\alpha, \beta]: \quad y(t)\text{是在点列}\left\{\alpha + \frac{\beta - \alpha}{n}\right\}\text{上仅取0或1}, \right.$$
$$\left. \text{且在此点列上取值相同的元中仅取一个} \right\}.$$

例如,

$$\begin{aligned} A = & \left\{ y(t) \in C_b(\alpha, \beta]: y(t) \right. \\ & = \begin{cases} \theta_n, & \text{当} t = \alpha + \dfrac{\beta - \alpha}{n}\text{时}, \\ \lambda\theta_n + (1-\lambda)\theta_{n+1}, & \text{当} t = \alpha + \left(\dfrac{\lambda}{n} + \dfrac{1-\lambda}{n+1}\right)(\beta - \alpha), (\lambda \in (0,1)\text{时}; \end{cases} \\ & \left. \text{其中}(\theta_n = 0, 1; n \in \mathbb{N}) \right\}. \end{aligned}$$

也即 $y(t)$ 的图像的其余部分为连接其中相邻两点 $(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}, \theta_n)$ 和 $(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n+1}, \theta_{n+1})(n \in \mathbb{N})$ 的线段组成.

对任意的 $y_1, y_2 \in A$, 当 $y_1 \neq y_2$ 时, 必存在一点 $\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n_0}$ 使其取值不同, 因此有

$$\begin{aligned}||y_1 - y_2|| &= \sup_{t\in(\alpha,\beta]} |y_1(t) - y_2(t)| \\ &\geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|y_1\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}\right) - y_2\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right| \\ &= 1,\end{aligned}$$

并且有 $\overline{\overline{A}} > \aleph_0$. 由此, 类似上面的反例可知空间 $C_b(\alpha, \beta]$ 是不可分的. □

注 1　类似地, 我们不难证明, 空间 $C_b[\alpha,\beta), C_b(\alpha,\beta), C_b(-\infty,\beta], C_b[\alpha,+\infty)$ 以及 $C_b(-\infty,+\infty)$ 均为不可分的空间.

注 2**　其实, 存在如下更深刻的定理:

设 Ω 是"度量"空间, 则空间 $C(\Omega)$ 是"可分"的 $\Longleftrightarrow$ Ω 是"紧"的.

§1.11　赋 (准) 范空间的可数基 (Schauder 基)

下面介绍与赋范线性空间之可分性有密切关系的概念 ——"可数基".

定义 1　设 E 为赋 (准) 范空间, $\{e_n\} \subset E$, 如果对任意的元 $x \in E$, 其均可由 $\{e_n\}$ 唯一表为

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k,$$

则称 $\{e_n\}$ 为 E 的一组**可数基 (Schauder 基)**.

注 1　上面表达式是指:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \to x \quad (n \to \infty);$$

也即有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k - x\right\|^* \to 0 \quad (n \to \infty).$$

注 2　由上面表达式的唯一性假设可知, 上述 $\{e_n\}$ 必是线性无关的 (也即, 此集的任意有限个元均是线性无关的).

注 3　由上面注 1, 从赋准范空间中"加法"和"数乘"运算均是连续的, 容易推出: 具有"可数基"的赋准范空间必是可分的.

注 4*****　反过来, 可分的赋范空间是否必具有可数基却是个十分困难的数学难题. 自从 1932 年 Banach 提出:"是否每个可分的 Banach 空间都具有 Schauder 基?" 几十年来, 人们对许多熟知的可分 Banach 空间几乎都找到了可数基; 然而, 却又不能

对上述问题给出一个肯定或否定的回答. 四十多年之后, 此问题终于被瑞典的青年数学家 Per Enflo 于 1973 年 (当年他仅 28 岁) 解决. 他在 (c_0) 空间中构造了一个闭线性子空间, 以反例形式对此长期悬而未决的问题给出了否定的回答. 1975 年, 英国青年数学家 A. M. Davie (当年他仅 22 岁) 则利用随机变量和 Abel 群为工具, 简短地在 (c_0) 和 $(\ell^p)(p > 2)$ 空间中构造了它们的闭线性子空间, 使其不具 Schauder 基. 由此可见: "Banach 空间的具有 Schauder 基的性质是不能"遗传"的, 也即: 具有可数基的 Banach 空间的任意无穷维的闭线性子空间未必仍具有 Schauder 基".

下面给出有关可数基的一些例子:

例 1 $\mathbb{K}^n$ 显然以 $\{e_k\colon 1 \leqslant k \leqslant n\}$ (其中 $e_k = (0,\cdots,\underset{(k)}{1},0,\cdots,0)$) 为可数基.

例 2 元列 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ (其中 $e_k = (0,\cdots,\underset{(k)}{1},0,\cdots)(k \in \mathbb{N})$), 必为空间 $(c_{00}),(c_0)$, $(\ell^p)(p \geqslant 1),(\ell^\beta)(0 < \beta < 1)$ 的可数基.

验证 (1) 如果 $E=(c_{00})$, 则对于任意 $x \in (c_{00})$, 当设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,0,0,\cdots)$ 时, 可取元 $y = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,0,0,\cdots)$, 则 $\|y - x\| = \|\theta\| = 0$. 显然, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为空间 (c_{00}) 的一组基.

(2) 如果 $E = (c_0)$, 对任意元 $x \in (c_0)$, 当设 $x = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$ 时, 则有 $\xi_n \to 0(n \to \infty)$. 由此, 从 $\sum_{k=1}^n \xi_k e_k = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots)$ 可得

$$
\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k - x\Big\|_{(c_0)} &= \|(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots) - (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\|_{(c_0)}\\
&= \|(0,\cdots,0,\xi_{n+1},\cdots)\|_{(c_0)}\\
&= \sup_{k \geqslant n+1}|\xi_k| \to 0 \quad (n \to 0),
\end{aligned}
$$

因此 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为空间 (c_0) 的一个基.

(3) 如果 $E = (\ell^p)$ (或 (ℓ^β)), 则对于任意的元 $x \in (\ell^p)$ (或 (ℓ^β)), 当设 $x = \{\xi_k\}$ 时, 类似上面的 (2) 则有

$$
\Big\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k - x\Big\|_{p(\text{或}\beta)} = \|(0,\cdots,0,\xi_{n+1},\cdots)\|_{p(\text{或}\beta)}
$$

$$
= \begin{cases} \Big(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, & \text{当} x \in (\ell^p);\\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^\beta, & \text{当} x \in (\ell^\beta). \end{cases}
$$

由此, 当注意到空间 (ℓ^p) 及 (ℓ^β) 的定义, 从数学分析知识则有

$$
\Big(\sum_{k>n}|\xi_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad \text{及} \quad \sum_{k>n}|\xi_k|^\beta \to 0 \quad (n \to \infty).
$$

也即得到

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k - x\right\|_{p(\text{或}\beta)} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

因此 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 亦为空间 (ℓ^p) 和 (ℓ^β) 的可数基. □

例 3 空间 (c) 以 $\{e_0, e_n\}_{k=1}^{\infty}$ 为可数基 (其中 $e_0=(1,1,\cdots)$).

验证 对于任意 $x\in(c)$, 如果设 $x=\{\xi_k\}$, 则由空间的定义有 $\xi_k\to\xi_0(k\to\infty)$ 对于某 $\xi_0\in\mathbb{K}$ 成立. 由此从上面 (2) 可得

$$x-\xi_0 e_0=\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k-\xi_0)e_k.$$

也即有

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k' e_k,$$

(这里 $\xi_0'=\xi_0$, $\xi_k'=\xi_k-\xi_0\,(k\geqslant 1)$). 因此, $\{e_0,e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为空间 (c) 的可数基. □

注 值得注意的是, 不少人往往以为空间 (c) 仍以 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为可数基, 这是不对的. 因为, 对于任意的元 $x\in(c)$, 当设 $x=\{\xi_k\}$ 且 $\xi_k\to\xi_0\neq 0$ 时, 显然有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k - x\right\| &= \|(0,\cdots,0,\xi_{k+1},\xi_{k+2},\cdots)\|\\ &=\sup_{k>n}|\xi_k| \nrightarrow 0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

例 4 * 连续函数空间 $C[0,1]$ 是有可数基的.

验证 类似于"数学分析"中定积分的近似求和思想 (即"以直代曲"和"以有限代无限"的思想), 当我们将"连续函数" $x(t)$ 用等分自变量后所引的"折线"来逼近时, 这种逼近是"一致收敛"的, 也即按范数收敛. 注意到当用一条线段构成的折线 (即联接两个端点 $x(0)$ 和 $x(1)$ 的线段) 来逼近曲线 $x(t)$ 时, 此折线的方程为

$$x(0)(1-t)+x(1)t,$$

因此, 我们获得了此可数基中的头两个元

$$e_1(t)=(1-t),\quad e_2(t)=t.$$

如图 1.16 右边, 在自变量区间中点 $\frac{1}{2}$ 与曲线 $x(t)$ 相交处, 取两条线段所构成折线来逼近曲线 $x(t)$ 时, 则此条折线的方程为

$$x(0)(1-t)+x(1)t+\alpha_{00}d_{00}(t),$$

其中 $d_{00}(t)$ 是其图像为以 $[0,1]$ 区间为底, 高为 1 的等腰三角形的两个腰构成的折线的函数; 而 $\alpha_{00}=x(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(x(0)+x(1))$, 即是以 $x(t)$ 的图像上对应于 $t=\frac{1}{2}$ 的点到前面一条折线的竖直 (有向) 距离. 由此我们获得了可数基的第三个元:

$$e_3(t)=d_{00}(t).$$

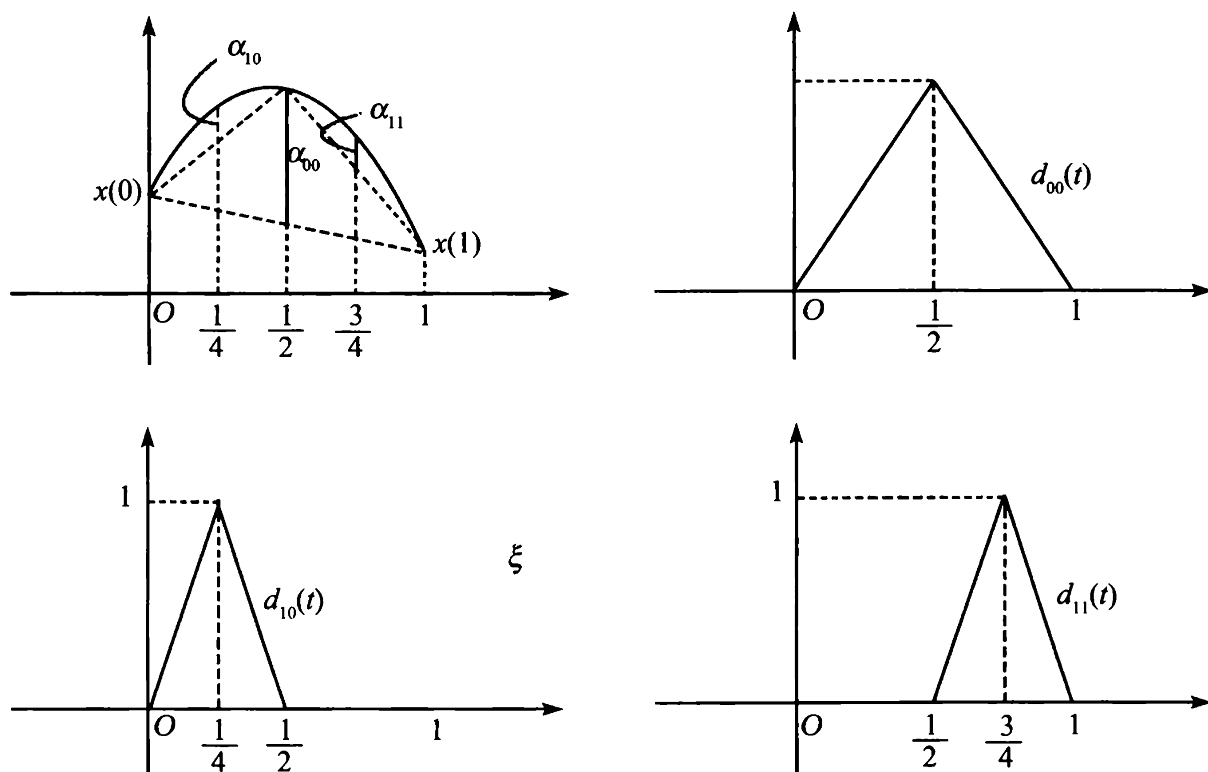


图 1.16

然后, 我们用自变量区间的四等分点对应的 $x(t)$ 的图像上的 4 个点, 作相互联接的 4 条线段, 构成折线来逼近曲线 $x(t)$. 此时, 折线的方程为

$$x(0)(1-t)+x(1)t+\alpha_{00}d_{00}(t)+\alpha_{10}d_{10}(t)+\alpha_{11}d_{11}(t),$$

这里, α_{10} 和 α_{11} 是以 $x(t)$ 的图像上对应于 $\frac{1}{4}$ 及 $\frac{3}{4}$ 的点到上面前一条折线的竖直 (有向) 距离; 而 d_{10} 和 d_{11} 是其图像分别为以 $[0,\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2},1]$ 区间为底、高为 1 的等腰三角形的两个腰构成的折线以及其余部分取 0 的函数. 如此, 我们得到了此可数基中的第四、五个元:

$$e_4(t)=d_{10}(t),\quad e_5(t)=d_{11}(t).$$

如此做下去, 一般说来, 其下面的基元素为将区间 $[0,1]$ 分为 2^n 等分后, 相应的 $d_{nk}(t)(n=0,1,2,\cdots;k=0,1,2,\cdots,2^n-1)$, 即为其图像以 $[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]$ 区间为底、高为 1 的等腰三角形的两个腰构成的折线且其余部分取 0 的函数. 由此不难看出, 上面所得到的元列 $\{e_k(t)\}$ 即为空间 $C[0,1]$ 的可数基. □

例 5* 空间 $L^p[-\pi,\pi]\,(p\geqslant 1)$ 以三角函数列

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos(2t),\ \sin(2t),\cdots,\cos(nt),\ \sin(nt),\cdots$$

为其可数基.

验证 从前面可分性的论述中可知, $L^p[-\pi,\pi]$ 中的元 $x(t)$ 均可以由 $[-\pi,\pi]$ 上的三角多项式来“按范逼近”(类似于 §1.10 中例 7). 即, 对于任意 $\varepsilon>0$, 必有三角多项式 y_Δ, 使得

$$||y_\Delta - x|| < \varepsilon. \tag{1.11.1}$$

又设 $x(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的部分和为 $S_n(x)$. 从 Fourier 展开性质有

$$S_n(y_\Delta - x) = S_n(y_\Delta) - S_n(x), \tag{1.11.2}$$

从而知对足够大的 n, 此时有 $S_n(y_\Delta)=y_\Delta$, 从式 (1.11.2), 则有

$$\begin{aligned} ||S_n(x)-x|| &\leqslant ||S_n(x)-y_\Delta|| + ||y_\Delta - x|| \\ &= ||S_n(x)-S_n(y_\Delta)|| + ||y_\Delta - x|| \\ &= ||S_n(x-y_\Delta)|| + ||y_\Delta - x||. \end{aligned} \tag{1.11.3}$$

注意到 L^p 中三角级数的 M. Riesz 定理 (注意此人为熟悉的 F. Riesz 的弟弟, 可参见文献 [5] 中 §14 与 §20), 可知

$$||S_n(y_\Delta - x)|| \leqslant \gamma_p ||y_\Delta - x||, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

(这里的 γ_p 仅依赖于空间 L^p 的数 p). 结合式 (1.11.1) 及 (1.11.3), 我们立即可得 $||S_n(y_\Delta - x)|| < (1+\gamma_p)\varepsilon$, 从而 $x(t)$ 的 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)\to x (n\to\infty)$. □

注 从前面定义 1 后面的注 3 之逆否命题立即得知: 任意不可分的赋 (准) 范空间均是没有可数基的, 故空间 $(\ell^\infty), L^\infty[a,b], \ell^{p^*}(\Gamma)(p^*>0)(\Gamma$ 为“非可数”指标集) 等均是没有可数基的.

§1.12 商空间与积空间

在本节中, 我们来介绍由已知的赋范线性空间产生新的赋范线性空间的方法, 以及由赋“拟范”线性空间来产生新的赋“范”线性空间的方法. 我们将会看到这种做法在讨论空间的性质方面起着重要的作用.

1.12.1 商空间

我们先给出下面的定义：

定义 1 设 E 为线性空间, M 为 E 中的线性子空间. 称元 $x_1, x_2 \in E$ 对于子空间 M**等价**, 是指有 $x_1 - x_2 \in M$, 记为 $x_1 \sim x_2(M)$.

定义 2 设 E 和 M 同上, 如果记 $\widetilde{x} \triangleq \{y:\quad y \sim x(M)\}$($\widetilde{x}$亦可记为$[x]$), 则称 $\widetilde{x}$ 为 x(关于 M) 的**等价类**.

在这些等价类的集合中, 可以定义加法和数乘如下：

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{(x+y)}, \quad \alpha\widetilde{x} = \widetilde{(\alpha x)} \quad (\forall\, x, y \in E, \alpha \in \mathbb{K}),$$

则这些等价类的全体亦成为线性空间, 称为 E 以 M 为"模"的**商空间**, 记为 E/M.

注 称映像 φ: $x \mapsto \widetilde{x}$ 为 E 到 E/M 的"典则映射". 此外, 值得注意的是"商元" $\widetilde{x}$ 对于商空间 E/M 来说是一个元, 而对于原空间 E 而言却是一个集合. 易见

$$\widetilde{x} = \{x + y:\quad y \in M\}, \quad \widetilde{\theta} = M$$

(其中 x 为 $\widetilde{x}$ 中任意一个元).

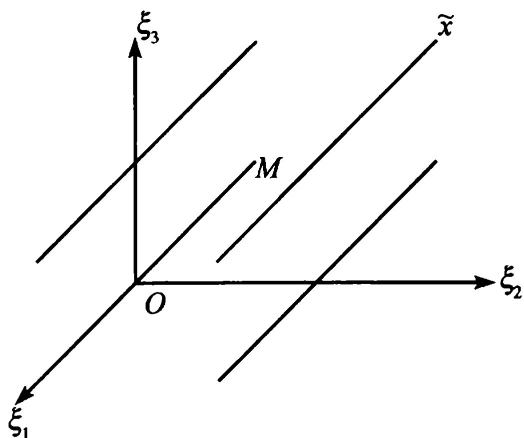


图 1.17

例 在空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 令

$$M = \{\ (\xi_1, 0, 0):\ \xi_1 \in \mathbb{R}\},$$

则商空间 $\mathbb{R}^3/M$ 中的元为所有与 ξ_1 轴平行的"直线"(如图 1.17 所示).

下面的定理显示出线性空间的代数直和与商空间的关系：

定理 1 若 E_1 和 E_2 为线性空间, 且 $E_1 \bigcap E_2 = \{\theta\}$, $E = E_1 \dot{+} E_2$ (代数直和), 则 E/E_1 与 E_2 线性同构.

(证明略, 可见于线性代数.) □

定理 2 设 E 为一赋"拟"(准) 范空间, $E_0 \subset E$ 为其闭线性子空间. 在商空间 E/E_0 中定义

$$||\widetilde{x}|| = \inf_{x \in \widetilde{x}} ||x||^{\triangle} \quad (\forall\, \widetilde{x} \in E/E_0), \tag{1.12.1}$$

则其必为一 (准) 范数, 从而 E/E_0 成为赋 (准) 范空间.

证明 (1) 先验证 (准) 范定义中的 (ii), 即"三角不等式". 对任意的两元

$\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in E/E_0$, 由式 (1.12.1) 可知,

$$\begin{aligned}||\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2||=||(\widetilde{x_1+x_2})|| &= \inf_{x\in(\widetilde{x_1+x_2})}||x||^{\triangle}\\ &=\inf_{y\in E_0}||(x_1+x_2)+y||^{\triangle}\leqslant||x_1+x_2||^{\triangle}\\ &\leqslant||x_1||^{\triangle}+||x_2||^{\triangle},\quad \forall x_1\in\widetilde{x}_1, x_2\in\widetilde{x}_2.\end{aligned}$$

又由式 (1.12.1) 的假设, 对 $x_1 \in \widetilde{x}_1$ 取下确界, 则有

$$||\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2||\leqslant||\widetilde{x}_1||+||x_2||^{\triangle},\quad \forall x_2\in\widetilde{x}_2.$$

而再对 $x_2 \in \widetilde{x}_2$ 取下确界, 再次用到式 (1.12.1), 则可得到

$$||\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2||\leqslant||\widetilde{x}_1||+||\widetilde{x}_2||.$$

(2) 下面我们来验证 (准) 范定义中的 (iii):

首先, (准) 范定义中 (iii) (a): $||-\widetilde{x}|| = ||\widetilde{x}||$ 是显然的.

其次, 为验证 (准) 范定义的 (iii)(b) , 设任意的 $\widetilde{x} \in E/E_0, \alpha_n \to 0 \quad (n \to \infty)$. 取定 $x_0 \in \widetilde{x}$, 则由

$$||\alpha_n\widetilde{x}||=||(\widetilde{\alpha_n x})||=\inf_{x\in\widetilde{x}}||\alpha_n x||^{\triangle}\leqslant||\alpha_n x_0||^{\triangle},$$

注意到 E 为拟 (准) 范空间, 故由拟 (准) 范定义显然有 $||\alpha_n x_0||^{\triangle} \to 0 \ \ (\alpha_n \to 0)$, 因此, 立即得到

$$||\alpha_n\widetilde{x}||\to 0\ \ (\alpha_n\to 0).$$

最后, 为了验证 (准) 范数的 (iii)(c), 设任意 $\alpha \in \mathbb{K}, \{\widetilde{x}_n\} \in E/E_0$ 且有 $\widetilde{x}_n \to 0 \ \ (n \to \infty)$, 则由式 (1.12.1), 可以选出元列 $x_n^\circ \in E$, 使有 $x_n^\circ \in \widetilde{x}_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ 且 $||x_n^\circ||^{\triangle} \to 0 (n \to \infty)$. 由于 E 的拟 (准) 范性质, 我们有 $||\alpha x_n^\circ||^{\triangle} \to 0 \ \ (n \to \infty)$, 因此得到所需结果

$$||\alpha\widetilde{x}_n||\leqslant||\alpha x_n^\circ||^{\triangle}\to 0\quad (n\to\infty).$$

(3) 我们来验证 (准) 范定义 (i). 首先, 从式 (1.12.1) 的定义显然有 $||\widetilde{x}|| \geqslant 0$, 并且有

$$||\widetilde{\theta}||=\inf_{y\in E_0}||y||^{\triangle}\leqslant||\theta||^{\triangle}=0.$$

另一方面, 当 $||\widetilde{x}_0|| = 0$ 时, 从式 (1.12.1) 即有 $\inf_{x_0\in\widetilde{x}_0}||x_0||^{\triangle} = 0$. 因而对任意 $n \in \mathbb{N}$, 必存在元 $x_0^{(n)} \in \widetilde{x}_0$, 使有

$$0\leqslant||x_0^{(n)}||^{\triangle}<\inf_{x_0\in\widetilde{x}_0}||x_0||^{\triangle}+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\ \ (\forall n\in\mathbb{N}).$$

此即：$x_0^{(n)} \to \theta(n \to \infty)$.

注意到 $\{x_0^{(n)}\} \subset \widetilde{x}_0$, 故当取定 $x_0 \in \widetilde{x}_0$ 时, 由商元的定义, 对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$x_0^{(n)} = x_0 + y_n \quad (y_n \in E_0).$$

故从上式可得到 $x_0 + y_n \to \theta$, 即 $y_n \to -x_0 \ \ (n \to \infty)$. 而从 E 是闭的线性子空间的假设, 有 $-x_0 \in E_0$, 故 $x_0 \in E_0$. 再次由商元的定义立即导出 $\widetilde{x} = \widetilde{\theta}$.

综上 (1) ~ (3), 即知式 (1.12.1) 定义了商空间的一个 (准) 范数, 从而 E/E_0 是一个赋 (准) 范空间. □

注 上面的定理 2 显示了将一个赋"拟"(准) 范空间变成一个赋 (准) 范空间的方法, 从而使得在此新的空间中极限能保证其唯一性.

推理 如果 E 为赋拟 (准) 范空间, 令 $E_0 = \{x \in E\colon \|x\|^{\triangle} = 0\}$, 则商空间 E/E_0 在 (准) 范数

$$\|\widetilde{x}\| \triangleq \inf_{x \in \widetilde{x}} \|x\|^{\triangle}, \quad \forall x \in E/E_0 \tag{1.12.2}$$

下必为赋 (准) 范空间, 且有

$$\|\widetilde{x}\| = \|x\|^{\triangle}, \quad \forall x \in \widetilde{x}.$$

证明 (1) E_0 为 E 中的线性子空间.

事实上, 对任意的 $x_1, x_2 \in E_0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, 由 E_0 的定义可得

$$0 \leqslant \|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\|^{\triangle} \leqslant \|\alpha_1 x_1\|^{\triangle} + \|\alpha_2 x_2\|^{\triangle} = 0.$$

注意, 当 E 为赋拟准范空间时, 由拟准范关于"数乘"的单边连续性可知若 $\|x\|^{\triangle} = 0$, 必有 $\|\alpha x\|^{\triangle} = 0 \ \ (\forall x \in \mathbb{K})$. 此即导出 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E_0$.

(2) E_0 是闭的.

事实上, 若 $\{x_n\} \subset E_0$, 且 $x_n \to x_0(n \to \infty)$, 则同样由 E_0 定义可得

$$0 \leqslant \|x_0\|^{\triangle} \leqslant \|x_0 - x_n\|^{\triangle} + \|x_n\|^{\triangle} \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

故有 $x_0 \in E_0$.

(3) 由定理 2 及上面 (1) 和 (2) 可知：商空间 E/E_0 在式 (1.12.2) 定义的 (准) 范数下构成一个赋 (准) 范空间.

(4) 对于任意的元 $x_1, x_2 \in \widetilde{x}$, 必有 $\|x_1\|^{\triangle} = \|x_2\|^{\triangle}$.

事实上, 注意到 $x_1 - x_2 \in E_0$, 故 $\|x_1 - x_2\|^{\triangle} = 0$, 从而

$$\|x_1\|^{\triangle} \leqslant \|x_1 - x_2\|^{\triangle} + \|x_2\|^{\triangle} = \|x_2\|^{\triangle}.$$

同理可知 $\|x_2\|^{\triangle} \leqslant \|x_1\|^{\triangle}$. 此即说明了 $\widetilde{x}$ 中任意元 x 的 (准) 范数 $\|x\|^{\triangle}$ 均是相同的. 结合 (1.12.2) 式, 我们就得到了

$$\|\widetilde{x}\| = \|x\|^{\triangle} \quad (\forall\, x \in \widetilde{x}). \qquad \square$$

注 1 上面证明中的 (2) 亦可由点集拓扑的方法得出. 事实上, 由 φ: $x \mapsto \|x\|^{\triangle}$ 是空间 E 到数域 $\mathbb{K}$ 的连续映像, $\mathbb{K}$ 中的闭集 $\{0\}$ "原像" $\varphi^{-1}(\{0\}) = E_0$ 必为 E 中的闭集.

注 2 上面推理的思路其实在前面的空间的定义中已经用过. 例如, 在赋范空间 $L^p[a,b](p \geqslant 1), L^\infty[a,b]$ 以及赋准范空间 $L^\beta[a,b](0<\beta<1), S[a,b]$ 中, 我们均已约定两个"几乎处处"相等的函数视为同一元, 此即将满足

$$\|x\| = 0 \quad (\Leftrightarrow x(t) = 0\,(\text{概})\, t \in [a,b])$$

的所有元均视为"零元". 也即, 如上面的推理一样已将此空间定义为某一个商空间 E/E_0, 而那里的 E_0 (与推理的假设中一样), 即由"拟 (准) 范为零的"所有元的全体所组成.

有了上面商空间的定义, 我们自然可以想到: "对于赋拟 (准) 范空间 E, 如果 E_0 为其一"闭"线性子空间, 那么, 对于某一性质 P, E 具有此性质 P 与 E_0 和商空间 E/E_0 均具有性质 P 之间有否联系?" 这就成了一个有趣的研究专题, 此被称为"三体问题". 下面仅就"完备性"来讨论三体问题, 我们可以得到以下肯定的回答:

定理 3 如果 E 为赋拟准范空间, E_0 为 E 的"闭"线性子空间, 则

空间 E 完备 $\Longleftrightarrow$ 子空间 E_0 和商空间 E/E_0 均完备.

证明 "$\Rightarrow$" 设 E 为完备的拟准范空间, 则由 E_0 的"闭"性, 立即可知 E_0 也是完备空间. 下面验证商空间 E/E_0 的完备性:

对任意的 Cauchy 列 $\{\widetilde{x}_n\} \subset E/E_0$, 我们仍用 §1.9 中定理 1 和定理 2 用过的"数学分析"的方法, 从 Cauchy 列的性质, 必存在子列 $\{\widetilde{x}_{n_k}\} \subset \{\widetilde{x}_n\}$, 使有

$$\|\widetilde{x}_{n_{k+1}} - \widetilde{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \quad (\forall\, k \in \mathbb{N}).$$

注意到商元准范数的定义, 从上可知: 存在元 $x_{n_k} \in \widetilde{x}_{n_k}, x_{n_{k+1}} \in \widetilde{x}_{n_{k+1}}$ 以及 $y_k \in E_0$, 使得

$$\|(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) + y_k\|^{\triangle} < \frac{1}{2^k} \quad (\forall\, k \in \mathbb{N}).$$

因而有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) + y_k\|^{\triangle} < \infty.$$

于是由 §1.9 的定理 1, 我们从空间 E 完备的假设立即得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})+y_k]\in E.$$

即存在 $z_0\in E$, 使得

$$\sum_{k=1}^{m}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k}+y_k)\to z_0\quad(m\to\infty).$$

也即

$$x_{n_{m+1}}-x_{n_1}+\sum_{k=1}^{m}y_k\to z_0\quad(m\to\infty).$$

再次注意到商元准范数的定义, 并令 $x_0=z_0+x_{n_1}$, 从上则可得到 $\widetilde{x}_{n_{m+1}}\to\widetilde{x}_0(m\to\infty)$. 最后, 再次注意到"数学分析"知识, 从 $\{\widetilde{x}_{n_{m+1}}\}$ 为 Cauchy 列 $\{\widetilde{x}_n\}$ 的子列, 从上立即得出 $\widetilde{x}_n\to\widetilde{x}_0\,(n\to\infty)$. 也即商空间 E/E_0 的完备性得证.

"$\Leftarrow$" 设 E_0 和 E/E_0 均是完备空间, 下面证明 E 必完备: 事实上, 对于任意的 Cauchy 列 $\{x_n\}\subset E$, 由商元准范的定义有

$$\|\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_m\|\leqslant\|x_n-x_m\|^{\triangle}\to 0\quad(n,m\to\infty).$$

此即 $\{\widetilde{x}_n\}$ 为商空间 E/E_0 中的 Cauchy 列. 因而, 由假设知: 存在元 $\widetilde{x}_0\in E/E_0$, 使得

$$\widetilde{x}_n\to\widetilde{x}_0\quad(n\to\infty).\tag{1.12.3}$$

由此可以得到

$$\begin{aligned}d(x_n,\widetilde{x}_0)&\triangleq\inf_{y\in E_0}\|x_n-(x_0+y)\|^{\triangle}\\&=\inf_{y\in E_0}\|(x_n-x_0)-y\|^{\triangle}\\&=\inf_{y\in E_0}\|(x_n-x_0)+y\|^{\triangle}\\&\triangleq\|(\widetilde{x_n-x_0})\|\\&\triangleq\|\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_0\|\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}\tag{1.12.4}$$

当注意到点与集合间的"距离"的定义, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 必存在 $y_n\in E_0$, 使得

$$\|x_n-(x_0+y_n)\|^{\triangle}<d(x_n,\widetilde{x}_0)+\frac{1}{n}.\tag{1.12.5}$$

由此, 从式 (1.12.5) 和 (1.12.4) 则可导得

$$\begin{aligned}||y_n - y_m||^{\triangle} &\leqslant ||x_m - (x_0 + y_m)||^{\triangle} + ||x_n - x_m||^{\triangle} \\ &\quad + || (x_0 + y_n) - x_n||^{\triangle} \\ &\to 0 \quad (n, m \to \infty). \end{aligned} \tag{1.12.6}$$

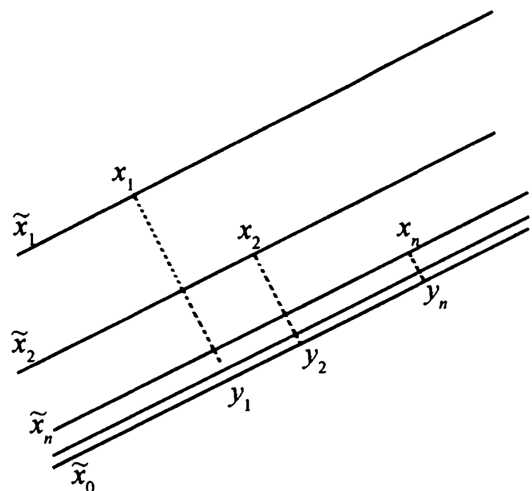


图 1.18

也即 $\{y_n\}$ 为子空间 E_0 的 Cauchy 列, 故从 E_0 的完备性知：存在 $y_0 \in E_0$, 使得 $y_n \to y_0 (n \to \infty)$(如图 1.18 所示).

最后, 从式 (1.12.5) 和 (1.12.6) 以及 y_0 的取法立即导出

$$\begin{aligned}||x_n - (x_0 + y_0)||^{\triangle} &\leqslant ||x_n - (x_0 + y_n)||^{\triangle} \\ &\quad + ||y_n - y_m||^{\triangle} + ||y_m - y_0||^{\triangle} \\ &\to 0 \quad (n, m \to \infty).\end{aligned}$$

即 $x_n \to x_0 + y_0 \quad (n \to \infty)$, 因而导出 E 是完备的. □

1.12.2　积空间

下面介绍另一种从已知赋 (准) 范空间产生新的赋 (准) 范空间的方法, 即作“积空间”的方法.

定义 3　设 E_1 和 E_2 均为赋 (准) 线性空间, 定义其**积空间**为

$$E_1 \times E_2 = \{ (x_1, x_2): \quad x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\},$$

其中的加法与数乘运算定义为

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),$$

范数定义为

$$||(x_1, x_2)|| = ||x_1|| + ||x_2||,$$

这里, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$;　$\alpha \in \mathbb{K}$.

注 1　上面关于“积空间”的定义可以推广到任意有限个空间的情形. 至于其上范数仍按上述“自然方式”来定义, 而范数的定义形式可以各不相同. 但是我们必须要求积空间仅由使其范数有意义的元组成.

注 2* 用拓扑向量空间的知识可以证明, 对于"无穷个"赋 β 范 $(0<\beta<1)$ 或者赋范线性空间所成的积空间, 其乘积拓扑 (即乘积空间中的元的收敛等价于按坐标收敛) 是不能赋以任意 β 范数或者范数的. 当然, 如果空间是"可列无穷"个时, 则可以空间 (s) 中准范的形式来定义其"准范"如下:

$$||(x_n)||^* \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{||x_n||}{1+||x_n||}, \quad \forall (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n$$

(其中, 积空间中的元 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 满足 $x_n \in E_n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$).

§1.13 赋 (准) 范空间的等价与完备化

基于赋 (准) 范线性空间的完备性在理论及应用上所起的重要作用, 我们来讨论赋 (准) 范空间的完备化问题. 为此, 先介绍赋 (准) 范线性空间之间等价的概念.

1.13.1 赋 (准) 范空间的等价

因为赋 (准) 范空间不仅有"线性结构", 而且有"距离结构", 因此, 两个赋 (准) 范空间的"等价"应当是其空间的"线性结构"及"距离结构"均相同. 下面给出详细的定义:

定义 1 两个赋 (准) 范线性空间 E 和 E_1 被称为是**等价**的, 如果存在 E 到 E_1 上的"线性同构"映射 V, 使得

$$||V(x)|| = ||x||, \ \ \forall x \in E$$

(即 V 还是"保范"的), 此时记为 $E \cong E_1$. 满足上面条件的映射 V 称为**等价映像** .

注 1 应当注意的是, 上述的等价映像 V 一定是同胚映像. 然而, 同胚映像未必具有"保范"性, 因此, 未必是等价映射.

注 2 上面的"保范"线性映像, 我们也称为"等距"线性映像. 这是因为由 V 的线性以及保范性立即可得

$$\begin{aligned} d_1(Vx, Vy) &= ||Vx - Vy||_1 = ||V(x-y)||_1 \\ &= ||x-y|| = d(x,y), \ \ \forall x, y \in E \end{aligned}$$

(这里, $d_1, ||\cdot||_1$ 与 $d, ||\cdot||$ 分别表示赋 (准) 范空间 E_1 与 E 的距离和 (准) 范数.)

例 1 设空间 $E=(c_{00})$ [或者为空间 $(c_0), (c), (\ell^p)(p \geqslant 1), (\ell^\beta)(0<\beta<1)$ 及 (ℓ^∞)], 那么, 当令 E 到其自身的映像 V 为

$$V:(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \ \ (\forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in E)$$

时, 容易验证: V 必为 E 到"真"线性子空间 $V(E)$ 上的等价映像.

注 3　上面的例子给出了与集合论类似的一个性质, 即:"无穷维"的赋 (准) 范空间是可以与其某一"真"线性子空间等价的. 同样地, 与集合论类似, 我们可以证明: 对于任意"有限维"赋 (准) 范空间而言, 上述情形是不会出现的.

例 2　空间 (ℓ^2) 与空间 $L^2[a,b]$ 等价.

验证　设 $e_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 是空间 $L^2[a,b]$ 的完全规范正交组, 则对每一个 $x(t)\in L^2[a,b], x(t)$ 可唯一表为

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n(t)$$

(其中 a_n 为 $x(t)$ 对 e_n 的 Fourier 系数 $(n\in\mathbb{N})$). 从 Riesz-Fischer 定理[4](可参看后面的 §6.2), 我们又有

$$||x||=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

因此, 当令 V 为

$$V: x(t)\mapsto(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$$

时, V 为由 $L^2[a,b]$ 到 (ℓ^2) 的线性同构映像, 且是保范的, 从而其为一等价映像. 这表明空间 $L^2[a,b]$ 与 (ℓ^2) 是等价的.

注 4　从上面例 2 可以看到, 一个由"函数"组成的赋范空间是可以与一个由"数列"组成的赋范空间等价的. 而更有意义的是, 该结论还有着特殊的物理意义. 大家都知道, 对于现代人来说, 光具有"波动性"和"粒子性"已成了科普常识, 但是在 20 世纪的 20~30 年代, 此却是物理学家们争论的一个大问题. 当时, 以著名的物理学家 Schrödinger (薛定锷) 为首的, 主张光具有波动性 (连续性) 的, 波动力学派与著名的物理学家 Heisenberg(海森堡) 为首的, 主张光具有粒子性 (离散性) 的, "矩阵力学"派一直进行着激烈的争论. 最终, 人们终于统一了认识, 即: 光本来就是具有波动的和粒子的二重性质. 而上面的例 2 则从理论上指出了波动力学和矩阵力学其实是等价的.

1.13.2　赋 (准) 范空间的完备化

由于赋 (准) 范空间的完备性起着十分重要的作用, 一旦其消失, 就会有许多 (今后将要讲述的) 定理均要失效. 因此, 人们自然希望, 在某些情形下, 能够将一般的赋 (准) 范空间视为某一个完备的赋 (准) 范空间的子空间来看待. 而联想到实数的完备性方法, 我们用 Cauchy 采用过的将有理数域扩充 (完备) 为实数域的方法, 同样可以得到赋 (准) 范空间的完备化定理.

定理 1　任意一个赋 (准) 范空间 E 必等价于一个完备的赋 (准) 范空间 $\mathcal{E}_1$ 中的稠密子空间 $\mathcal{E}$.

证明 下面我们分五步来叙述此定理的证明：

(1) 先扩大空间, 构造出一个新的赋拟 (准) 范空间 $\widehat{E}$ 如下：

$$\widehat{E} \triangleq \{\{x_n\}:\quad \{x_n\}\text{为}E\text{中的Cauchy列}\}.$$

很自然地, 我们在 $\widehat{E}$ 中定义加法与数乘如下：

$$\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\},\quad \alpha\{x_n\}=\{\alpha x_n\};\quad \forall\{x_n\},\{y_n\}\in\widehat{E},\quad \alpha\in\mathbb{K}.$$

显然, $\widehat{E}$ 为一线性空间, 并当定义拟 (准) 范数

$$\|\{x_n\}\|^{\triangle}=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|,\quad \forall\{x_n\}\in\widehat{E}$$

时, 则其必构成一个赋拟 (准) 范空间.

(2) 令 $\widehat{E}_0\triangleq\{\{x_n\}\in\widehat{E}:\quad \|\{x_n\}\|^{\triangle}=0\}$, 由 §1.12 定理 2 的推理可知商空间

$$\mathcal{E}_1\triangleq\widehat{E}/\widehat{E}_0$$

必为与之相应的赋 (准) 范空间.

(3) 我们用 $\{x\}$ 表示 “常驻列”, 令

$$\mathcal{E}\triangleq\{\widetilde{\{x\}}:\quad \forall x\in E\}.$$

同样由 §1.12 定理 2 的推理有

$$\|\widetilde{\{x\}}\|_1=\|\{x\}\|^{\triangle}=\lim_{n\to\infty}\|x\|=\|x\|,\quad \forall x\in E.$$

因此, 当令 E 到 $\mathcal{E}$ 的映像 V 为

$$V:\ x\mapsto\widetilde{\{x\}},\quad \forall x\in E$$

时, 显然 V 是等价映像, 故 E 与 $\mathcal{E}$ 等价.

(4) 证明 $\mathcal{E}$ 是稠于 $\mathcal{E}_1$ 的.

事实上, 对任意的元 $\widetilde{\{x_n\}}\in\mathcal{E}_1$ 及 $\varepsilon>0$, 由商元的定义可设: $\{x_n\}\in\widetilde{\{x_n\}}(\{x_n\}\in\widehat{E})$. 从 $\{x_n\}$ 为 E 中的 Cauchy 列, 故存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geqslant n_0$ 时, 有 $\|x_n-x_{n_0}\|\leqslant\varepsilon$. 由此, 当取 “常驻列” $\{x_{n_0}\}$ 的对应的商元 $\widetilde{\{x_{n_0}\}}\in\mathcal{E}$ 时, 注意商元 (准) 范数的定义, 立即得到

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\{x_n\}}-\widetilde{\{x_{n_0}\}}\|_1&=\|\widetilde{\{x_n-x_{n_0}\}}\|_1\\&\leqslant\|\{x_n-x_{n_0}\}\|^{\triangle}\\&=\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{n_0}\|\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

故其稠密性得证.

(5) 证明 $\mathcal{E}_1$ 是完备的.

事实上, 如果 $\{\widetilde{\{x_n^{(k)}\}}\}_k$ 是空间 $\mathcal{E}_1$ 的一个 Cauchy 列, 从 (4), 由 $\mathcal{E}$ 稠密于 $\mathcal{E}_1$, 则可得到 $\mathcal{E}$ 中由"常驻列"组成的商元之元列 $\{\widetilde{\{y^{(k)}\}}\}_k$, 使有

$$\|\widetilde{\{\{x_n^{(k)}\}\}} - \widetilde{\{y^{(k)}\}}\|_1 < \frac{1}{k} \quad (\forall k \in \mathbb{N}). \tag{1.13.1}$$

由此可知

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\{y^{(k_1)}\}} - \widetilde{\{y^{(k_2)}\}}\|_1 \leqslant\, & \|\widetilde{\{y^{(k_1)}\}} - \widetilde{\{x_n^{(k_1)}\}}\|_1 \\ & + \|\widetilde{\{x_n^{(k_1)}\}} - \widetilde{\{x_n^{(k_2)}\}}\|_1 + \|\widetilde{\{x_n^{(k_2)}\}} - \widetilde{\{y^{(k_2)}\}}\|_1 \\ < & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \|\widetilde{\{x_n^{(k_1)}\}} - \widetilde{\{x_n^{(k_2)}\}}\|_1 \\ \to & \, 0 \quad (k_1, k_2 \to \infty).\end{aligned}$$

再次用到 §1.12 中定理 2 的推理, 从上则可得到

$$\begin{aligned}\|y^{(k_1)} - y^{(k_2)}\| &= \|\{y^{(k_1)} - y^{(k_2)}\}\|^{\triangle} \\ &= \|\widetilde{\{y^{(k_1)} - y^{(k_2)}\}}\|_1 \\ &= \|\widetilde{\{y^{(k_1)}\}} - \widetilde{\{y^{(k_1)}\}}\|_1 \to 0 \quad (k_1, k_2 \to \infty).\end{aligned}$$

即 $\{y^{(k)}\}_k$ 亦为 E 中一 Cauchy 列, 从而由前面的定义, 当令 $y_n = y^{(n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ 时, 有 $\widetilde{\{y_n\}} \in \mathcal{E}_1$. 而由 $\widehat{E}$ 中 (准) 范数的定义, 对于任意的 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$\|\{y^{(k)} - y_n\}\|^{\Delta} = \lim_{n\to\infty} \|y^{(k)} - y_n\|$$

(注意: 对任意 $k, \{y^{(k)} - y_n\}_n$ 此时亦为 Cauchy 列). 因而, 必存在 $n_k > k$, 使得

$$\|\{y^{(k)} - y_n\}\|^{\Delta} < \|y^{(k)} - y_{n_k}\| + \frac{1}{k}. \tag{1.13.2}$$

故从式 (1.13.1) 和 (1.13.2) 及 y_n 的取法, 有

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\{x_n^{(k)}\}} - \widetilde{\{y_n\}}\|_1 &\leqslant \|\widetilde{\{x_n^{(k)}\}} - \widetilde{\{y^{(k)}\}}\|_1 + \|\widetilde{\{y^{(k)}\}} - \widetilde{\{y_n\}}\|_1 \\ &< \frac{1}{k} + \|\widetilde{\{y^{(k)} - y_n\}}\|_1 \\ &\leqslant \frac{1}{k} + \|\{y^{(k)} - y_n\}\|^{\Delta} \\ &\leqslant \frac{1}{k} + \|y^{(k)} - y_{n_k}\| + \frac{1}{k} \\ &\leqslant \|y^{(k)} - y^{(n_k)}\| + \frac{2}{k} \quad (\forall k \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

注意到 $\{y^{(k)}\}_k$ 为 Cauchy 列, 以及 $n_k > k \ (\forall k \in \mathbb{N})$, 从上式立即导出

$$||\widetilde{\{x_n^{(k)}\}} - \widetilde{\{y_n\}}||_1 \leqslant ||y^{(k)} - y^{(n_k)}|| + \frac{2}{k} \to 0 \ \ (k \to \infty).$$

此即说明了 $\mathcal{E}_1$ 中的 Cauchy 点列是收敛的, 从而为完备的. □

注* 注意, 在对 (非赋范的) 赋准范空间证明上定理时, 为验证那里的 $\widehat{E}$ 为拟准范空间时, 需用到原空间数乘的准范数 $||\alpha \cdot x||^*$ 是 (α, x) 的"二元连续"函数 (而不是准范定义中的单边连续的性质). 事实上, 从准范定义可以导出此一性质 (例, 可参见 §1.9 后面的附录*, 或者文献 [1]p.63—65).

习 题 一

1.1 设 V 是赋范线性空间 E 内的凸集, $d = \inf_{x \in V} ||x||$, 并设其内元列 $\{x_n\} \subset V$, 满足 $||x_n|| \to d(n \to \infty)$. 试证明:

1) $||\frac{x_n + x_m}{2}|| \to d \ \ (n, m \to \infty)$.

2) 当 $d \neq 0$ 时, 如果设 $\overline{x_n} = \frac{x_n}{||x_n||}$, 则有

$$\left\|\frac{\overline{x_n} + \overline{x_m}}{2}\right\| \to 1 \quad (n, m \to \infty).$$

3) 当 $d = 0$ 时, 2) 的结论未必成立, 试举例说明.

1.2 试在 (ℓ^2) 空间中找出一线性集 L, 使得它不构成 E 的闭子空间, 从而说明无穷维空间与有穷维空间的一个不同的性质.

1.3 以 (ℓ^2) 空间为例, 试说明在无穷维赋范空间中, 有界集未必是列紧的.

1.4 试证明: 当 E 为"有穷维"赋范空间时, 只要 E_0 为 E 的一 (闭) 真子空间, 在 E 的单位球上必有一元 x_0 存在, 使得

$$d = \inf_{y \in E_0} ||x_0 - y|| = 1.$$

1.5 试证明: 任意两个有限维赋准范空间, 只要它们维数相同, 则必然"线性同胚".

(两线性空间 E_1 和 E_2 称为"线性同构"是指在 E_1 和 E_2 之间存在一个"1–1"对应的满映象 φ, 使得

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \quad (\forall\, x, y \in E_1, \alpha, \beta \in \mathbb{K}).$$

当 E_1 和 E_2 为距离空间时, 如果 φ 还满足: φ 与 φ^{-1} 均为连续映像, 则空间 E_1 和 E_2 称为"线性同胚").

1.6 试证明: 在距离空间中, "紧"与"自列紧"的概念是相同的.

1.7 试证明: 紧距离空间上的连续函数一定可以取到最大值和最小值.

1.8 试验证: 空间 $M(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 中的按范收敛就是"概一致收敛", 并且, 当 $\mu(\Omega) < \infty$ 时, 有

$$\lim_{p \to \infty} \left[\int_\Omega |x(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \text{Vrai} \max_{t \in \Omega} |x(t)| \quad (\text{称为"真极大"})$$

对任意 $x=x(t)\in M(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ 成立.

1.9　设 A_ρ 表示在圆 $|z|\leqslant\rho$ 上连续、在圆内 $|z|<\rho$ 解析的复变函数的全体, 加法、数乘运算如常定义, 其上定义范数为

$$||x||=\max_{|z|<\rho}|x(z)|,\quad \forall x\in A_\rho.$$

试证明 A_ρ 按上范数构成一 Banach 空间.

1.10　设 $C^{[k]}[a,b]$ 表示定义在 $[a,b]$ 上有“k 阶连续导函数”的函数 $x(t)$ 的全体, 定义函数的加法、数乘如常, 且定义

$$||x||=\sum_{m=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(m)}(t)|,\quad \forall\, x\in C^{[k]}[a,b]$$

(这里 $x^0(t)=x(t)$). 试验证 $C^{[k]}[a,b]$ 按上范数 $||x||$ 构成一个 Banach 空间.

1.11　设 $C_0(-\infty,+\infty)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续且当 $|x|\to\infty$ 时趋于零的复值函数的全体, 加法及数乘定义如常, 且定义范数 $||x||=\max_{-\infty<t<+\infty}|x(t)|$. 试验证 $C_0(-\infty,+\infty)$ 构成一 Banach 空间.

1.12　设 E 是一个赋准范空间, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 是 E 中的一个元, 那么必有 $x_n\to\theta(n\to\infty)$.

1.13　设 E 为一赋范线性空间, $\{O_n\}$ 为其内的渐缩的开球列, $O_1\supset O_2\supset\cdots\supset O_n\supset O_{n+1}\supset\cdots$. 那么, 只要开球 O_n 的“直径” $d(O_n)=\sup_{x,y\in O_n}||x-y||\nrightarrow 0\quad(n\to\infty)$, 则有

$$\bigcap_n O_n\neq\varnothing.$$

1.14　在 1.13 题中, 当 E 是 Banach 空间时, 即使有 $d(O_n)\to 0(n\to\infty)$, 则原结论对于 $\{\overline{O}_n\}$ 仍然正确.

1.15　举一反例说明, 当改习题 1.13 中的球为别的集时 (例如, 即使改为“闭凸集” $\overline{V}_n,(n\in\mathbb{N})$), 当 E 是 Banach 空间时, 原结论也未必正确.

1.16　习题 1.11 中的空间$C_0(-\infty,+\infty)$ 是可分的吗? 为什么?

1.17　设 $C_b[0,\infty)$ 为 $[0,\infty)$ 上全体有界连续函数 (范数如下定义:

$$||x||=\sup_{t\in[0,\infty)}|x(t)|,\quad \forall x=x(t)\in C_b[0,\infty))$$

所张成的 Banach 空间, 试问空间 $C_b[0,\infty)$ 是可分的吗? 为什么?

1.18　设 (s) 表示“所有复数序列 $x=\{\xi_k\}$ 全体”所组成的线性空间, 并且引入收敛定义为“按坐标收敛” (不要求“收敛”一致), 试证明它构成一可分空间.

1.19　设 $x(t)\in L^p(-\infty,+\infty)(p\geqslant 1)$, 证明:

$$\lim_{h\to 0}||x(t+h)-x(t)||=0\quad(\text{关于“平移”连续}).$$

1.20　设 $E_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 均是 Banach 空间, 在积空间 $\prod_{k=1}^{n}E_k$ 中, 元 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的运算定义如下:

$$(x_i)+(y_i)=(x_i+y_i),\quad \alpha(x_i)=(\alpha x_i)\quad(\forall\,\alpha\in\mathbb{K}).$$

而范数定义为

$$||x|| = \max\{||x_1||, ||x_2||, \cdots, ||x_n||\},$$

或

$$||x||^* = \Big(\sum_{k=1}^{n} ||x_k||^p\Big)^{\frac{1}{p}} (p \geqslant 1).$$

试证明：在以上两种范数的定义下，积空间均成为 Banach 空间.

1.21 试证明：在“线性同构”的意义下，对任意 $p, q > 0$，只要 $p \leqslant q$，就有

$$(\ell^p) \subset (\ell^q), \quad L^q[a, b] \subset L^p[a, b]$$

(即：空间 $(\ell^p)(L^p[a, b])$ 随 p 增大而“增大”(“减小”)).

1.22 称范数 $||\cdot||_2$ “不弱于”范数 $||\cdot||_1$，是指对任意 $\{x_n\} \subset E, x_0 \in E$，均有

$$||x_n - x_0||_2 \to 0 (n \to \infty) \Rightarrow ||x_n - x_0||_1 \to 0, (n \to \infty).$$

称范数 $||\cdot||_1$ 与范数 $||\cdot||_2$ “等价”，是指范数 $||\cdot||_1$ 不弱于范数 $||\cdot||_2$，并且范数 $||\cdot||_2$ 不弱于范数 $||\cdot||_1$. 试证明：为了 E 中定义的两个范数 $||\cdot||_1$ 与范数 $||\cdot||_2$ 等价，必须且只须存在数 $\alpha, \beta > 0$，使得有

$$\alpha||x||_1 \leqslant ||x||_2 \leqslant \beta||x||_1, \quad \forall x \in E.$$

1.23 试验证习题 1.20 中的积空间$\prod_{k=1}^{n} E_k$定义的两种范数是相互等价的.

第二章　赋 (准、拟) 范空间上的线性算子

算子是泛函分析的基本概念之一, 它在许多问题中出现, 我们不止一次地用到过它. 在讨论线性空间的线性变换时, 所涉及的算子是以矩阵的形式出现的. 在解微分方程时, 遇到的则是微分算子. 抽掉各种算子的具体属性而对它们加以抽象, 便可得到赋范空间中算子的概念. 本章主要讨论的是最广泛的一类算子 —— 线性算子.

§2.1　算子的定义及基本性质

在线性代数中, 我们曾经遇到过把一个 n 维向量空间 E_n 映像到另一个 m 维线性空间 E_m 的运算, 那就是借助于 m 行 n 列的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

对 E_n 中的元作用来达到的. 同样地, 在数学分析中, 我们也遇到过把一个函数变为另一个函数或数的运算, 即微分和定积分等等. 把上面所有运算抽象化以后, 就得到一般赋 (拟, 准) 范线性空间上的算子的概念.

定义 1　设 E 和 E_1 为任意赋 (拟、准) 范空间, 则任意映像

$$T\colon D(\subset E)\longrightarrow D_1(\subset E_1)$$

称为**算子** . D 称为 T 的**定义域**, 记为 $\mathcal{D}(T)$. $\{Tx\in D_1\colon\ x\in D\}$ 称为 T 的**值域**, 记为 $\mathcal{W}(T)$.

定义 2　上面的算子 T 称为**可加的**是指

$$T(x_1+x_2)=Tx_1+Tx_2,\quad \forall\, x_1,x_2\in E.$$

称为**齐性的** 是指

$$T\alpha x=\alpha Tx,\ \ \forall\, \alpha\in\mathbb{K}, x\in E.$$

特别地, 如果上式只对 $\alpha \geqslant 0$ 成立, 则称为**正齐性**. 而当上式变为

$$T(\alpha x) = |\alpha| Tx, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, x \in E$$

时, 称 T 为**绝对齐性**的.

定义 3 称上面的算子 T 为**稠定的**, 是指 $\overline{D(T)} = E$. 特别地, 当上面的定义域空间 $E = \mathbb{K}$ 时, 称 T 为**向量值函数(抽象函数)**; 而当上面的值域空间 $E_1 = \mathbb{K}$ 时, 则称 T 为**泛函** (此时常改记为 f, g 或 x^* 等).

定义 4 称上面的算子 T 在 x_0 为**连续的** 是指: 对任意 $\{x_n\}$, 有

$$||x_n - x_0|| \to 0 \Rightarrow ||T(x_n) - T(x_0)||_1 \to 0 \quad (n \to 0),$$

这里 $||\cdot||, ||\cdot||_1$ 各代表 E 和 E_1 的 (拟, 准) 范数.

注意: 对一些赋准范空间而言, 可能出现全空间中的元的准范数均为有界数集的情形. 因此, 如果我们仅仅简单地定义“有界集”为“准范数有界”集, 那么就会将“从任意 (拟、准) 范空间到这样的准范空间内的算子”均认为是“有界”算子. 这样一来, 如此的“有界”线性算子与“连续”线性算子之间几乎不存在任何人们期望的关系了. 所以我们必须在包括一般的赋准范空间中, 重新对集合的有界性作出以下的定义:

定义 5 设 E 为一赋“拟准”范空间, $M \subset E$, 称 M 是**(拓扑)有界集** 是指: 对任意的 $\{x_n\} \subset M$ 及 $\alpha_n \subset \mathbb{K}$ 且 $\alpha_n \to 0$, 必有 $\alpha_n x_n \to \theta\,(n \to \infty)$.

对于有界集我们作下面四个注记:

注 1 (拓扑) 有界性是不弱于 (拟、准) 范数有界性的, 因为我们有下面的命题:

命题 1 如果 E 为赋“拟准”范空间, 则 M 是 (拓扑) 有界集时, 其必为拟准范数有界集 (即, 存在 $\rho_0 > 0$, 使得 $\sup_{x\in M} ||x||^* \leqslant \rho_0$).

证明 如果 M (拓扑) 有界, 但 $\sup_{x\in M} ||x||^* = \infty$, 则必存在 $\{x_n\} \subset M$, 有 $||x_n||^* \to \infty (n \to \infty)$. 不妨设 $||x_n||^* \geqslant 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$, 令 $\varepsilon_n = \frac{1}{[\sqrt{||x||^*}]} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$(其中 $[\alpha]$ 表示不超过实数 α 的最大整数), 则 $\varepsilon_n \to 0 (n \to \infty)$. 注意到拟准范数的次可加性, 便可导出

$$\begin{aligned} ||\varepsilon_n x_n||^* &= \left\| \frac{x_n}{[\sqrt{||x||^*}]} \right\|^* \geqslant \frac{1}{[\sqrt{||x||^*}]} ||x_n||^* \\ &\geqslant \frac{1}{\sqrt{||x||^*}} ||x_n||^* \\ &= \sqrt{||x||^*} \to \infty \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

即 $\varepsilon_n x_n \nrightarrow \theta$, 从而与集合 M 的有界性矛盾! □

注 2　为什么我们所见的中外泛函分析教材均简单地将集合 (元) 范数有界集定义为有界集呢? 其实, 因为那些书中均仅在赋范空间来讨论问题, 而此时 (拓扑) 有界与范数有界的确是一致的. 此可见下面更一般的命题:

命题 2　当 E 为赋 β^* 拟范 $(0<\beta^*\leqslant 1)$ 空间时, 其内集合 M 的 (拓扑) 有界性与 β^* 拟范数有界性是相同的 (以后为简便起见, 当 β 可取 1 时, 记为 β^*).

证明　从命题 1 我们已知, (拓扑) 有界是不弱于 (拟准) 范数有界的. 下面只需验证, 当 E 中的集合 M 是 β^* 拟范有界时, 其必为拓扑有界集. 事实上, 如果设 $\sup_{x\in M}||x||^{\triangle}\leqslant\rho_0$(其中 $||x||^{\triangle}$ 是 β^* 拟范), 则对于任意的 $\{x_n\}\subset M$ 和 $\alpha_n\subset\mathbb{K}$ 且当 $\alpha_n\to 0$ 时, 可得到

$$0\leqslant||\alpha_n x_n||^{\triangle}=|\alpha_n|^{\beta^*}||x_n||^{\triangle}\leqslant|\alpha_n|^{\beta^*}\rho_0\to 0\quad(n\to\infty),$$

即 $\alpha_n x_n\to\theta(n\to 0)$. 由此导出 M 亦是 (拓扑) 有界的.　□

注 3　值得注意的是, 对于赋准范空间而言, 从其集合的准范有界性是未必可得其 (拓扑) 有界性的. 为说明这一点, 我们需要介绍下面一个命题:

命题 3　设 E 为赋准范空间, 则其任意 (非零空间) 的线性子空间 E_0 均为 (拓扑) 无界集.

证明　设 E_0 为 E 的任一线性子空间, 且 $E_0\neq\{\theta\}$. 且必存在元 $\theta\neq x_0\in E_0$, 又从 E_0 的线性, 可知元列 $\{nx_n\}\subset E_0$. 现在对于数列 $\{\frac{1}{n}\}$, 显然有 $\frac{1}{n}\to 0$. 但

$$\frac{1}{n}\cdot(nx_0)=x_0\nrightarrow\theta\quad(n\to\infty),$$

故由定义 5 可知 E 不能是 (拓扑) 有界集.　□

从命题 3 我们立即可得下面的反例:

反例　赋准范空间 (s) 和 $S[a,b]$ 均为准范有界但 (拓扑) 无界的集合.

注 4*　当 E 为 (非赋准范的) 拟准范空间时, 其 “拟准范数为 0” 的线性子空间 (注意并不是零空间 $\{\theta\}$!) 必为有界集.

事实上, 从 §1.12 中推理的证明中已知, E 中所有 “拟范数为 0” 的元之全体 E_0 必为一线性子空间. 而对任意 $\{y_n\}\subset E_0$ 及任意 $\alpha_n\to 0$, 由 E_0 是线性子空间知

$$||\alpha_n y_n-\theta||^{\triangle}=0\quad(\forall\, n\in\mathbb{N}),$$

即 $\alpha_n y_n\to\theta$. 因而从 (拓扑) 有界集的定义可知, E_0 是 (拓扑) 有界集.　□

由此, 前面命题 3 有一个更一般的结果:

命题 4*　设 E 为赋拟准范空间, E_0 为 E 的线性子空间, 则

$$E_0 \text{ 为 (拓扑) 有界集} \Leftrightarrow E_0\subset\overline{\{\theta\}}\ \text{(零元的闭包)}.$$

有了上面 (拓扑) 有界集的定义 (拟范空间中, 范数有界集的推广), 就为我们揭示线性算子的有界性与连续性的关系做好了准备. 这里先介绍可加算子的简单性质.

定理 1 设 E 和 E_1 为拟准范空间, T 为 E 到 E_1 内的"可加"算子, 则 E 上的可加算子 T 具有如下性质:

T 在某点 $x_0 \in E$ 连续 $\Longrightarrow T$ 在全空间连续.

证明 对于任意 $x_1, x \in E$, 当 $x \to x_1$ 时, 可知 $x - x_1 + x_0 \to x_0$, 从而由 T 的可加性及 T 在 x_0 点的连续性有

$$T(x) - T(x_1) = T(x - x_1) = T(x - x_1 + x_0) - T(x_0) \to 0.$$

此即说明了 $x \to x_1 \Rightarrow T(x) \to T(x_1)$. 由 x_1 的任意性可知 T 在 E 上连续. □

定理 2 设 E 为拟准范空间, E_1 为准范空间. 设 T 为 E 到 E_1 内的"可加"算子, 则

$$T \text{ 连续} \Rightarrow T \text{ 为"实齐性"(即: } T(\lambda x) = \lambda T(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}).$$

证明 由 T "可加"和归纳法, 必有

$$T(nx) = nT(x), \quad \forall x \in E, \quad n \in \mathbb{N}.$$

从代换法又有

$$T\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m}T(x), \qquad \forall x \in E, m \in \mathbb{N}.$$

由上两式的结合有

$$T(r^+x) = r^+T(x), \qquad \forall x \in E, r^+ \in \mathbb{Q}^+(\text{正有理数全体}).$$

又由 $T(\theta) = T(\theta + \theta) = T(\theta) + T(\theta)$ 知 $T(\theta) = \theta$, 则有

$$\theta = T(\theta) = T(x + (-x)) = T(x) + T(-x),$$

故 $T(-x) = -T(x) \ \ (\forall x \in E)$, 从而有

$$T(rx) = rT(x), \quad \forall x \in E, r \in \mathbb{Q}(\text{有理数域}).$$

最后, 由 $\mathbb{Q}$ 稠于实数域 $\mathbb{R}$、元与数乘的拟准范之单边连续性、以及 T 的连续性, 可导出

$$T(\lambda x) = \lambda T(x), \quad \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}.$$

即 T 是实齐性的. □

为了介绍本节最重要的有关线性算子连续性与有界性关系的定理, 我们先来引入下面的定义:

定义 6　设 E 和 E_1 为两个拟准范空间, 称 E 到 E_1 内的算子 T 是**有界的**, 是指: T 将 E 中的任一 (拓扑) 有界集映为 E_1 内的 (拓扑) 有界集; 称 T 为**强有界的**, 是指: 存在常数 $\rho > 0$, 使得

$$||Tx|| \leqslant \rho||x||, \quad \forall x \in E.$$

命题 5　设 E 和 E_1 均为拟准范空间, T 为 E 到 E_1 内的线性算子, 则

$$T\text{“强有界”} \Longrightarrow T\ \text{“有界”}.$$

证明　对于 E 中的任一有界集 M, 我们证明, 当 T 是强有界线性算子时, $T(M)$ 必为 E_1 中的有界集.

事实上, 对于任意的 $\{y_n\} \subset T(M), \{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}$ 且 $\alpha_n \to 0(n \to \infty)$. 首先, 取一元列 $\{x_n\} \subset M$, 使得 $y_n = T(x_n)$. 注意到 T 的线性及强有界的假设, 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$0 \leqslant ||\alpha_n y_n|| = ||\alpha_n T(x_n)|| = ||T(\alpha_n x_n)|| \leqslant \rho||\alpha_n x_n||.$$

其次, 从 M 是有界集的假设, 立即有 $\alpha_n x_n \to \theta(n \to \infty)$, 从而上式导出: $\alpha_n y_n \to \theta(n \to \infty)$, 此即说明 $T(M)$ 是有界集, 故 T 为有界算子. □

注 1　对于赋准范空间, 命题 5 的逆命题是不正确的 (即: 线性算子的有界性推不出其强有界性). 此可见下面反例:

反例 1　对于两个 β^* 范空间: $E = (\ell^{\beta_1}), E_1 = (\ell^{\beta_2^*})$ (其中 $0 < \beta_1 < \beta_2^* \leqslant 1$), 从代数意义上 (从元的组成) 可知: $(\ell^{\beta_1}) \subset (\ell^{\beta_2^*})$. 令线性算子为

$$I\,(\text{恒等算子}):\ (\ell^{\beta_1}) \to (\ell^{\beta_2^*})$$

(即当 $x \in (\ell^{\beta_1})$ 时, 令 $Ix = x \in (\ell^{\beta_2^*})$), 则 I 为有界但非强有界线性算子.

验证　从本节命题 2 我们知道, 上面的空间中的“有界集”等价于“β^* 拟范有界”集. 由此可知 I 为有界算子. 事实上, 若 $||x||_{\beta_1} \leqslant M_0$, 则 $||\frac{x}{(M_0)^{\frac{1}{\beta_1}}}||_{\beta_1} \leqslant 1$. 故 $\frac{x}{(M_0)^{\frac{1}{\beta_1}}}$ 的每个坐标的绝对值一定不超过 1, 再注意到 $\beta_1 < \beta_2^*$, 便知 $||\frac{x}{(M_0)^{\frac{1}{\beta_1}}}||_{\beta_2^*} \leqslant 1$. 由此可知

$$||x||_{\beta_2^*} \leqslant (M_0)^{\frac{\beta_2^*}{\beta_1}}.$$

此即说明 I 为有界算子.

(也可以从另外的角度说明此问题: 注意到

$$||x||_{\beta_2^*} \leqslant ||x||_{\beta_1}, \quad \forall ||x||_{\beta_1} \leqslant 1,$$

则知 I 为连续线性算子, 再从后面定理 3 也可知 I 为有界算子.)

但是 I 不能是“强有界”的. 事实上, 反之若存在 $\rho > 0$, 使得

$$||x||_{\beta_2^*} = ||Ix||_{\beta_2^*} \leqslant \rho ||x||_{\beta_1}, \quad \forall\, x \in (\ell^{\beta_1}).$$

即有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{\beta_2^*} \leqslant \rho \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{\beta_1}, \quad (\forall\, \{\xi_k\} \in (\ell^{\beta_1}))$$

成立. 但是当特取元列 $x_n = (n, 0, 0, \cdots) \in (\ell^{\beta_1})$ 时 $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, 代入上式则可得到

$$n^{\beta_2^* - \beta_1} \leqslant \frac{n^{\beta_2^*}}{n^{\beta_1}} \leqslant \rho \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

注意假设 $\beta_2^* - \beta_1 > 0$, 故知上式是显然不能成立的. □

注 2 即使对于赋范空间, 当其间的算子不是“可加”的时, 从算子的有界性也推不出其“强有界性”. 此可以从下面的反例看出:

反例 2 设 E 为赋范空间, 令 E 上的泛函 (即 E 到数域 $\mathbb{K}$ 内的算子) $p(x)$ 定义如下:

$$p(x) = ||x||^{\lambda}, \quad \forall\, x \in E$$

(其中: $0 < \lambda \neq 1$). 从本节命题 2 显然可知, $p(x)$ 是“有界”泛函, 但同样显然的是 $p(x)$ 不是“强有界”泛函.

验证 事实上, 如果有 $\rho > 0$, 使得

$$||x||^{\lambda} = p(x) \leqslant \rho ||x||, \quad \forall\, x \in E,$$

则由

$$\lim_{||x|| \to \infty} \frac{||x||^{\lambda}}{||x||} = \infty \, (\lambda > 1),$$

及

$$\lim_{||x|| \to 0} \frac{||x||^{\lambda}}{||x||} = \infty \, (\lambda < 1),$$

均可导出矛盾. □

注 3* 可以证明本节的命题 5, 当那里的 T 从“线性”减弱为“可加”(或“正齐性”) 时, 其结论仍然正确. 即有: T“强有界”$\Rightarrow T$ “有界”. 对于“可加”或“正齐性”算子, 此时仅需将那里证明中的 α_n 换为 $\frac{1}{n}$ 即可 (见后面命题 7).

注 4 如果仅为了将命题 5 推广到“可加”算子, 我们只要注意上面定理 2 的证明即可. 因为此时, 我们由算子 T 的“可加性”得到

$$T(rx) = rT(x), \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, r \in \mathbb{Q}\,(\text{有理数}).$$

再来介绍两个命题, 而此两个命题将使我们以后能将"线性"算子的连续性与有界性的定理推广到"可加"算子. 先给出下面定义:

定义 7* 空间 E 上的准范数 $||x||^*$ 称为**均衡**的 (或**单调** 的) 是指其满足

$$||\alpha x||^* \leqslant ||x||^*, \quad \forall x \in E,\ |\alpha| \leqslant 1.$$

(注意, 从上面的定义容易导出, 对于任意的 $x \in E$, 均有

(i) $||\lambda x||^* = ||x||^*, \quad \forall |\lambda| = 1;$

(ii) $||\lambda_1 x||^* \leqslant ||\lambda_2 x||^*, \quad \forall |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2|$.)

命题 6* 空间 E 上的任意准范 $||x||^*$ 必 (拓扑) 等价于某一均衡准范 $||x||_1^*$.

证明 在空间 E 上定义

$$||x||_1^* \triangleq \sup_{|\lambda| \leqslant 1} ||\lambda x||^*, \quad \forall x \in E.$$

可以证明 $||x||_1^*$ 必为一个准范数, 并且显然有

$$||x^*|| \leqslant ||x||_1^*, \quad \forall x \in E.$$

故知: $||x||_1^* \to 0 \Rightarrow ||x||^* \to 0$.

另一方面, 对任意元列 $\{x_n\}$, 若有 $||x_n||^* \to 0$, 从 $||x||_1^*$ 定义及连续函数 $\varphi(\lambda) = ||\lambda x||^*$ 在 $|\lambda| \leqslant 1$ 上可取到其最大值, 故知必存在数列 $\{\lambda_n\}$, 使得 $|\lambda_n| \leqslant 1$ 且 $||x_n||_1^* = ||\lambda_n x_n||^*$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. 这样由准范数对数乘的二元连续性, 导得 $||x_n||_1^* \to 0$. 由此导出两个准范 $||x||_1^*$ 与 $||x||^*$ 是等价的. □

命题 7* 设 E 为赋准范空间, M 为 E 中的一个子集, 则下面 3 个性质是等价的:

(i) 对任意 $\{x_n\} \subset M$, 均有 $\frac{x_n}{n} \to \theta (n \to \infty)$.

(ii) 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\lambda| \leqslant \delta$ 时, 有 $\lambda M \subset B_\varepsilon(\theta)$.

(iii) M 为有界集.

(此为判断 M 为有界集的一个简洁命题!)

证明 首先, 注意到在等价准范数下, 元列的收敛性是相同的 (所诱导的拓扑是相同的), 故从上面命题 6*, 不妨假设 E 上的准范数是"均衡"的, 再来验证本命题的结论.

(i)⇒ (ii): 反设, 若结论 (ii) 不成立, 则对某 $\varepsilon_0 > 0$ 和任意 $\delta > 0$, 均存在 λ_δ, 使得 $|\lambda_\delta| \leqslant \delta$, 但 $\lambda_\delta M \not\subset B_{\varepsilon_0}(\theta)$. 由此我们断言: 对于任意的 n 均有 $\frac{1}{n}M \not\subset B_{\varepsilon_0}(\theta)$. 事实上, 若此断言不成立, 则必存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $\frac{1}{n_0}M \subset B_{\varepsilon_0}(\theta)$. 由此, 当令 $\delta = \frac{1}{n_0}$ 时, 如果 $|\lambda| \leqslant \frac{1}{n_0}$, 则由准范数的均衡性, 我们得到

$$\lambda M = \lambda n_0 \frac{1}{n_0} M \subset \lambda n_0 B_{\varepsilon_0}(\theta) \subset B_{\varepsilon_0}(\theta).$$

这显然与归谬假设矛盾, 故断言是成立的. 由此断言, 我们可以选出元列 $\{x_n^0\}$, 使有 $||\frac{x_n^0}{n}|| > \varepsilon_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. 而此显然与 (i) 矛盾.

(ii)⇒(iii): 设任意 $\{x_n\} \subset M, \{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}$ 且有 $\alpha_n \to 0(n \to \infty)$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 由 (ii) 知, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\lambda| \leqslant \delta$ 时, 有 $\lambda M \subset B_\varepsilon(\theta)$. 由 $\alpha_n \to 0(n \to \infty)$, 又知必存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $|\alpha_n| < \delta \quad (\forall n \geqslant N)$. 由此则可导出

$$\alpha_n x_n \in \alpha_n M \subset B_\varepsilon(\theta) \quad (\forall n \geqslant N).$$

即 $||\alpha_n x_n||^* \leqslant \varepsilon \quad (\forall n \geqslant N)$, 从而得到

$$\alpha_n x_n \to \theta(n \to \infty).$$

由定义 5, 此即 M 是 (拓扑) 有界集.

(iii)⇒ (i): 是显然的. □

为了导出在拟准范空间中有关可加算子的有界性与连续性的关系, 我们还须给出如下命题:

命题 8 设 E 为赋拟准范空间, T 为 "可加" (或 "正齐性") 算子. 如果 T 为有界算子, 则有

$$||x||^\triangle = 0 \Rightarrow ||Tx||^\triangle = 0, \quad \forall x \in E.$$

证明 反之, 如果由 $x_0 \in E$, 使得 $||x_0||^\triangle = 0$ 但 $||Tx_0||^\triangle \neq 0$. 由 $0 \leqslant ||nx_0||^\triangle \leqslant n||x_0||^\triangle$, 可知 $||nx_0||^\triangle = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. 对任意点列 $\{n_k x_0\} \subset \{nx_0\}$ 以及 $\alpha_k \to 0\,(\alpha_k \in \mathbb{K}, k \in \mathbb{N})$, 由上可知 $0 \leqslant ||n_k x_0 - \theta||^\triangle = ||n_k x_0||^\triangle \leqslant n_k \|x_0\|^\triangle = 0(k \in \mathbb{N})$, 从而 $n_k x_0 \to \theta(k \to \infty)$. 由拟准范对数乘的二元连续性, 可知 $\alpha_k(n_k x_0) \to \theta\,(n \to \infty)$. 因此得出 $\{nx_0\}$ 为有界集.

由 T 为 "可加" (或 "正齐性") 有界算子, 故知 $\{T(nx_0)\} = \{nT(x_0)\}$ 是 E_1 中的有界集, 因此应有

$$\frac{1}{n}[nT(x_0)] \to \theta(n \to \infty),$$

即 $||Tx_0||^\triangle = 0$, 与归谬假设矛盾. □

有了上面的准备, 我们可以介绍下面有关线性算子的连续性、有界性及强有界性之间关系的两个定理:

定理 3 设 E 和 E_1 均为赋拟准范空间, T 为 E 到 E_1 内的 "可加" (或 "正齐性") 算子, 则

T 在 θ 点连续 ⇔ T 有界

(故当 T 为 "可加" 算子时即有: T 连续 ⇔ T 有界).

证明　“⇒”：当 T 为“可加” (或“正齐性”) 连续算子时, 对于 E 中任意有界集 M, 任取 $\{y_n\} \subset T(M)$, 则存在 $\{x_n\} \subset M$, 使有

$$y_n = T(x_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

于是由 M 的有界性则知 $\frac{x_n}{n} \to \theta\,(n \to \infty)$. 而再由 T 在 θ 点的连续性及“可加性”(或“正齐性”), 有

$$\frac{y_n}{n} = \frac{T(x_n)}{n} = T\Big(\frac{x_n}{n}\Big) \to T(\theta) \quad (n \to \infty),$$

也即得出 $T(M)$ 为 E_1 中的有界集, 从而 T 为有界算子.

“⇐”：反之, 假设 T 在 θ 点是不连续的. 由此, 存在 $\{x_n\} \subset E$, 使有 $x_n \to \theta$, 但

$$T(x_n) \nrightarrow \theta(n \to \infty). \tag{2.1.1}$$

注意到前面命题 8, 我们不妨可取上面的 $\{x_n\}$ 其拟准范均有 $||x_n|| \neq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ (因此时 $||x_n|| = 0$ 必导出 $||T(x_n)|| = 0$, 故可以把使得 $||T(x_n)|| = 0$ 的元 x_n 删掉).

令 $k_n = \left[\frac{1}{\sqrt{||x_n||}}\right]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ (这里 $[\alpha]$ 代表小于 α 的最大整数), $\overline{x}_n = k_n x_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. 注意使用拟准范的三角不等式, 有

$$\begin{aligned} ||\overline{x}_n|| &= ||k_n x_n|| \leqslant k_n ||x_n|| \\ &= \Big[\frac{1}{\sqrt{||x_n||}}\Big] ||x_n|| \\ &\leqslant \frac{||x_n||}{\sqrt{||x_n||}} = \sqrt{||x_n||} \to 0(n \to \infty). \end{aligned}$$

故由定义可知 $\{\overline{x}_n\}$ 是 E 中的有界集, 因而从 T 是有界算子的假设可知 $\{T(\overline{x}_n)\}$ 亦为 E_1 中的有界集. 注意到 $k_n \to \infty(n \to \infty)$ 以及 T 是“可加” (或“正齐性”) 算子, 则有

$$T(x_n) = \frac{1}{k_n} T(\overline{x}_n) \to \theta\,(n \to \infty).$$

与式 (2.1.1) 矛盾! 故 T 在 $x = \theta$ 点是连续的.

(此定理的后一结论显然可以由前面定理 1 导出.) □

定理 4　*设 E 和 E_1 均为赋拟范空间, T 为 E 到 E_1 内的“可加” (或“正齐性”) 算子, 则*

T 在 θ 点连续 $\Longleftrightarrow$ T 有界 $\Longleftrightarrow$ T 强有界

(故在 T 是“可加”算子时, 即有: T 连续 $\Longleftrightarrow$ T 有界 $\Longleftrightarrow$ T 强有界).

证明 从上面定理 3, 我们只要证明:“T 强有界 $\Rightarrow T$ 在 θ 点连续” 和 “T 有界 $\Rightarrow T$ 强有界” 则可. 而从强有界算子的定义 (参见定义 6), 上面第一个结论是显然的, 因此下面仅证明上面第二个结论:

设 T 是有界算子, 反之, 如其不是强有界算子, 则对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 必存在 x_n, 使得

$$||T(x_n)||^{\triangle} > n||x_n||^{\triangle} \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{2.1.2}$$

同样注意到前面的命题 8, 若上式成立, 必有 $||x_n||^{\triangle} \neq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. 由此, 我们可取一正有理数列 $\{r_n\}$, 使其满足

$$\frac{1}{2}||x_n||^{\triangle} \leqslant r_n \leqslant ||x_n||^{\triangle} \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{2.1.3}$$

注意到在拟范空间中, (拓扑) 有界等价于 “拟范数有界” (本节命题 2), 由此可知 $\{\frac{x_n}{r_n}\}$ 为 E 中的 “有界集”, 从而由 T 有界性假设知 $\{T(\frac{x_n}{r_n})\}$ 亦为空间 E_1 中的有界集, 同理可知 $\{||T(\frac{x_n}{r_n})||^{\triangle}\}$ 亦为有界数集. 因此, 存在正数 $\rho > 0$, 使得

$$\left\|T\left(\frac{x_n}{r_n}\right)\right\|^{\triangle} \leqslant \rho \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{2.1.4}$$

最后, 从 T “可加” 或 “正齐性” 假设以及式 (2.1.3) 和 (2.1.4) 可导出

$$||T(x_n)||^{\triangle} \leqslant r_n\rho \leqslant \rho||x_n||^{\triangle} \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{2.1.5}$$

式 (2.1.5) 显然与归谬假设关系式 (2.1.2) 矛盾, 因此得证. □

注 *前面定义 6 后的注 1 曾经指出, 当空间为赋准范空间时, 即使 T 为线性算子, 从 T 的有界性是推不出其强有界性的.*

定理 5 *设 E 和 E_1 均为赋拟范空间, T 为 E 到 E_1 “上” (即 “满”) 的可加算子, 则 T 存在连续的逆算子 T^{-1} 的充要条件是: 存在数 $\sigma > 0$, 使得*

$$||T(x)|| \geqslant \sigma||x||, \quad \forall x \in E.$$

证明 “$\Leftarrow$”: 首先, 从 T 的可加性及范数的定义和上关系式的假设显然可知 T 是 “1–1” 的, 即逆算子 T^{-1} 存在. 其显然是可加的. 此外, 对于任意元 $y \in E_1$, 由 T “满” 的假设, 知必有唯一的元 $x \in E$, 使有 $T^{-1}(y) = x$, 故从上关系式则有

$$||y|| = ||T(x)|| \geqslant \sigma||x|| = \sigma||T^{-1}(y)|| \quad (\forall y \in E_1).$$

也即可加算子 T^{-1} 是强有界的. 由此从上面定理 4 立即得出 T^{-1} 是连续的.

“$\Rightarrow$”: 如果 T^{-1} 存在且连续, 由其亦为可加算子, 故从上面定理 4 可知 T^{-1} 是强有界的. 也即存在数 $\frac{1}{\sigma} > 0$, 使得

$$||T^{-1}(y)|| \leqslant \frac{1}{\sigma}||y||, \quad \forall y \in E_1.$$

最后, 注意到 T 是"满"算子, 当令 $x = T^{-1}(y)$ 时, 从上面立即得出

$$||T(x)|| \geqslant \sigma ||x||, \quad \forall x \in E. \qquad \square$$

下面我们给出一些线性连续和不连续算子 (泛函) 的例子:

例 1 设 $E_{(n)}$ 为 n 维赋准范空间, E_1 为任意赋拟准范空间. 那么, 从 $E_{(n)}$ 到 E_1 的任意线性算子均是连续的.

证明 从前面定理 1, 我们只需证明 T 在 θ 点连续即可, 而此结论是明显的. 事实上, 当在 $E_{(n)}$ 中取出一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 后, 对于任意的元 $x \in E_{(n)}$, 当设 $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ 时, 由 T 线性的假设, 则有

$$||T(x)|| = \left\|T\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right)\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|\xi_k T(e_k)\|. \tag{2.1.6}$$

注意到 §1.5 中的引理 1 后的注 2, 我们立即导出: 当 $x \to \theta$ 时, 必有 $\xi_k \to 0 (1 \leqslant k \leqslant n)$. 而从 (拟) 准范数"数乘"的单边连续性, 从式 (2.1.6) 立即导出

$$x \to \theta \Rightarrow T(x) \to \theta.$$

也即线性算子 T 在原点 θ 是连续的. $\square$

注 1 当 $E_{(n)}$ 为 (非赋范的) 赋拟范空间时, 例 1 的结论未必成立. 可见 §1.6 性质 3 下面的反例.

注 2 当 E 为"无穷维"赋范空间时, 其上的线性泛函未必都连续.

反例 设 E 为 $C[a,b]$ 中在 $t_0 \in (a,b)$ 点可导的函数组成的线性子空间, 即

$$E = \{x \in C[a,b]: \quad x'(t_0) \text{ 存在, 其中 } t_0 \in (a,b)\}.$$

在 E 上定义泛函 f_0, 使得 $f_0(x) = x'(t_0) \ \ (\forall x \in E)$. 则 f_0 显然是线性的. 特取 $\{x_n\} \subset C[a,b]$, 使得 $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin n(t-t_0) \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$, 则有

$$||x_n|| = \max_{t\in[a,b]} \left|\frac{1}{n}\sin n(t-t_0)\right| \leqslant \frac{1}{n} \to 0 (n \to \infty).$$

但由

$$\begin{aligned}|f_0(x_n)| &= |x_n'(t_0)| \\ &= \left|\frac{1}{n}(n\cos n(t-t_0))_{t=t_0}\right| \\ &= |\cos n(t_0-t_0)| = 1 \nrightarrow 0 \ (n \to \infty)\end{aligned}$$

可知, f_0 在 θ 点是不连续的, 从而在 E 上也不连续. $\square$

例 2 $E \triangleq C(\Gamma)$ (在具有连续"曲率"的闭曲线 Γ 上定义的连续函数全体), $E_1 \triangleq C(\overline{G})$ (这里, G 为 Γ 所围成的区域). 定义从 E 到 E_1 上的算子 T: $x(t) \mapsto y(\xi,\eta)$ (其中 $y(\xi,\eta)$ 为以 $x(t)$ 为"边值"所定之偏微分方程中关于 Direchlet 问题的解), 此即"热传导"方程

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a^2\Big(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}\Big)$$

的"第一边值"条件 (Direchelet 边值条件) 之解.

从方程性质, 显然知 T 为线性算子, 且从此解对"边值"条件连续依赖, 可知 T 亦为连续算子.

例 3 设 $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ 为测度空间, 特别地, 当 $\mu(\Omega)=1$ 时, 其称为"概率空间", $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ 上可测函数 $x(\omega)$ 称为"随机变量". 对任意的 $B\in\mathcal{B}$, $\mu(B)$ 称为 B 的"概率", 而"数学期望 (均值)" $e(x)$ 定义如下:

$$e(x) = \int_\Omega x(\omega)\mu(d\omega), \quad \forall\, x = x(\omega) \in L^1(\Omega,\mathcal{B},\mu).$$

今我们特取 $\Omega=[0,1]$, μ 为 Lebesgue 测度, 则上面的 $e(x)$ 必为定义在"可测函数空间"$S[0,1]$(赋准范空间) 中所有"L 可积函数"所组成的线性子空间 $(L^1[0,1],||\cdot||^*)$(注意, 其中"成员"均在 $L^1[0,1]$ 中, 但仍以 $S[0,1]$ 的"准范数"定义度量) 上的线性而不连续泛函.

验证 显然, $e(x)$ 是"线性的". 此外, 特取 $S[0,1]$ 中的元列 $\{x_n\}$(如图 2.1 所示):

$$x_n(t) = \begin{cases} n^2 t, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n}; \\ 2n - n^2 t, & \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{n}; \\ 0, & \dfrac{2}{n} < t \leqslant 1 \end{cases}$$

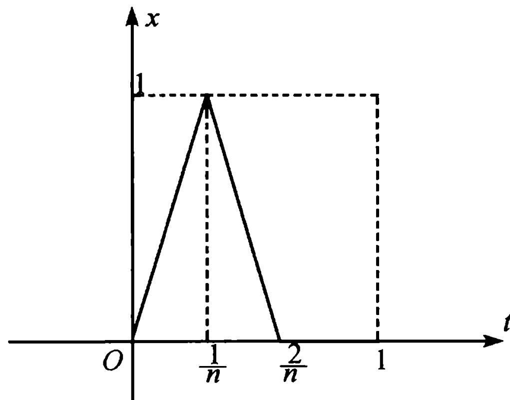


图 2.1

则必有 $||x_n||^* \to 0 (n\to\infty)$. 注意到 §1.3 中 $S[0,1]$ 空间的"准范"收敛即为"依测度"收敛, 以及

$$\{x_n\} \subset (L^1[0,1], ||\cdot||^*),$$

但却有

$$e(x_n) = \int_0^1 x_n(t)dt = 1 \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$

故 $e(x)$ 不连续. □

§2.1 附录* 赋准范、拟范空间中线性而不连续泛函的存在性

定义 8 设 E 为线性空间, H 为 E 的一个子集. 若

(i) H 中任意“有限个元”均是线性无关的,

(ii) E 中的任意一元必可表示为 H 中某有限个元的线性组合,

则称 H 为 E 中的**Hamel 基**.

注 空间 E 中的元对于 H 中的元的线性表示必唯一.

由 Zorn 引理 (例, 参见 §3.1) 不难得到以下两个命题:

命题 1 任意线性空间必存在 Hamel 基.

命题 2 任意线性空间 E 的一个子集 M, 如果是“线性无关”的元组成 (即 M 中的任有限个元必线性无关), 则 E 中必存在一个 Hamel 基 H, 使得 $M \subset H$.

证明 首先, 设集 A 满足 $M \subset A \subset E$ 且 A 中的任意“有限元”均是线性无关的 (显然 A 是存在的, 且由非零元组成), 并设这样的集合的全体组成的集类为 $\mathcal{F} = \{A\}$. 然后, 以集间的“包含关系”建立“序”关系. 我们不难看出, 如果 $\{A_\lambda: \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{F}$ 为一“全序”集, 那么集合 $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 就是 $\{A_\lambda\}$ 的一个“上界”. 从而知 $\mathcal{F}$ 是满足 Zorn 引理的条件的, 故必存在一个“极大元” B (常称为空间 E 的一组“**Hamel 基**”) .

其次, 证明上面集 B 的线性组合之全体 $[B]$ 就是整个空间 E. 事实上, 反之如果有元 $x_0 \in E$, 使其不能由 B 中的任意“有限元”线性表示, 那么由于集 $\widehat{B} = \{x_0\} \bigcup B \in \mathcal{F}$ 且有 $B \prec \widehat{B}$, 故与上面 B 为极大元的取法相矛盾, 此即导出 $E = [B]$. □

定理 1 任意一个赋“拟准范”而非赋“准范”的空间均存在着 (非 0 的) 线性而不连续的泛函.

证明 设 E 是一个赋“拟准范”而非赋“准范”的空间. 由假设, 存在 $x_0 \in E$, 使得 $x_0 \neq \theta$ 但 $\|x_0\|^\triangle = 0$. 由命题 2, 存在 E 中一 Hamel 基 H, 使得 $x_0 \in H$. 设

$$H = \{h_\lambda: \lambda \in \Lambda\} \bigcup \{x_0\}.$$

作 E 上的泛函 f_0 如下: 对任意的元 $x \in E$. 当其有 (唯一) 表达式

$$x = \xi_0 x_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k h_{\lambda_k} (\text{其中 } \{h_{\lambda_k}\}_{k=1}^{n} \subset H)$$

时, 令 $f_0(x) = \xi_0$.

由 Hamel 基的性质 (即: x 的表达式唯一), 不难验证 f_0 为线性泛函. 注意到“(拟) 准范”的三角不等式, 从设 $\|x_0\|^\triangle = 0$ 可知 $\|nx_0\|^\triangle = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$, 故

$$nx_0 \to \theta \quad (n \to \infty).$$

但是 $f_0(nx_0) = nf_0(x_0) = n \to \infty(n \to \infty)$, 故 f_0 在 $x = \theta$ 点不连续. □

定理 2 对任意无穷维的赋"准范"空间 E, 均存在着 (非 0 的) 线性而不连续的泛函.

证明 设 H 是 E 中的一个 Hamel 基, 取出一列元 $\{h_n\} \subset H$. 注意到准范"数乘"的单边连续性, 可以取出一个正数列 $\{\delta_n\}$, 使得

$$||\delta_n h_n||^* \to 0(n \to \infty). \tag{2.1.7}$$

现在, 作泛函 f_0 如下: 对于任意的元 $x \in E$, 若有

$$x = \sum_{k=1}^{m} \xi_k h_k + \sum_{i=1}^{l} \eta_i h_{\lambda_i} \quad (\text{其中: } \{h_{\lambda_i}\}_{i=1}^{l} \subset H \setminus \{h_n\}),$$

则令

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi_k}{\delta_k}.$$

显然, f_0 是线性的, 但由式 (2.1.7) , 以及

$$f_0(\delta_n h_n) = \frac{\delta_n}{\delta_n} = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

则知 f_0 在 $x = \theta$ 点不连续. □

§2.2 连续 (有界) 线性算子空间与全连续 (紧) 算子

此节仅对赋 (拟) 范空间来讨论, 因为在赋准范空间中连续线性算子未必是强有界算子, 从而无法定义该算子的范数.

定义 1 设 E 和 E_1 均为赋 (拟) 范空间, 而 $\mathcal{L}(E \to E_1)$ 为 E 到 E_1 内的线性算子全体. 在其中对任意的 $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E \to E_1), \alpha \in \mathbb{K}$, 定义加法"+": $T_1 + T_2$, 数乘"·": $\alpha \cdot T$ 如下:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x),$$
$$(\alpha \cdot T)(x) = \alpha T(x); \ \forall x \in E, \alpha \in \mathbb{K}.$$

容易验证, 此时 $\mathcal{L}(E \to E_1)$ 成为线性空间.

定义 2 设 E 和 E_1 均为赋 (拟) 范空间, 而 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 为 E 到 E_1 内的"连续"线性算子全体. 从定义 1 知, 其亦成为一线性空间. 令

$$||T|| \triangleq \inf\{\rho: \ \ ||Tx|| \leqslant \rho||x||, \ \ \forall x \in E\}$$

为有界线性**算子**T 的范数 (从 §2.1 的定理 4 知, T "连续" 必 "强有界." ” 故上定义是有意义的. 下面我们可以证明 T 确为一范数, 故 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 构成一赋 (拟) 范空间).

注 从上面定义中, 必有

$$||Tx|| \leqslant ||T|| \cdot ||x||, \quad \forall x \in E.$$

命题 1 令

$$||T||_1 \triangleq \sup_{||x||=1} ||T(x)||, \quad ||T||_2 \triangleq \sup_{||x||\leqslant 1} ||T(x)||,$$

则有 $||T|| = ||T||_1 = ||T||_2$.

证明 一方面, 由上面的注及 $||T||_1$ 和 $||T||_2$ 的定义知

$$||T||_1 \leqslant ||T||_2 = \sup_{||x||\leqslant 1} ||T(x)|| \leqslant \sup_{||x||\leqslant 1} ||T|| = ||T||.$$

另一方面, 由 $||T||_1$ 的定义有 $||T(x)|| = ||x|| \cdot ||T(\frac{x}{||x||})|| \leqslant ||x|| \cdot ||T||_1 \quad (\forall x \neq \theta)$, 故

$$||T(x)|| \leqslant ||T||_1 ||x|| \quad (\forall x \neq \theta).$$

而此式显然对 $x = \theta$ 时也成立, 故由 $||T||$ 的定义知

$$||T|| \leqslant ||T||_1.$$

综合以上两方面, 则可得到本命题结论. □

为了下面一些定理的需要, 再介绍一个命题, 它的证明将在第三章讲述 Hahn-Banach 定理的推理时给出.

命题 2 (无穷多个连续线性泛函的存在定理) 设 E 为赋 (拟) 范空间, 对于任意的元 $x \neq \theta$(对应地 $||x_0|| \neq 0$), 必存在 E 上一个连续线性泛函 f_0, 使得 $||f_0|| = 1$ 及 $f_0(x_0) = ||x_0||$.

(注意, 由于在定义 2 中, 当令 $E_1 = \mathbb{K}$ (数域) 时显然看出, 此时 $\mathcal{B}(E \to \mathbb{K})$ 即为 E 上的所有连续线性泛函的全体, 通常记为 E^*, 因此, 对于 E 上的任意连续线性泛函 f, 范数 $||f||$ 是有定义的.)

有了上面的命题, 我们可以得到下面的定理:

定理 1 设 E 为赋拟范空间, E_1 为赋 (拟) 范空间, 则所有连续线性算子 T 所组成的空间 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 赋以上面定义的范数 $||T||$, 亦构成一个赋 (拟) 范空间.

证明 首先说明, $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 必不是零空间 (即仅有 "零" 算子的空间), 从而相应的讨论才有意义. 事实上, 从上面命题 2, 对 $||x_0|| \neq 0$, 必存在连续线性泛函 f_0,

使得: $||f_0|| = 1$ 及 $f_0(x_0) = ||x_0||$. 这样, 任取 $y_1 \in E_1(||y_1|| \neq 0)$, 作 E 到 E_1 内的算子 T_1 如下:

$$T_1(x) = f_0(x)y_1, \quad \forall x \in E,$$

则 T 显然是一个连续线性算子, 而且 $T_1 \neq 0$(零算子).

下面验证 $||T||$ 是一个 (拟) 范数:

(i) 对任意 $T \in \mathcal{B}(E \to E_1)$, 显然有 $||T|| \geqslant 0$, 并且当 $||T|| = 0$ 时, 由命题 1 即知 $\sup_{x \in S_1(E)} ||Tx||_1 = 0$, 也即

$$||Tx||_1 = 0, \quad \forall x \in S_1(E).$$

故当 E_1 是赋 "范" 空间时, 便有 $T(x) = \theta \quad (\forall x \in S_1(E))$. 由此可知 $T(x) = ||x||T(\frac{x}{||x||}) = \theta \quad (\forall ||x||^{\triangle} \neq 0)$. 再由 §2.1 的命题 8 可知, 当 $||x||^{\triangle} = 0$ 时, 亦有 $||T(x)|| = 0$. 综合上面两种情形便可导出 $T(x) \equiv \theta \ (\forall x \in E)$, 也即 $T = 0$(零算子).

此外, 由 $||T||$ 定义容易看出

(i) $||T_1 + T_2|| \leqslant ||T_1|| + ||T_2||$.

(ii) $||\alpha T|| = |\alpha|||T||, \ \forall \, T_1, T_2, T \in \mathcal{B}(E \to E_1), \ \alpha \in \mathbb{K}$.

因而证得 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 在上面定义的范数 $||T||$ 之下构成了一个赋 (拟) 范空间. □

注 与上面类似, 当 E 为赋 β 拟范空间, E_1 为赋 β (拟) 范空间 $(0 < \beta < 1)$ 时, 其相应的连续线性算子空间 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 仍可按上面定义 2, 构成一个赋 β(拟) 范空间.

事实上, 如果 $T \in \mathcal{B}(E \to E_1)$, 则由 §2.1 中的命题 2 以及定理 3 的证明可知, T 亦为有界算子, 因此存在 $\rho > 0$, 使得

$$\sup_{||x||=1} ||T(x)|| \leqslant \rho.$$

于是, 对任意元 $||x|| \neq 0$, 由于 $\frac{x}{||x||^{\frac{1}{\beta}}} \in S_1(E)$, 故

$$\rho \geqslant \left\|T\left(\frac{x}{||x||^{\frac{1}{\beta}}}\right)\right\|_1 = \left\|\frac{T(x)}{||x||^{\frac{1}{\beta}}}\right\|_1 = ||x||^{-1}||T(x)||_1.$$

也即导出

$$||T(x)||_1 \leqslant \rho||x||.$$

当再次注意到 §2.1 的命题 8 及定理 3, 则知上面的不等式对 $||x|| = 0$ 也是成立的 (即使当 E 和 E_1 是赋 β 拟范空间时).

由此导出

$$||T(x)|| \leqslant \rho||x||, \quad \forall x \in E.$$

这样一来, 我们可以类似上面定义 2 来定义算子 T 的范数 $||T||$. 并且完全类似上面定理 1 的证明, 可知 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 此时亦为赋 β(拟) 范空间 (但有可能只含有零算子).

定义 3 设 E 和 E_1 为拟范空间 (或 β 拟范空间, $0 < \beta < 1$), 则在其连续线性算子空间 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 上可定义两种"拓扑"("收敛性"):

(i) 按 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 拟范 (β 拟范) 收敛, 称**一致收敛**. 即有: $T_n \overset{(一致)}{\longrightarrow} T_0 \ (n \to \infty)$ 当且仅当 $||T_n - T_0|| \to 0 \ (n \to \infty)$.

(ii) 算子 T_n **强收敛**于 T_0, 是指

$$||T_n(x) - T_0(x)||_1 \to 0(n \to \infty), \quad \forall x \in E.$$

注 设 $\{T_n, T_0\} \subset \mathcal{B}(E \to E_1)$, 则有

$$||T_n - T_0|| \to 0 \Rightarrow ||T_n(x) - T_0(x)||_1 \to 0, (n \to \infty), \quad \forall x \in E$$

(即: 算子列的一致收敛蕴含着其强收敛).

事实上, 仅注意到关系式

$$||(T_n - T_0)(x)|| \leqslant ||T_n - T_0|| \cdot ||x|| \quad (\forall x \in E, n \in \mathbb{N})$$

即可导出结论.

下面的定理是显然的:

定理 2 在定理 1 的假设下, 如 $\{T_n, T_0\} \subset \mathcal{B}(E \to E_1)$, 则 $||T_n - T_0|| \to 0 \Longleftrightarrow$ 在 E 的任意"有界"集 (此时也即"按范有界集") 上, $T_n(x)$ "一致收敛于" $T_0(x)$.

定理 3 设 E 为"拟范"空间, E_1 为赋范空间, 则

"赋范"空间 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ "完备" $\Longleftrightarrow E_1$ "完备".

证明 "$\Rightarrow$": 对任一 Cauchy 列 $\{y_n\} \subset E_1$, 由前面 (有关无穷多个连续线性泛函的存在) 的命题 2 可知: 任取 $x_0 \in E$, 使得 $||x_0|| \neq 0$, 则存在 $f_0 \in E^*$, 使得 $||f_0|| = 1$ 及 $f_0(x_0) = ||x_0||$ (即 $f_0 \neq \theta$). 作算子列 $\{T_n\}$, 使得

$$T_n(x) = \frac{f_0(x)}{f_0(x_0)} y_n, \quad \forall x \in E \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

那么, $T_n (n \in \mathbb{N})$ 显然是从 E 到 E_1 的线性算子, 且有

$$\begin{aligned} ||T_n(x)||_1 &= \left\| \frac{f_0(x)}{f_0(x_0)} y_n \right\|_1 = \frac{||y_n||_1}{|f_0(x_0)|} |f_0(x)| \\ &\leqslant \frac{||y_n||_1}{|f_0(x_0)|} ||f_0|| \cdot ||x||, \quad \forall x \in E \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

由此可知 $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(E \to E_1)$.

此外, 又从关系式

$$\begin{aligned}||T_n - T_m|| &= \sup_{||x||=1} ||(T_n - T_m)(x)||_1 \\ &= \sup_{||x||=1} \left\| \frac{f_0(x)}{f_0(x_0)}(y_n - y_m) \right\|_1 \\ &\leqslant \sup_{||x||=1} \frac{||y_n - y_m||_1}{|f_0(x_0)|} ||f_0|| \cdot ||x|| \\ &= \frac{||y_n - y_m||_1}{|f_0(x_0)|} \to 0 \quad (n, m \to \infty)\end{aligned}$$

知 $\{T_n\}$ 为空间 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 内的一个 Cauchy 列, 因而由假设 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 的 “完备性” 可知: 存在 $T_0 \in \mathcal{B}(E \to E_1)$, 使得

$$||T_n - T_0|| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

从而可以得到 $T_n(x_0) \to T_0(x_0) \quad (n \to \infty)$. 此即导出

$$y_n \to T_0(x_0)(\in E_1) \quad (n \to \infty),$$

也即证得 E_1 是完备的.

“$\Leftarrow$” : 对任意的 Cauchy 列 $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(E \to E_1)$ 及任意的元 $x \in E$, 均有

$$\begin{aligned}||T_n(x) - T_m(x)|| &= ||(T_n - T_m)(x)|| \\ &\leqslant ||T_n - T_m|| \cdot ||x|| \to 0 (n, m \to \infty),\end{aligned}$$

此即 $\{T_n(x)\}$ 为 E_1 中的 Cauchy 列. 故由 E_1 是 “完备” 的假设, 知其在 E_1 中有收敛元. 由此当令

$$T_0(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x) \quad (x \in E)$$

时, 显然由 T_n 的假设可知, T_0 是 “线性” 的.

我们证明 $||T_n - T_0|| \to 0 \, (n \to \infty)$.

事实上, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 由 $||T_n||$ 为 Cauchy 列, 可知存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$||T_n - T_m|| < \varepsilon \quad (\forall n, m \geqslant N).$$

由此, 对任意的元 $x \in E$, 有

$$\begin{aligned}||T_n(x) - T_m(x)|| &\leqslant ||T_n - T_m|| \cdot ||x|| \\ &< \varepsilon \cdot ||x|| \quad (\forall n, m \geqslant N).\end{aligned}$$

在上式中令 $m \to \infty$ 便可得到

$$\|T_n(x) - T_0(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\| \quad (\forall x \in E).$$

由此导出

$$T_n - T_0 \in \mathcal{B}(E \to E_1) \quad (\forall n \geqslant N).$$

$$\|T_n - T_0\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n(x) - T_0(x)\| \leqslant \varepsilon \quad (\forall n \geqslant N).$$

观察此两个关系式, 由前者并注意到 $T_n \in \mathcal{B}(E \to E_1)(n \geqslant N)$ 以及 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 是线性空间, 可知: $T_0 = -(T_n - T_0) + T_n \in \mathcal{B}(E \to E_1)$. 由后者及开始假设的 ε 的任意性, 我们就可得到

$$\|T_n - T_0\| \to 0(n \to \infty).$$

因此, 证得空间 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 是完备的. □

注 设 E 为任意拟范空间, 当记 $E^* = \mathcal{B}(E \to \mathbb{K})$ 时, E^* 即为 E 上所有连续线性泛函之全体. 从定理 3 立即可知 E^* 必为 Banach 空间.

下面介绍另一类算子, 即全连续算子 (紧算子).

定义 4 设 E 为拟范空间, E_1 为赋范空间. T 为 E 到 E_1 内的线性算子. 若 T 将 E 中任意"有界集"映为"列紧集"(相对紧集, 也即闭包为自列紧或紧集之集), 则称 T 为**全连续算子 (或紧算子)**.

注 1 由于度量空间"列紧集"必为"有界集"(此时注意到:"有界"与 (拟) 范有界是等价的), 便从定理 3 可知 T 亦为连续算子, 即: 全连续算子 (紧算子) 一定是连续算子.

注 2 连续算子未必是全连续算子. 我们可以参看下面的反例:

反例 设 E 为任意赋范空间, $\dim E = \infty$, 则恒等算子 I: $E \to E$ 必为连续算子 (也即 $I \in \mathcal{B}(E) \triangleq \mathcal{B}(E \to E)$). 从赋范空间基本知识 (参见 §1.5 的定理 1) 可知, 由于 E 是无限维的, 故 E 的单位球面 S_1 非列紧. 这就是说 I 将 E 的有界集 S_1 映成为非列紧集, 从而说明 I 不是全连续的.

定义 5 在 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 中所有"全连续"算子全体记为 $\mathcal{K}(E \to E_1)$.

下面证明 $\mathcal{K}(E \to E_1)$ 为 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 的闭线性子空间. 而且, 当 $E = E_1$ 时, $\mathcal{K}(E)$ 还是 $\mathcal{B}(E)$ 的一个"理想" (ideal) (即满足条件

$$\mathcal{K}(E) \cdot \mathcal{B}(E) \subset \mathcal{K}(E), \quad 及\, \mathcal{B}(E) \cdot \mathcal{K}(E) \subset \mathcal{K}(E)).$$

定理 4 设 E 为拟范空间, E_1 为赋范空间, 则当 $\dim E_1 < \infty$ 时, 任意 E 到 E_1 的连续线性算子必为全连续算子.

(此时即有: $\mathcal{B}(E \to E_1) = \mathcal{K}(E \to E_1)$.)

证明 对于任意的 $T \in \mathcal{B}(E \to E_1)$, 如果 $M \subset E$ 为一有界集, 由 §2.1 的定理 3 可知, $T(M)$ 必为赋范空间 E_1 内的有界集, 从而必有 E_1 中某一原心球 B_{r_0}, 使得 $T(M) \subset B_{r_0}$. 注意到 §1.5 中有关赋范空间有限维的特征的定理 (参见定理 1 及后面推理), 我们知道此时闭球 B_{r_0} 必是列紧集. 故从上面的包含关系立即导出 $T(M)$ 是相对列紧集, 因此 T 是全连续算子. □

下面仍然假设 E 为拟范空间, E_1 为赋范空间. 从全连续算子和线性连续 (有界) 算子的定义及性质, 我们很容易直接导出下面两个定理:

定理 5 全连续算子的全体 $\mathcal{K}(E \to E_1)$ 必为线性空间.

定理 6 对任意的 $A \in \mathcal{K}(E), B \in \mathcal{B}(E)$ 必有 $A \cdot B, B \cdot A \in \mathcal{K}(E)$.

最后, 我们再给出一个定理 (注意在其证明过程中, 再次用到选子列的 "对角线" 方法).

定理 7 设 E_1 为 Banach 空间, 则 $\mathcal{K}(E \to E_1)$ 在 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 中是闭集.

(即: 如果 $\{A_n\} \subset \mathcal{K}(E \to E_1)$ 均为"全连续"线性算子, 且存在 $A \in \mathcal{B}(E \to E_1)$, 使得 $||A_n - A|| \to 0 (n \to \infty)$, 则 $A \in \mathcal{K}(E \to E_1)$.)

证明 设 M 为 E 中 "有界集", 任取 M 中一点列 $\{x_n\}$, 由 A_1 是 "全连续" 的, $\{x_n\}$ 是有界集, 故存在子列 $\{x_{1,n}\} \subset \{x_n\}$, 使得 $\{A_1(x_{1,n})\}$ 收敛; 又由 A_2 为 "全连续" 的, $\{x_{1,n}\}$ 是有界集, 故存在 $\{x_{2,n}\} \subset \{x_{1,n}\}$, 使得 $\{A_2(x_{2,n})\}$ 收敛; ……; 一般地, 如 $\{x_{k,n}\}$ 已经选出, 由其 "有界" 性以及 A_{k+1} "全连续", 故存在 $\{x_{k+1,n}\} \subset \{x_{k,n}\}$, 使得 $\{A_{k+1}(x_{k+1,n})\}$ 收敛 $(\forall\, k \in \mathbb{N})$; …… .

下面证明 $\{A(x_{k,k})\}$ 必为收敛点列: 由 E_1 空间完备性的假设, 仅需证明 $\{A(x_{k,k})\}$ 为一 Cauchy 点列. 注意到

$$\begin{aligned}||A(x_{m,m}) - A(x_{n,n})|| \leqslant& ||A(x_{m,m}) - A_k(x_{m,m})|| \\ &+ ||A_k(x_{m,m}) - A_k(x_{n,n})|| + ||A_k(x_{n,n}) - A(x_{n,n})|| \\ \leqslant& ||A - A_k|| \cdot ||x_{m,m}|| + ||A_k - A|| \cdot ||x_{n,n}|| \\ &+ ||A_k(x_{m,m}) - A_k(x_{n,n})||.\end{aligned}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$, 由设 $||A_k - A|| \to 0\,(k \to \infty)$, 故存在 k_0, 使得

$$||A_{k_0} - A|| < \varepsilon/3\rho \quad (\text{其中}, \sup_{x\in M}||x|| < \rho). \tag{2.2.1}$$

当 $n \geqslant k_0$ 时, 均有 $\{x_{n,i}\}_i \subset \{x_{k_0,i}\}_i$, 故从 $\{A_{k_0}(x_{k_0,i})\}_i$ 收敛, 知其子列 $\{A_{k_0}(x_{n,n})\}_n$ $(n \geqslant k_0)$ 必收敛于相同的极限. 故对上面的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n, m > N$ 时有

$$||A_{k_0}(x_{m,m}) - A_{k_0}(x_{n,n})|| < \varepsilon/3. \tag{2.2.2}$$

由式 (2.2.1) 和 (2.2.2) 则可导出：当 $n, m > N$ 时, 便有

$$||A(x_{m,m}) - A(x_{n,n})|| < \frac{\varepsilon}{3\rho} \cdot \rho + \frac{\varepsilon}{3\rho} \cdot \rho + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

即 $\{A(x_{k,k})\}$ 为 E_1 中的 Cauchy 列, 从而为收敛列. 由此证得 $A \in \mathcal{K}(E \to E_1)$, 也即 $\mathcal{K}(E \to E_1)$ (按算子范数) 为闭集. □

§2.3　共轭空间与自反空间的概念

在上节, 我们介绍了有界线性算子空间 $\mathcal{B}(E \to E_1)$. 作为有界线性算子空间的一个特例, 赋范空间 E 上的全体有界线性泛函也构成一赋范空间, 而且由于数域的完备性, 可知这是一个 Banach 空间, 我们记为 E^*, 称它为 E 的 "共轭空间". 本节将介绍有关共轭空间的基本知识, 并且借助于共轭空间的概念引入在泛函分析理论中起着重要作用的一类赋范空间 —— 自反空间的概念.

为了解释有界线性泛函 f 的几何意义, 我们给出下面的定义:

定义 1　由 E 上一个非零线性泛函 f 及数 $c \in \mathbb{K}$ 所定义的集合

$$H_f = \{x \in E\colon \quad f(x) = c\}$$

称为 E 中的**超平面**.

注　我们由定义 1 不难看出, 上面 "超平面" 的概念, 即是有限维时平面概念的推广. 当 $c = 0$ 时便得到了 E 的一个线性子空间,

$$N_f = \{x \in E\colon \quad f(x) = 0\}$$

称为 f 的**核**(或**零**) 空间. 显然, 对于任意的 $x_0 \in H_f$ 有 $H_f = x_0 + N_f$, 从而有 "H_f 闭当且仅当 N_f 闭". 设 $x_0 \notin N_f$, 则对于任意的 $x \in E$, 有

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0\right) + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0.$$

注意到上式的右端第一部分在 N_f 中, 故知空间 E 可分解为

$$E = \operatorname{span}\{x_0\} + N_f,$$

因此, 零空间 N_f 及超平面 H_f 均为比整个空间 "低一维" 的线性子空间及仿射面.

定理 1　f 是 E 上有界线性泛函的充要条件是其超平面

$$H_f = \{x \in E\colon f(x) = c_0\}$$

为闭集.

证明 “$\Rightarrow$”：由于有界线性泛函必是连续线性泛函，从而其零空间是闭的，故其超平面 H_f 也是闭的.

“$\Leftarrow$”：设 N_f 是闭的. 不妨假设 $N_f \neq E$. 反之，若 f 是无界的，则存在 $x_n \in E$，使得

$$||x_n|| \leqslant 1, \quad |f(x_n)| \geqslant n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

取 $x_0 \in E$，使得 $x_0 \notin N_f$. 令

$$y_n = \frac{1}{f(x_n)}x_n - \frac{1}{f(x_0)}x_0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

则 $y_n \in N_f$ 且 $y_n \to -\frac{1}{f(x_0)}x_0(n \to \infty)$. 但 $-\frac{1}{f(x_0)}x_0 \notin N_f$，与 N_f 闭矛盾! □

下面给出有界线性泛函 f 的范数 $||f||$ 的几何意义：

定理 2 赋范线性空间 E 上的非零有界线性泛函 f 的范数 $||f||$ 即是 E 中的“零元”到其超平面

$$H_f = \{x \in E: \quad f(x) = 1\}$$

的距离 d 的“倒数”.

证明 首先，我们有 $1 = f(x) \leqslant ||f|| \cdot ||x|| \ \ (\forall x \in H_f)$，从而

$$d = \inf_{x \in H_f} ||x|| \geqslant \frac{1}{||f||}.$$

另一方面，由泛函范数的定义，对于任意 $\varepsilon > 0$(且设 $\varepsilon < \|f\|$)，存在 $x_0 \in E, ||x_0|| = 1$，使得 $f(x_0) > ||f|| - \varepsilon$. 注意到 $\frac{x_0}{f(x_0)} \in H_f$，便得到

$$d \leqslant \left\|\frac{x_0}{f(x_0)}\right\| = \frac{1}{f(x_0)} \leqslant \frac{1}{||f|| - \varepsilon}.$$

由 ε 的任意性便得到 $d \leqslant \frac{1}{||f||}$. 结合上面两部分便可导出 $||f|| = \frac{1}{d}$. □

定义 2 设 E 为赋范空间，则 E 上所有连续 (有界) 线性泛函之全体 $\mathcal{B}(E \to \mathbb{K})$ 称为 E 的**共轭空间**，记为 E^* 或 E'. 若 $E^* = E$，则称 E 为**自共轭空间**.

注 对于赋范空间 E，由于我们一开始就约定过 E 不是“零空间”，由后面 §3.2 节要讲的 Hahn-Banach 定理可知 $E^* \neq \{0\}$. 特别地，从 §2.2 的命题 2，我们还知道：

对于任意 $x \neq \theta$，存在 $f \in E^*$，使得 $||f|| = 1$，且 $f(x) = ||x||(\neq 0)$.

定义 3 当 E 为赋范空间时，可知 $E^* \neq \{0\}$. 且由 §2.2 定理 1 可知 E^* 亦为一赋范空间. 故又使用 Hahn-Banach 定理知 $E^{**} = (E^*)^* \neq \{0\}$ 且 E^{**} 亦为赋范空间. 现定义 E 到 E^{**} 的映像 J 如下：

$$J(x)(x^*) = x^*(x) \ \ (\forall x^* \in E^*).$$

这样定义的映像 J 称为**典则映像**. 如果此映像是"满"的, 即有 $J(E) = E^{**}$, 则称 E 为**自反空间**.

注 1 典则映像 J 的确为 E 到 E^{**} 的映像. 也即有: $J(x) \in E^{**}$ $(\forall\, x \in E)$. 事实上, 从 J 的定义, 其显然为线性的, 且从

$$|[J(x)](x^*)| = |x^*(x)| \leqslant ||x^*|| \cdot ||x||, \quad \forall\, x^* \in E^*,$$

知 $J(x)$ 是 E^* 上的"强有界"泛函. 因此, 从 §2.1 中定理 4, 我们立即导出 $J(x) \in (E^*)^* = E^{**}$.

为导出下面的注 2, 必须介绍下面一个与 (连续线性) 泛函的范数定义相似的命题:

命题 设 E 为赋范空间, 则有

$$||x|| = \sup_{f \in S_1(E^*)} |f(x)| \quad (\forall\, x \in E).$$

证明 一方面显然有

$$\sup_{f \in S_1(E^*)} |f(x)| \leqslant \sup_{f \in S_1(E^*)} ||f|| \cdot ||x|| = ||x|| \quad (\forall\, x \in E).$$

另一方面, 当 $x \neq \theta$ 时, 由 §2.2 中的命题 2 (即下一章要讲的 Hahn-Banach 定理) 可知, 存在 $f_x \in E^*$, 使得 $||f_x|| = 1, f_x(x) = ||x||$ 由此导出

$$||x|| = f_x(x) \leqslant \sup_{f \in S_1(E^*)} |f(x)|.$$

显然, 此式当 $x = \theta$ 时也成立.

综合以上两方面, 我们证得本命题. □

注 2 典则映像 J 是保范映像.

事实上, 从注 1 中关系式我们可以得到

$$||J(x)|| \leqslant ||x|| \quad (\forall\, x \in E).$$

另一方面, 由上命题可知

$$\begin{aligned} ||x|| &= \sup_{x^* \in S_1(E^*)} |x^*(x)| = \sup_{x^* \in S_1(E^*)} |J(x)(x^*)| \\ &= ||J(x)||, \quad \forall\, x \in E, \end{aligned}$$

因此导出

$$||J(x)|| = ||x||, \quad \forall\, x \in E.$$

从上面结果, 我们可以得到赋范线性空间 E 与其二次共轭空间 E^{**} 关系的一个定理.

定理 3 设 E 是一赋范线性空间, 则 E 必在"自然映像"下等价于 E^{**} 的一个线性子空间 (常记为 $E\subset E^{**}$); 而且, 如果 E 是完备的, 那么 E 必等价于 E^{**} 的一个闭线性子空间.

证明 对任意 $x\in E$, 定义 E^* 上一个泛函 $\widetilde{x}$ 为

$$\widetilde{x}(f)=f(x),\quad \forall f\in E^*.$$

易见,

$$\widetilde{x}(\alpha f)=\alpha\widetilde{x}(f),\quad \widetilde{x}(f+g)=\widetilde{x}(f)+\widetilde{x}(g),\quad \forall f,g\in E^*\quad \forall \alpha\in\mathbb{K}.$$

记上面从 E 到 E^{**} 内的映像 $x\mapsto\widetilde{x}$ 为 J, 下面证明 J 即为所求的"等价"映像:

1) J 是一对一的映像. 事实上, 如果 $\widetilde{x},\widetilde{y}\in E^{**}$, 使得

$$\widetilde{x}(f)=\widetilde{y}(f),\qquad \forall f\in E^*,$$

则由 J 的定义, 必存在 $x,y\in E$, 使得

$$\widetilde{x}(f)=f(x),\quad \widetilde{y}(f)=f(y),\quad \forall f\in E^*,$$

从而得到 $f(x)=f(y)\ \ (\forall f\in E^*)$. 因而由后面 §3.2 中的 Hahn-Banach 定理的推理立即得出 $x=y$.

2) J 是分配的映像. 事实上, 对任意的 $\alpha\in\mathbb{C}, f\in E^*$, 有

$$\begin{aligned}\widetilde{(x+y)}(f)&=f(x+y)=f(x)+f(y)=\widetilde{x}(f)+\widetilde{y}(f),\\ \widetilde{(\alpha x)}(f)&=f(\alpha x)=\alpha f(x)=\alpha\widetilde{x}(f)=(\alpha\widetilde{x})(f).\end{aligned}$$

3) J 是保范的. 事实上, 此已由上面的注 2 得出.

这样一来, 我们已证得 J 是一个等价映像. 因此, 空间 E 必定与 E^{**} 的一个线性子空间等价, 也即得出 $E\subset E^{**}$, 从而证得定理的前半命题.

下面, 证明定理的后半命题. 为此我们只要证明, 当 E 是 Banach 空间时, 在 J 的作用下, E 的映像 $J(E)$ 在 E^{**} 内是闭集就可以了. 今设 $\{\widetilde{x}_n\}\subset J(E)$, 且有 $\widetilde{x}_n\to x_0^{**}\in E^{**}(n\to\infty)$, 则由于 J 是一对一的保范映像, 故必存在 $\{x_n\}\subset E$, 使得 $J(x_n)=\widetilde{x}_n(n=1,2,\cdots)$, 并有

$$\begin{aligned}||x_n-x_m||&=||J(x_n)-J(x_m)||\\ &=||\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_m||\to 0\ \ (n,m\to\infty).\end{aligned}$$

由此可知 $\{x_n\}$ 是 E 中的一个 Cauch 列, 而从 E 的完备性可得一元 $x_0\in E$, 使得 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 再一次利用 J 的保范性, 我们还有

$$||\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_0||=||J(x_n)-J(x_0)||=||x_n-x_0||\to 0\ \ (n\to\infty).$$

最后由元列收敛的唯一性便可导出 $x_0^{**} = \widetilde{x}_0 = J(x_0) \in J(E)$, 也即 $J(E)$ 在 E^{**} 中是闭的. □

注 3 特别值得注意的是, 当我们说 Banach 空间是"自反"的时候, 绝不能简单地理解为 $E \simeq E^{**}$ (这里"$\simeq$"如 §1.13 中一样理解为"等距同构"), 而是必须在典则映像 J 这样一个等距映像下的同构, 否则是不正确的. James 在 1951 年发表的文章已举出了反例 [6].

有了关于共轭空间的概念, 就可以引出共轭算子的定义:

定义 4 设 T 是从赋范线性空间 E 到 E_1 内的"稠定"(即 T 的定义域 $D(T)$ 在 E 中稠) 线性算子, F_1^* 为 E_1^* 的线性子空间. 如果对于每个 $g \in F_1^*$, 相应的 $f(x) = g[T(x)]$ 均为 $D(T)$ 上的有界线性泛函, 那么可知其必可以唯一地延拓成为 E 上的有界线性泛函 (见本章习题 2.11), 仍然记为 f. 由此就可以定义一个算子 T^*, 使得

$$T^*(g) = f, \quad \forall\, g \in \mathcal{D}(T) = F_1^*(\subset E_1^*). \tag{2.3.1}$$

且 T^* 是一意确定的从 E_1^* 内到 E^* 内的线性算子, 称为 T 的**共轭算子**.

定理 4 如果 T 为整个空间上定义的有界线性算子, 那么式 (2.3.1) 相应的 f 必为 E 上的有界线性泛函, 其相应的共轭算子 T^* 必为 E_1^* 上的有界线性算子, 而且有 $||T^*|| = ||T||$.

证明 首先, 前半段结论是容易得到的, 只要注意到 f 的定义就不难由:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |g(T(x))| \leqslant ||g|| \cdot ||T(x)|| \\ &\leqslant (||g|| \cdot ||T||)\, ||x||, \quad \forall\, x \in E \end{aligned}$$

得出. 至于后半段结论, 注意到共轭算子 T^* 的定义, 则有

$$|T^*(g)(x)| = |g[T(x)]| \leqslant (||g|| \cdot ||T||)||x||, \quad \forall\, x \in E, g \in E_1^*.$$

因此, $||T^*(g)|| \leqslant ||T|| \cdot ||g|| \quad (\forall\, g \in E_1^*)$, 从而有

$$||T^*|| \leqslant ||T||. \tag{2.3.2}$$

这样, 当与原来的 T 一样讨论 T^* 时, 由有界线性算子 T^* 又可导出一个由 E^{**} 到 E_1^{**} 内的有界线性算子 T^{**} (即 T^* 的共轭算子), 并且类似地亦有

$$||T^{**}|| = ||(T^*)^*|| \leqslant ||T^*||. \tag{2.3.3}$$

于是, 由算子 T^{**} 的定义, 可知对任意 $x^{**} \in E^{**}$ 均有

$$[T^{**}(x^{**})](g) = x^{**}[T^*(g)], \quad \forall g \in E_1^*.$$

根据定理 3 关于 $E \subset E^{**}$ 的结论, 对任意的 $x \in E$, 设 $\widetilde{x} = J(x)$, 则有 $||\widetilde{x}|| = ||x||$, 且有

$$\begin{aligned}[T^{**}(\widetilde{x})](g) &= \widetilde{x}[T^*(g)] = [T^*(g)](x) \\ &= g[T(x)], \quad \forall g \in E_1^*.\end{aligned}$$

同样, 注意到 $E_1 \subset E_1^{**}$, 由以上讨论, 便可得到

$$||T^{**}(\widetilde{x})|| = ||T(x)||, \quad \forall x \in E.$$

由 $||\widetilde{x}|| = ||x|| \quad (\forall x \in E)$ 及上式, 则可导出

$$\begin{aligned}||T|| &= \sup_{||x|| \leqslant 1} ||T(x)|| && (2.3.4)\\ &= \sup_{||\widetilde{x}|| \leqslant 1} ||T^{**}(\widetilde{x})|| \\ &\leqslant \sup_{\substack{||x^{**}|| \leqslant 1 \\ x^{**} \in E^{**}}} ||T^{**}(x^{**})|| = ||T^{**}||. && (2.3.5)\end{aligned}$$

最后, 综合式 (2.3.2)~(2.3.4), 我们立即得出 $||T|| = ||T^*||$. □

从定理证明中不难看出, T^{**} 可以视为空间 E 上的算子 T 在 E^{**} 上的保范延拓算子.

§2.4 共轭空间的例子

本节将给出共轭空间、自反空间和非自反空间的例子.

下面, 我们先给出几个 "数列" 空间的共轭空间的例子. 为了得到第一个例子, 我们给出下面的命题:

命题 1 为了有界线性泛函 $f \in (c_0)^*$ 必须且只须有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \xi_n, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (c_0),$$

其中 $f = \{f_n\} \in (\ell^1)$. 而且在这种情形下, 必有

$$||f|| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|.$$

证明 "$\Leftarrow$": 如上面所设

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \xi_n, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (c_0).$$

由于 $f=\{f_n\}\in(\ell^1)$, 故有

$$
\begin{aligned}
|f(x)|&=\Big|\sum_{n=1}^{\infty}f_n\cdot\xi_n\Big|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\cdot|\xi_n|\\
&=\sup_{k\in\mathbb{N}}|\xi_k|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\\
&=\|x\|\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|,\quad \forall\, x=\{\xi_n\}\in(c_0).
\end{aligned}
$$

因此 f 是强有界的. 而其线性是显然的, 即说明了 $f\in(c_0)^*$, 而且有

$$
\|f\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|.
$$

"$\Rightarrow$": 设 $f\in(c_0)^*$, 令 (c_0) 中的元

$$
e_n=(0,0,\cdots,\overset{(n)}{1},0,\cdots)\quad(\forall\, n\in\mathbb{N}).
$$

并令 $f_n=f(e_n)\ \ (\forall\, n\in\mathbb{N})$, 且取元列

$$
x_m=(\mathrm{sgn}f_1,\mathrm{sgn}f_2,\cdots,\mathrm{sgn}f_m,0,\cdots)\quad(\forall\, m\in\mathbb{N}),
$$

(其中 $\mathrm{sgn}\alpha$ 表示 α 的符号, 即有 $|\alpha|\mathrm{sgn}\alpha=\overline{\alpha}$). 显然 $x_m\in(c_0)$, 且 $\|x_m\|\leqslant1(\forall\, m\in\mathbb{N})$. 由于

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}|f_n|&=\sum_{n=1}^{m}f_n\mathrm{sgn}f_n=\sum_{n=1}^{m}f(e_n)\mathrm{sgn}f_n\\
&=f\Big(\sum_{n=1}^{m}(\mathrm{sgn}f_n)e_n\Big)=f(x_m) &(2.4.1)\\
&\leqslant\|f\|\cdot\|x_m\|\leqslant\|f\|, &(2.4.2)
\end{aligned}
$$

当令 $m\to\infty$ 时, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\leqslant\|f\|$, 即 $\{f_n\}\in(\ell^1)$.

另外, 对于任意的 $x=\{\xi_n\}\in(c_0)$, 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n\xi_n$ 是收敛的. 当令

$$
x_m=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,0,0,\cdots)\quad(\forall\, m\in\mathbb{N})
$$

时, 显然有 $\|x_m-x\|\to0$. 故由泛函 f 的连续性可知

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\lim_{m\to\infty}f(x_m)=\lim_{m\to\infty}f\Big(\sum_{n=1}^{m}\xi_ne_n\Big)\\
&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\xi_nf(e_n)
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\xi_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n f_n \text{ (泛函表示式)}.$$

而且与“$\Leftarrow$”中证明类似, 有

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n f_n\right| \leqslant \|x\|\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|,$$

故 $\|f\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$. 从而结合式 (2.4.2) 的结果, 我们导出

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|. \qquad \square$$

由命题 1, 当令 φ 为 $(c_0)^*$ 到 (ℓ^1) 上的映像使得

$$\varphi\colon\quad f \mapsto \{f_n\} \in (\ell^1)$$

时, 则有

命题 1′* φ 是 $(c_0)^*$ 到 (ℓ^1) 上的线性等距同构映像.

由命题 1 和命题 1′ 我们直接得到下面例子:

例 1 $(c_0)^* = \ell^1$.

类似地, 我们有

例 2 $(c)^* = \ell^1$.

注 需要注意的是, 由于空间 (c) 的 Schauder 基是 $\{e_0, e_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, 其中

$$e_0 = (1, 1, \cdots, 1\cdots);\quad e_n = (0, \cdots, \overset{(n)}{1}, 0, \cdots),\quad n \in \mathbb{N}.$$

它和 (c_0) 中的 Schauder 基是不同的, 故在这种情形下结论也稍有不同. 此时我们有如下结论:

命题 2 为了有界线性泛函 $f \in (c)^*$ 必须且只须有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \xi_n,\quad \forall x = \{\xi_n\} \in (c)$$

(其中: $f = \{f_n\} \in (\ell^1)$ 以及 $\xi_0 = \lim_{n\to\infty}\xi_n, f_0 = f(e_0) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n$), 而且在这种情形下, 必有

$$\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty}|f_n|.$$

证明 其证明基本类似于命题 1 的证明, 我们仅将不同点说一下.

观察命题 1 的证明, 我们发现当将 (c_0) 变为 (c) 时, 有一步过不去, 那就是在 (c) 中, 若 $x_0=\{\xi_n\}\in(c)$, 且有 $\xi_n\to\xi_0\neq 0\ \ (n\to\infty)$ 时, 同样取 $x_m=(\xi_1,\cdots,\xi_m,0,0,\cdots)(m\in\mathbb{N})$, 则下式:

$$\|x_m-x_0\|\to 0(m\to\infty)$$

是不成立的, 从而无法导出泛函的表示式及 $\|f\|$ 的等式. 所以, 为了利用泛函 f 的连续性, 我们用下面的方法: 类似于命题 1 的证明, 从式 (2.4.2) 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ 是收敛的. 然后有下面表现式:

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x-\xi_0e_0)+f(\xi_0e_0)\\&=\lim_{m\to\infty}f\Big(\sum_{n=1}^{m}(\xi_n-\xi_0)e_n\Big)+f(\xi_0e_0)\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\xi_n-\xi_0)f(e_n)+f(\xi_0e_0)\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\xi_n-\xi_0)f_n+\xi_0f(e_0)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\xi_0)f_n+\xi_0f(e_0)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_nf_n-\sum_{n=1}^{\infty}\xi_0f_n+\xi_0f(e_0)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_nf_n+\xi_0\Big(f(e_0)-\sum_{n=1}^{\infty}f_n\Big)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_nf_n,\end{aligned}$$

(其中 $f_0=f(e_0)-\sum_{n=1}^{\infty}f_n$).

另外, 当令 $y_m=\sum_{n=1}^{m}(\text{sgn}f_n-\text{sgn}f_0)e_n+(\text{sgn}f_0)e_0$ 时, 必有 $y_m\in(c),\|y_m\|\leqslant 1\ \ (\forall m\in\mathbb{N})$. 且由上面 $f(x)$ 的表示式, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}|f_n|+\sum_{n=m+1}^{\infty}(\text{sgn}f_0)f_n&=\sum_{n=0}^{m}f_n\cdot\text{sgn}f_n+\sum_{n=m+1}^{\infty}(\text{sgn}f_0)f_n\\&=f(y_m)\leqslant\|f\|\cdot\|y_m\|\leqslant\|f\|.\end{aligned}$$

因此, 当令 $m\to\infty$ 时, 便得到 $\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|\leqslant\|f\|$. 这样我们不难完成本证明. □

对于空间 $(\ell^p)(p\geqslant 1)$ 我们介绍下面命题:

命题 3 为了有界线性泛函 $f \in (\ell^p)^*(p \geqslant 1)$, 必须且只须有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \xi_n, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (\ell^p),$$

其中 $f = \{f_n\} \in (\ell^q)$. (这里, 当 $p > 1$ 时, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; 当 $p = 1$ 时, 令 $q = \infty$).

由命题 3 容易类似得到下面的例子:

例 3 $(\ell^p)^* = \ell^q$. (其中, 当 $p > 1$ 时, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 当 $p = 1$ 时; 令 $q = \infty$).

注 特别地, 由例 3 可知 (ℓ^2) 是自共轭空间. 并且作为有限维数域空间的特例, 我们有以下命题:

命题 $(\mathbb{K}^n)^* = \mathbb{K}^n$. 此即: 为了连续线性泛函 $f \in (\mathbb{K}^n)^*$, 必须且只须有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k \xi_k, \quad \forall x = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n,$$

其中 $f = (f_1, \cdots, f_n) \in \mathbb{K}^n$.

为了介绍连续函数空间 $C[a,b]$ 的共轭空间, 我们需要以下.

命题 4*(Riesz 定理) 为了有界线性泛函 $f \in (C[0,1])^*$, 必须且只须有

$$f(x) = \int_a^b x(t) d f(t), \quad \forall x = x(t) \in C[a,b],$$

其中 $f(t) \in V[a,b]$($V[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上 "左连续" 的囿变函数之全体, 其以 "全变差" 为范数而构成的赋范线性空间. 此中相差常数者视为同一元).

例 4* $(C[0,1]^*) = V[a,b]$.

命题 5* 为了有界线性泛函 $f \in (L^p[a,b])^*(p \geqslant 1)$, 必须且只需有

$$f(x) = \int_a^b x(t) f(t) dt, \quad \forall x = x(t) \in L^p[a,b],$$

其中 $f(t) \in L^q[a,b]$(这里当 $p > 1$ 时, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 当 $p = 1$ 时, 令 $q = \infty$).

证明 "$\Leftarrow$": 由 §1.2 的引理 ?? (Hölder不等式, $p = 1$ 时包含在内) 有

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left| \int_a^b x(t) f(t) dt \right| \\
&\leqslant \int_a^b |x(t)| \cdot |f(t)| dt \\
&\leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant ||x|| \left(\int_a^b |f(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

由此可知 $f \in (L^p[a,b])^*$ 且有

$$\|f\| \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

"⇒"：设 $f \in (L^p[a,b])^*$, 令

$$z_t(\lambda) = \chi_{[a,t)}(\lambda), \quad \forall \lambda \in [a,b] \quad (\forall t \in [a,b]),$$

(这里 χ_A 表示集合 A 的特征函数, 即在 A 上取值 1, 在 A 的余集上取值为 0 到的函数). 显然 $z_t \in L^p[a,b] \quad (\forall t \in [a,b])$.

令 $g(t) = f(z_t), t \in [a,b]$, 则 $g(t)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 事实上, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 当取 $\delta = (\frac{\varepsilon}{1+\|f\|})^p$ 时, 对于 $[a,b]$ 上任意互不相交的区间 $\Delta_k = [\alpha_k, \beta_k)(1 \leqslant k \leqslant n)$, 当 $\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n |g(\beta_k) - g(\alpha_k)| &= \sum_{k=1}^n |f(z_{\beta_k}) - f(z_{\alpha_k})| \\
&= \sum_{k=1}^n |f(z_{\beta_k} - z_{\alpha_k})| = \sum_{k=1}^n |f(\chi_{\Delta_k})| \\
&= \sum_{k=1}^n f(\chi_{\Delta_k}) \mathrm{sgn} f(\chi_{\Delta_k}) \\
&= f\Big(\sum_{k=1}^n \mathrm{sgn} f(\chi_{\Delta_k}) \chi_{\Delta_k}\Big) \\
&\leqslant \|f\| \Big(\int_a^b \Big|\sum_{k=1}^n \mathrm{sgn} f(\chi_{\Delta_k}) \chi_{\Delta_k}\Big|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\| \Big(\int_a^b \sum_{k=1}^n \chi_{\Delta_k} dt\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\| \Big(\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k)\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

(其中 $\mathrm{sgn}\,\alpha$ 表示复数 α 的符号), 故 g 是绝对连续函数.

由函数论的知识可知, 存在函数 $f(t) \in L[a,b]$ (即 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 可积函数), 使得

$$g(t) = g(a) + \int_a^t f(\lambda) d\lambda \quad (\forall t \in [a,b]).$$

显然, 此 $f(t)$ 是由泛函 f 唯一确定的. 由 $z_a = \chi_{\{a\}} = \theta$(几乎处处为 0), 故对于线性泛函 f 必有 $g(a) = f(z_a) = 0$. 所以

$$g(t) = \int_a^t f(\lambda) d\lambda \quad (\forall t \in [a,b]).$$

由此可得

$$f(z_t) = g(t) = \int_a^t f(\lambda)d\lambda = \int_a^b z_t f(\lambda)d\lambda.$$

由 f 的线性可知, 对于空间 $L^p[a,b]$ 中, 形如

$$z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (z_{t_k} - z_{t_{k-1}})$$

的阶梯函数 (其中 $\alpha_k \in \mathbb{K}, 1 \leqslant k \leqslant n$ 且 $a = t_o < t_1 < \cdots < t_n = b$ 是对 $[a,b]$ 的一个分划), 我们有

$$f(z) = \int_a^\infty z(\lambda)f(\lambda)d\lambda.$$

再由函数论的知识又知, $[a,b]$ 上的连续函数必可由一列阶梯函数一致逼近, 而 $L^p[a,b]$ 中的有界函数可以由一列一致有界的连续函数几乎处处逼近, 这就说明 $L^p[a,b]$ 中的任意有界函数 y 可以由一列一致有界的阶梯函数 $\{z_n\}$ 几乎处处逼近, 故由 Lebesgue 有界收敛定理可以导出

$$||z_n - y|| = \Big(\int_a^b |z_n - y|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

以及

$$f(z_n) = \int_a^\infty z_n(\lambda)f(\lambda)d\lambda \to \int_a^\infty y(\lambda)f(\lambda)d\lambda \ \ (n \to \infty),$$

从而, 由泛函 f 的连续性可得, 对于 $L^p[a,b]$ 中任意有界函数 y, 均有

$$f(y) = \int_a^\infty y(\lambda)f(\lambda)d\lambda. \tag{2.4.3}$$

下面, 我们先来说明由泛函 f 所确定的函数 $f(t)$ 满足条件:

(1) 当 $p > 1$ 时, $f(t) \in L^q[a,b]$, (其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$);

(2) 当 $p = 1$ 时, $f(t) \in L^\infty[a,b] = M[a,b]$.

事实上, 对于情形 (1), 当令

$$y_n(t) = \mathrm{sgn} f(t)(\min\{|f(t)|, n\})^{q-1} (n \in \mathbb{N})$$

时, 显然 y_n 是有界可测函数, 故由式 (2.4.3), 可知

$$\begin{aligned}\int_a^b (\min\{|f(t)|, n\})^q dt &\leqslant \int_a^b (\min\{|f(t)|, n\})^{q-1} |f(t)| dt \\ &= \int_a^b \mathrm{sgn} f(t)(\min\{|f(t)|, n\})^{q-1} f(t) dt \\ &= \int_a^b y_n(t) f(t) dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(y_n) \leqslant \|f\| \cdot \|y_n\| \\
&= \|f\| \Big(\int_a^b ((\min\{|f(t)|, n\})^{q-1})^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

若 $\int_a^b((\min\{|f(t)|,n\})^{q-1}dt)^{\frac{1}{p}}$ 非零, 上式两端同除以此正数; 若其为零, 直接观察便得到

$$
\Big(\int_a^b (\min\{|f(t)|, n\})^q dt \Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
$$

再由 Fatou 定理则有

$$
\Big(\int_a^b |f(t)|^q dt \Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.
$$

也即导出 $f(t) \in L^q[a,b]$.

对于情形 (2), 由定义有 $g(t) = f(z_t) \ \ (t \in [a,b])$, 故对任意的 $t_1, t_2 \in [a,b], t_1 < t_2$, 有

$$
|g(t_2) - g(t_1)| = |f(z_{t_2} - z_{t_1})| \leqslant \|f\| \cdot \|\chi_{[t_1,t_2)}\| = \|f\| \cdot |t_2 - t_1|,
$$

从而 $g(t)$ 是一个 Lipschitz 函数. 再由 $f(t)$ 的定义 $f(t) = g'(t)$ 及上式可知

$$
|f(t)| = |g'(t)| \leqslant \|f\|, \qquad \text{a.e.} \quad t \in [a,b],
$$

从而 $f(t) \in M[a,b]$, 而且 $\|f(t)\|_\infty \leqslant \|f\|$.

现在说明式 (2.4.3) 对于任意的 $y \in L^p[a,b] (p \geqslant 1)$ 也是成立的. 事实上, 对于任意的 $x = x(t) \in L^p[a,b]$, 必存在有界函数 $y_n \in L^p[a,b]$, 使得 $\|x - y_n\| \to 0 (n \to \infty)$. 注意到泛函 f 的连续性, 有

$$
f(x) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b y_n(t) f(t) dt.
$$

由 Hölder 不等式 ($p = 1$ 时, 也包含在内), 有

$$
\begin{aligned}
\Big| \int_a^b x(t) f(t) dt - \int_a^b y_n(t) f(t) dt \Big| &\leqslant \int_a^b |x(t) - y_n(t)| |f(t)| dt \\
&\leqslant \Big(\int_a^b |x(t) - y_n(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b |f(t)|^q dt \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \|x - y_n\| \cdot \|f\| \to 0 \ \ (n \to \infty);
\end{aligned}
$$

结合前式则可导出

$$
f(x) = \int_a^b x(t) f(t) dt, \quad \forall x = x(t) \in L^p[a,b]. \qquad \square
$$

例 5 $(L^p[a,b])^* = L^q[a,b]$; $\left(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;\ 当\ p = 1,\ 令\ q = \infty\right)$.

注 上面我们指出了: $(c_0)^* = (\ell^1), (c)^* = (\ell^1), (C[a,b])^* = V[a,b]$ 以及 $(\ell^p)^* = (\ell)^q, (L^p[a,b])^* = L^q[a,b]$ (其中: $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; 当 $p = 1$, 令 $q = \infty$). 应当注意, 在这些等式中, "互等" 有两个含义: 1) 是指两空间在 "等价" 的意义下相等; 2) 还必须有泛函明确 "表示式" (或称 "表现定理").

§2.5 自反与非自反空间的例子

例 1 $L^p, (\ell^p)\ (p > 1)$ 必为自反空间.

证明 仅以 L^p 为例来证明. 参见 §2.3 定义 3, 设 $E = L^p[a,b]$, 我们验证从 E 到 E^{**} 的典则映像 J 是满的, 此也就说明了 E 为自反空间. 由 §2.4 命题 5 知 $E^* = L^q[a,b]\ (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, 而 $E^{**} = (E^*)^* = L^p[a,b]$.

对于任意的 $\widehat{x} = \widehat{x}(t) \in E^{**}$, 取 $x = \widehat{x}$, 则 $x \in L^p[a,b] = E$. 对任意的 $x^* = x^*(t) \in E^* = L^q[a,b]$, 由 L^p 和 L^q 空间上连续线性泛函的表示可知

$$\widehat{x}(x^*) = \int_a^b \widehat{x}(t)x^*(t)dt = \int_a^b x(t)x^*(t)dt = x^*(x), \quad \forall x^* \in E^*.$$

由 §2.3 定义 3 可知 $\widehat{x} = J(x)$, 从而 J 是满的, 也即 L^p 为自反的. □

为了说明 $L^1[a,b]$ 和 (ℓ^1) 为非自反空间, 我们先介绍一个引理.

引理 1 (Banach) 设 E 为赋范空间, 若 E^* "可分", 则 E "可分".

证明 由 E^* 可分, 故其单位球面 $S_1(E^*)$ 可分, 因此存在 $\{f_n\} \subset S_1(E^*)$, 使得其闭包 $\overline{\{f_n\}} = S_1(E^*)$. 由定义

$$||f_n|| = \sup_{||x||=1} |f_n(x)| = 1,$$

则存在元列 $\{y_n\} \subset S_1(E)$, 使得

$$|f_n(y_n)| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

令 $E_0 = \overline{\text{span}\{y_n\}}$, 显然 E_0 是 E 的闭可分子空间. 故我们只需说明 $E_0 = E$. 事实上, 如果此结论不成立, 则必有 $x_0 \in S_1(E) \setminus E_0$. 故由 Hahn-Banach 定理 (后面 §3.2 的定理 2), 存在 $f \in E^*, ||f|| = 1$, 使得

$$f(y) = 0 \ \ (\forall y \in E_0),$$

从而

$$||f - f_n|| \geqslant |(f - f_n)(y_n)| = |f_n(y_n)| \geqslant \frac{1}{2} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}),$$

这与 $\overline{\{f_n\}} = S_1(E^*)$ 矛盾! □

注 1 引理 1 的逆命题是不成立的. 即一般说来, 从空间 E 的可分性未必可以得到空间 E^* 的可分性, 因此在记忆和使用该命题时切不可颠倒.

事实上, 由 §1.10, 我们知道 ℓ^1 是可分的, 但 ℓ^∞ 是不可分的. 另一方面, 从 §2.4 例 3 已知 $(\ell^1)^* = (\ell^\infty)$.

注 2 在引理 1 的证明中, 从 E^* 的可分性构造出 E 的可数集的方法是非常有用的, 必须好好掌握它.

下面为了简洁地举出非自反空间的反例, 我们还需要下面一个引理作工具, 此引理将在后面第三章给出证明 (参见 §3.6 定理 1):

引理 2 (Pettis 定理) 任意 "自反" 的空间 E, 其任意 "闭线性子空间" E_0 亦自反 (即: "自反" 是 "可遗传" 的).

由以上两个引理, 可以介绍以下 "非自反的" Banach 空间:

反例 1 $L^1[a,b], (\ell^1)(L^1(\Omega))$ 均为 "非自反" 空间.

验证 由于

$$(\ell^1)^* = (\ell^\infty)((L^p[a,b])^* = L^\infty[a,b]),$$

反之, 若空间 $(\ell^1)(L^1[a,b])$ 是自反的, 则应有

$$(\ell^1) \stackrel{J}{=} (\ell^1)^{**} = [(\ell^1)^*]^* = (\ell^\infty)^* \quad (L^1[a,b] \stackrel{J}{=} (L^\infty[a,b])^*).$$

注意到拓扑空间的 "可分性" 在 "等价拓扑" 下是不变的, 因此对任意 "拓扑同胚" 的两个空间, 其 "可分性" 是不变的. 故对两个赋范空间而言, 只要它们是 (赋范) "同构" 的, 其 "可分性" 也必是相同的. 因此由引理 1 立即可知: 从 (ℓ^1) 可分, 必然有 (ℓ^∞) 可分 ($L^1[a,b]$ 可分必然有 $L^\infty[a,b]$ 可分), 矛盾! □

反例 2 (c_0) 是非自反空间.

验证 反之, 若 (c_0) 自反, 由 $(c_0)^{**} = ((c_0)^*)^* = (\ell^1)^* = (\ell^\infty)$ 则知 (c_0) 与 (ℓ^∞) 是拓扑同胚, 从而两者的 "可分性" 是相同的. 但我们知道 (c_0) 可分, 而 (ℓ^∞) 却是不可分的. 矛盾! □

反例 3 (c) 和 (ℓ^∞) 均为非自反空间.

验证 由 $(c_0) \subset (c), (c_0) \subset (\ell^\infty)$, 从引理 2 可知, 若 (c) 或 (ℓ^∞) 自反, 则其闭线性子空间 (c_0) 亦自反, 从而与反例 2 矛盾. □

反例 4 $C[0,1]$ 是非自反空间.

验证 **方法 1** 反之, 设 $C[a,b]$ 自反, 由 $(C[a,b])^* = V[a,b]$, 故有

$$C[a,b] = (C[a,b])^{**} = (V[a,b])^*.$$

因为 $C[a,b]$ 可分, 从引理 1 则知 $V[a,b]$ 必可分, 但 $V[a,b]$ 是不可分的, 矛盾!

方法 2 令 φ 为 (c) 到 $C[0,1]$ 内的一个算子, 定义如下:

$$\varphi(\{\xi_k\}) = y(t) = \begin{cases} \xi_k, & \text{当 } t = \dfrac{1}{k}(k \in \mathbb{N}); \\ \xi_0, & \text{当 } t = 0; \\ \text{线性}, & \text{当 } t \in [a,b] \setminus \left\{0, \dfrac{1}{k}:\ k \in \mathbb{N}\right\}; \end{cases}$$

其中: $\xi_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \xi_k$.

显然, $y(t) \in C[0,1]$ 而且 φ 为 1–1 (线性) 算子. 令

$$E_0 \triangleq \{\varphi(\{\xi_k\}):\ \ \{\xi_k\} \in (c)\}.$$

容易知道 φ 为 (c) 到 E_0 上的线性满等距算子. 由 (c) 完备知 E_0 完备, 从而 E_0 是 $C[0,1]$ 的闭线性子空间.

现在反设, 若 $C[a,b]$ 自反, 由引理 2 则知 E_0 自反, 从而 (c) 自反, 与反例 3 矛盾! □

定义 1 设 E 是赋范空间, $\{x_n, x_0\} \subset E$. 若

$$f(x_n) \to f(x_0), (n \to \infty), \quad \forall f \in E^*,$$

则称 x_n**弱收敛**于 x_0 (记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0$).

若

$$||x_n - x_0|| \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

则称 x_n**强收敛**于 x_0 (记为 $x_n \to x_0$).

注 注意到, $|f(x_n) - f(x_0)| \leqslant ||f|| \cdot ||x_n - x_0||$, 显然可知:"强收敛"蕴含着"弱收敛".

定义 2 如果 E 为赋范空间, 则 E^* 亦为赋范空间. 那么在 E^* 上有三种收敛:

1) **强收敛**(按范收敛): 是指对于 $\{f_n, f_0\} \subset E^*$, 有

$$||f_n - f_0|| \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

记为 $f_n \to f_0$ (或 $f_n \xrightarrow{||\cdot||} f_0$).

2) **弱收敛**: 是指对于 $\{f_n, f_0\} \subset E^*$, 有

$$|F(f_n) - F(f_0)| \to 0 \ \ (\forall F \in E^{**}),$$

记为 $f_n \xrightarrow{w} f_0$.

3) **弱* 收敛**: 是指对于 $\{f_n, f_0\} \subset E^*$, 有

$$|f_n(x) - f_0(x)| \to 0 \ \ (\forall x \in E),$$

记为 $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$.

注　显然有:"强收敛"蕴含着"弱收敛","弱收敛"蕴含着"弱* 收敛".

定义 3　称 E^* 是**弱* 可分**的是指: 存在一可数集 $\{y_n^*\}\subset E^*$, 使得 $\overline{\{y_n^*\}}^{w^*}=E^*$ (也即: 对任意 $x^*\in E^*$, 其对于任意的 $\varepsilon>0, x\in E$, 存在 $y_n^*\in\{y_n^*\}$, 使得有 $|y_n^*(x)-x^*(x)|<\varepsilon$).

定义 4　称 E^* 中的集 $\mathcal{F}$ 是**弱* 列紧**的是指: 对于任意的 $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$, 存在子列 $\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\}, f_0\in E^*$, 使得 $f_{n_k}\xrightarrow{w^*}f_0$ (即: $f_{n_k}(x)\to f_0(x),\ \ \forall x\in E$). 当上述 w^* 极限元 f_0 均有 $f_0\in\mathcal{F}$ 时, 则称 $\mathcal{F}$ 是**弱* 自列紧**的.

下面给出一个十分有趣的命题, 从其证明中我们也可再次重温选择子列的"对角线"法:

引理 3　可分线性赋范空间 E 之共轭空间 E^* 的单位闭球必是"弱* 自列紧"的.

证明　首先, 由 E 的可分性假设可知, 必存在 $\{x_n\}\subset E$, 使得 $\overline{\{x_n\}}=E$. 由此, 对于任意的 $\{x_n^*\}\subset E^*, \|x_n^*\|\leqslant 1(n=1,2,\cdots)$; 下面用"对角线法"选出 $\{x_n^*\}$ 的一个弱* 收敛的子列 $x_{n_k}^*$, 从而完成引理的证明:

事实上, 由于对元列 $\{x_n\}$ 及泛函列 $\{x_n^*\}$ 而言, 有

$$|x_n^*(x_k)|\leqslant\|x_n^*\|\cdot\|x_k\|\leqslant\|x_k\|\quad(\forall k,n\in\mathbb{N}),$$

因而对于有界数列 $\{x_n^*(x_1)\}$ 而言, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可知, 必存在 $\{x_{1,n}^*\}\subset\{x_n^*\}$, 使得 $\{x_{1,n}^*(x_1)\}$ 是收敛的; 同样地, 对于有界数列 $\{x_{1,n}^*(x_2)\}$ 而言, 又必有泛函子列 $\{x_{2,n}^*\}\subset\{x_{1,n}^*\}$, 使得数列 $\{x_{2,n}^*(x_2)\}$ 也是收敛的; $\cdots$; 一般说来, 必存在泛函子列 $\{x_{k,n}^*\}\subset\{x_{k-1,n}^*\}$, 使得数列 $\{x_{k,n}^*(x_k)\}$ 是收敛的, 这样一来, 当取上述可数个泛函子列的"对角线"泛函列 $\{x_{n,n}^*\}$ 时, 我们可以看出对于任意 k (自然数), 均有

$$\{x_{n,n}^*|n\geqslant k\}\subset\{x_{k,n}^*\}.$$

显然 $\{x_{n,n}^*\}\subset\{x_n^*\}$, 因而对于上述任意元 $x_k\in\{x_n\},\{x_{n,n}^*(x_k)\}$ 均为收敛数列. 且由三角不等式可知

$$\begin{aligned}|x_{n,n}^*(x)-x_{m,m}^*(x)|\leqslant&|x_{n,n}^*(x)-x_{n,n}^*(x_k)|\\&+|x_{n,n}^*(x_k)-x_{m,m}^*(x_k)|-|x_{m,m}^*(x_k)-x_{m,m}^*(x)|\\\leqslant&(\|x_{n,n}^*\|+\|x_{m,m}^*\|)\|x-x_k\|+|x_{n,n}^*(x_k)-x_{m,m}^*(x_k)|\\\leqslant&2\|x-x_k\|+|x_{n,n}^*(x_k)-x_{m,m}^*(x_k)|;\quad\forall x\in E,k\in\mathbb{N}.\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

由此, 对任意 $\varepsilon>0$, 注意到 $\{x_n\}$ 稠于 E 的假设, 必可选取 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $\|x-x_{k_0}\|<\frac{\varepsilon}{4}$. 由前可知 $\{x_{n,n}^*(x_{k_0})\}$ 也为收敛数列, 故存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n,m>N$ 时, 便有 $|x_{n,n}^*(x_{k_0})-x_{m,m}^*(x_{k_0})|<\frac{\varepsilon}{2}$. 故将 $k=k_0$ 代入不等式 (2.5.1) 时便可得到 $\{x_{n,n}^*(x)\}$

均为 Cauchy 数列 ($\forall x \in E$), 从而为收敛数列. 这样一来, 我们就可得到 E 上的一个线性泛函 x_0^*,

$$x_0^*(x) = \lim_{n\to\infty} x_{n,n}^*(x), \quad \forall x \in E. \tag{2.5.2}$$

并且, 由于

$$|x_0^*(x)| = \lim_{n\to\infty} |x_{n,n}^*(x)| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|x_{n,n}^*\| \cdot \|x\| \leqslant \|x\|; \quad \forall x \in E;$$

我们还有 $x_0^* \in E^*$ 和 $\|x_0^*\| \leqslant 1$. 而由式 (2.5.2), 我们导出了 $\{x_{n,n}^*\}$ 是弱 * 收敛于 E^* 单位球内一元 x_0^* 的, 也即球 $B_1(E^*)$ 是弱 * 自列紧的. □

注 3 引理 3 的证明中使用的"对角线"选取子列的方法是很重要的, 必须好好掌握它. 至于引理 3, 当空间不是可分时, 结论一般说来是不一定成立的. 例如, 可以取一个不可分的 Hilbert 空间作为反例. 这里不详细讨论.

注 4* 从引理 3 还可以看出, 虽然"弱"列紧蕴含着弱* 列紧, 但是弱* 列紧一般得不出"弱"列紧的结论. 反例可见于空间 $(\ell^1) = (c)^*$. 此时由于 (c) 是可分的, 因而由引理 3 可知 $(c)^* = (\ell^1)$ 的单位闭球是弱* 自列紧的, 但是如果由此得出其也是"弱"自列紧的, 则从 (ℓ^1) 空间中的强弱收敛列的等价性 (见后面 §3.3 的定理 2), 便导出 (ℓ^1) 的单位闭球也是自列紧的, 此显然与 (ℓ^1) 是无穷维的赋范空间矛盾 (参见 §1.5).

由引理 3 还可以直接得到下面一个推理:

推理 1 在可分赋范线性空间 E 的共轭空间 E^* 中, 其任意的有界集均是弱* 列紧的.

注* 类似可证明以下命题:

命题 若赋范空间 E 可分, 则 E^* 必弱* 可分 (在没有介绍"弱 * 拓扑"概念之前, 不失一般性, 我们可以这样理解 E^* 弱* 可分的概念, 即: 存在 E^* 中的元列 $\{f_n\}_1^\infty$, 使得 E^* 中任意元均可由 $\{f_n\}_1^\infty$ 的子列"弱*"逼近).

证明 我们有两种方法证明之:

方法 1 只需证明存在 E^* 的单位原心闭球 $B_1^* = B_1(E^*)$ 内一可数集 $\mathcal{F}$, 使得对于任意泛函 $f_0 \in B_1^*$, 均有一列泛 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ 满足 $f_n \xrightarrow{w^*} f_0 (n \to \infty)$ 就行了. 下面, 我们来验证这一事实.

首先, 从 E 的可分性知, 存在 $\{x_k\} \subset E$, 使得 $\overline{\{x_k\}} = E$. 其次, 对任意的 $f \in B_1^*$, 作映像 T_n:

$$f \mapsto T_n f = (f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)) \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

则 T_n 可视为由 B_1^* 到 $(\ell_{(n)}^2)$ 空间内的算子. 注意到由 $(\ell_{(n)}^2)$ 的可分性便可导出其子集 $T_n(B_1^*)$ 的可分性, 故知对任意 n(自然数), 存在 $\{f_{n,m}: \quad m = 1, 2, \cdots\} \subset B_1^*$, 使得元列 $\{T_n(f_{n,m}): \quad m = 1, 2, \cdots\}$ 在 $T_n(B_1^*)$ 内是稠的.

最后, 我们令

$$\mathcal{F} = \{f_{n,m}\colon n, m = 1, 2, \cdots\},$$

并证明此即为所求之 B_1^* 的弱* 稠集. 事实上, 对于任意 $f_0 \in B_1^*$, 根据 $\mathcal{F}$ 中泛函的性质可知: 对任意 n(自然数), 必存在 $\{f_{n,m_n}\} \subset \mathcal{F}$, 使得

$$||T_n(f_{n,m_n}) - T_n(f_0)||_{(\ell_n^2)} \leqslant \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是, 注意到空间 $(\ell_{(n)}^2)$ 内范数的定义, 可得

$$|f_{n,m_n}(x_k) - f_0(x_k)| < \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, \cdots n).$$

即: 对任意 $x_k(k = 1, 2, \cdots)$, 均有

$$f_{n,m_n}(x_k) \to f_0(x_k) \quad (n \to \infty).$$

由于 $\{x_k\}$ 稠于 E 且 $||f_{n,m_n}|| \leqslant 1$, 借助于不等式

$$\begin{aligned}|f_{n,m_n}(x) - f_0(x)| \leqslant & |f_{n,m_n}(x) - f_{n,m_n}(x_k)| \\ & + |f_{n,m_n}(x_k) - f_0(x_k)| + |f_0(x_k) - f_0(x)| \\ \leqslant & 2||x - x_k|| + |f_{n,m_k}(x_k) - f_0(x_k)|, \quad \forall x \in E,\end{aligned}$$

可得

$$f_{n,m_n}(x) \to f_0(x)(n \to \infty); \quad \forall x \in E.$$

也即导出 $f_{n,m_n} \xrightarrow{w^*} f_0 \ (n \to \infty)$. □

方法 2 在 $B_1(E^*)$ 中引入距离 d, 使得其中之点列按 "距离 d" 收敛 "等价" 于点列的 "弱*" 收敛. 由引理 3 可知 $B_1(E^*)$ 是"弱* 紧的", 故知距离空间 $(B_1(E^*), d)$ 是紧的, 从而是可分的. 由此可知 $B_1(E^*)$ 是弱* 可分的.

下面引入距离 d:

由 E 可分, 故存在 $\{x_n\} \subset S_1(E)$, 使得 $\overline{\{x_n\}} = S_1(E)$. 对于任意的 $x^*, y^* \in B_1(E^*)$, 令

$$d(x^*, y^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x^*(x_k) - y^*(x_k)|.$$

可以验证, d 满足距离三条公理, 而且按 "此距离" 收敛与 E^* 上的 "弱*" 收敛是等价的. □

定理 1 (Kakutani 定理) 如果 E 为 Banach 空间, 则 E "自反" 蕴含着单位原心球 $B_1(E)$ 是"弱自列紧"的.

证明 我们来证明 $B_1(E)$ 中任意点列 $\{x_n\}$ 均有"弱收敛"的子列.

令 $E_0 = \overline{\text{span}\{x_n\}}$, 显然 E_0 为 E 中闭的、可分的线性子空间. 由引理 2 知 E_0 亦为"自反"空间. 即有：$E_0 \overset{J}{=} E_0^{**} = (E_0^*)^*$, 故 $(E_0^*)^*$ 为可分空间, 而由引理 1 则知 E_0^* 为可分空间. 再由引理 3 知 $B_1((E_0^*)^*)$ 必为弱* 自列紧集. 设 J 是从 E_0 到 $E_0^{**} = (E_0^*)^*$ 的典则映像, 则有 $\{J(x_n)\} \subset B_1(E_0^{**})$, 故 $\{J(x_n)\}$ 必有弱* 收敛的子列 $\{J(x_{n_k})\}$ 以及 $x_0^{**} \in B_1(E_0^{**})$, 使得 $J(x_{n_k}) \overset{w^*}{\to} x_0^{**}(k \to \infty)$. 即

$$J(x_{n_k})(y^*) \to x_0^{**}(y^*)(k \to \infty), \quad \forall y^* \in E_0^*.$$

注意到 E_0 的自反性, 故存在 $x_0 \in B_1(E_0)$, 使得 $J(x_0) = x_0^{**}$. 代入上式, 并用 J 的定义则可得到

$$y^*(x_{n_k}) \to y^*(x_0)(k \to \infty), \quad \forall y^* \in E_0^*.$$

现在, 对于任意的 $x^* \in E^*$, 由于当将 x^* 限制在 E_0 上时有 $x^*|_{E_0} \in E_0^*$, 故 $x^*(x_{n_k}) = x^*|_{E_0}(x_{n_k}), x^*(x_0) = x^*|_{E_0}(x_0)$, 且有

$$J(x_{n_k})(x^*) \to x_0^{**}(x^*)(k \to \infty), \quad \forall x^* \in E^*.$$

此即说明 $x_{n_k} \overset{w}{\rightharpoonup} x_0(k \to \infty)$. 也即证明了 $B_1(E)$ 中任意点列 $\{x_n\}$ 均在其内存在"弱收敛"的子列, 且此弱收敛元亦在 $B_1(E)$ 中. 由此可知 $B_1(E)$ 是"弱自列紧"的. □

注 1* 其实, 以上定理就是自反空间的特征 (此将在后面第三章给出证明), 也即：

E 自反 $\Longleftrightarrow B_1(E)$ 是"弱自列紧"集.

注 2* 由后面 Eberlein-Šmulian 定理可知 (参见第九章 §9.6)：对于赋范空间而言, 其单位球的"弱自列紧性"与其"弱紧性"是等价的, 由此又有：

E 自反 $\Longleftrightarrow B_1(E)$ 是"弱紧"集.

注 3* (James 定理) Banach 空间 E 是自反的 $\Leftrightarrow$ 对于任意 $x^* \in E^*, |x^*(x)|$ 必在 E 的单位球面 $S_1(E)$ 上取到"最大值"[38].

注 4* 存在一个非完备的赋范空间 (当然也是非自反的空间), 但其上的泛函却仍具有注 3* 所述的性质.[39]

习 题 二

2.1 试举例说明, 对于复赋范线性空间而言, 从可加算子的连续性未必能推出它是"复齐性"(即对于复数是齐性) 的.

2.2 试证明：实赋范线性空间 E 上的非零实线性泛函 $f(x)$ 在 E 中任意一点 x_0 均不可能取到"局部极小值"(即存在 x_0 的某个闭球 $B(x_0, \delta_0) \subset E$, 使得 $f(x_0)$ 为泛函 $f(x)$ 在

$B(x_0, \delta_0)$ 中的最小值) 或“局部极大值”. 由此导出：对于任意数 $\alpha, f(x) \neq \alpha$ 的点所组成的集必稠于空间 E.

2.3　设在空间 $C[a,b]$ 上定义算子 T 如下：

$$[T(x)](s) \equiv \int_a^b k(s,t)x(t)dt, \quad \forall\, x = x(t) \in C[a,b]$$

(其中, $k(s,t)$ 为 $a \leqslant s, t \leqslant b$ 上的二元连续函数). 试证明：T 必为 $C[a,b]$ 到自身内的连续线性算子.

2.4　设在空间 $L^1[0,2\pi]$ 上定义算子 T 如下：

$$[T(x)](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x(t)}{1 - ze^{it}}dt, \quad \forall\, x = x(t) \in L^1[0,2\pi].$$

试证明：T 将 $L^1[0,2\pi]$ 上的函数变为在复单位圆 $|z| < 1$ 内解析的函数. 并当令 $A_{\rho_0}(\rho_0 \leqslant 1)$ 表示在 $|z| < \rho_0$ 内解析、在 $|z| \leqslant \rho_0$ 上连续、范数为 $||y|| = \max_{|z| \leqslant \rho_0} |y(z)|$ $(\forall y \in A_{\rho_0})$ 的复函数所组成的赋范线性空间时, 则上面的 T 为从 $L^1[0,2\pi]$ 到 A_{ρ_0} 内的连续线性算子, 此外 T^{-1} 不存在.

2.5　设 E 为一赋范线性空间, $f(x)$ 为 E 上的非零线性泛函, 并设“零点集”

$$N_f = \{x \in E: \quad f(x) = 0\}.$$

试证明：

1) 如果元 $x_1 \in E$, 使得 $f(x_1) \neq 0$, 那么, 对任意的元 $x \in E$, 均有分解式

$$x = \alpha x_1 + y \quad (\text{其中：} y \in N_f, \alpha \in \mathbb{K}),$$

2) 上述分解式是唯一的.

2.6　如果 f_1 和 f_2 为 E 中两不相同的线性泛函, 那么, 为了 (“零点集”) $N_{f_1} = N_{f_2}$, 必须且只需存在一常数 $\lambda \neq 0$, 使得

$$f_1(x) = \lambda f_2(x), \quad \forall\, x \in E.$$

2.7　如果 f_1 和 f_2 为 E 中两不相同的线性泛函, 并设集 (“超平面”)

$$H_{f_1} = \{x \in E: \quad f_1(x) = \alpha_1\}, \quad H_{f_2} = \{x \in E: \quad f_2(x) = \alpha_2\},$$

则为了“超平面” $H_{f_1} = H_{f_2}$, 必须且只需存在一数 $\lambda \neq 0$, 使得

$$(1)\ f_1(x) = \lambda f_2(x), \qquad (2)\ \alpha_1 = \lambda \alpha_2.$$

2.8　设 T 是从空间 (m) 到其自身的有界线性算子,

$$z = T(x), \quad \forall\, x = (\xi_j) \in (m).$$

其中,

$$z = (\eta_i), \quad \eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_j \quad (\forall\, i \in \mathbb{N}), \quad \text{且} \sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| < \infty.$$

试证明：

$$||T|| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|$$

(“行向量”坐标绝对值之和的上确界).

2.9 设 T 是从空间 $(\ell^1_{(n)})$ 到其自身内的有界线性算子：

$$z = T(x), \quad \forall\, x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n,) \in (\ell^1_n),$$

其中

$$z = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n), \quad \eta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j (1 \leqslant i \leqslant n).$$

试证明：

$$\|T\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|$$

(“列向量”坐标绝对值和之最大者).

2.10 将上题中空间 $(\ell^1_{(n)})$ 改为 $(\ell^2_{(n)})$, 且设 $\overline{\alpha_{ij}} = \alpha_{ji} (1 \leqslant i, j \leqslant n)$. 试证明：

$$\|T\| = \max |\text{矩阵}\ (\alpha_{ij})\ \text{的特征值}|.$$

2.11 设 E 为赋范线性空间, E_1 为 Banach 空间, 而 T_0 是从 E 的子空间 E_0 到 E_1 内的有界线性算子. 试证明：只要 E_0 稠于 E, 则 T_0 可以“保范扩张 (延拓)”到整个空间 E 上 (也即：能在全空间 E 上唯一定义一个有界线性算子, 使其满足条件

1) $T(y) = T_0(y), \quad (\forall\, y \in E_0)$; 2) $\|T\| = \|T_0\|_{E_0}$).

2.12 利用列紧集的性质, 并注意到第一章习题 1.7. 试证明：如果 Ω 为距离空间, 那么, 为了连续函数空间 $C(\Omega)$ 是可分的必须且只需 Ω 是紧空间.

2.13 设 T 为赋范线性空间 E 上定义的线性算子. 试证明：如果 T 将 E 中的“单位球”变为 E_1 中的列紧集时, 则 T 为 E 上的全连续算子.

2.14 设在 $\mathbb{K}^2$ 中引入范数

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|, \quad \forall\, x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{K}^2;$$

其所构成的赋范线性空间记为 $\mathbb{K}^2_{(1)}$. 在 $\mathbb{K}^2_{(1)}$ 上定义一泛函 f：

$$f(x) = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \quad \forall\, x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{K}^2_{(1)}$$

(其中 α 和 β 为固定复数). 试证明：$f \in [\mathbb{K}^2_{(1)}]^*$, 并求 $\|f\| =?$

2.15 试对“所有数列”所构成的赋准范空间 (s) (其中“收敛”等价于“按坐标收敛”), 求出其连续线性泛函的一般形式.

2.16 设 E_1 和 E_2 均为赋范线性空间. 试证明：对于积空间 $E_1 \times E_2$ (范数定义为

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|, \quad \forall\, (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2)$$

有关系式

$$(E_1 \times E_2)^* = E_1^* \times E_2^*$$

(这里, 积空间 $E_1^* \times E_2^*$ 的范数定义为 $\|(f_1, f_2)\| = \max(\|f_1\|, \|f_2\|)$).

2.17　设 $E_\iota(\iota \in I)$ 为一族 Banach 空间, 定义积空间

$$E = \prod_{\iota \in I} E_\iota = \{(x_\iota):\quad x_\iota \in E_\iota(\iota \in I), \sup_{\iota \in I} \|x_\iota\| < \infty\},$$

其中运算定义为

$$(x_\iota) + (y_\iota) = (x_\iota + y_\iota),\quad \alpha(x_\iota) = (\alpha x_\iota);$$

范数定义为

$$\|(x_\iota)\| = \Big(\sum_{\iota \in I} \|x_\iota\|^p\Big)^{\frac{1}{p}},\quad \forall\, (x_\iota), (y_\iota) \in E, \alpha \in \mathbb{K}.$$

试证明: $E^* = \prod_{\iota \in I} E_\iota^*$, 且具有范数

$$\|(f_\iota)\| = \Big(\sum_{\iota \in I} \|f_\iota\|^q\Big)^{\frac{1}{q}},\quad \forall\, (f_\iota) \in \prod_{\iota \in I} E_\iota^*,$$

(这里, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

2.18　设 $T_n, T_0 \in \mathcal{B}(E \to E_1)$　$(n = 1, 2, \cdots)$. 试证明: 当 $\|T_n - T_0\| \to 0$ 时, 必有 $\|T_n^* - T_0^*\| \to 0$　$(n \to \infty)$.

2.19　设 E 为赋范线性空间. 试证明: 对于 E 上的线性算子来说, 为了将 E 变为“有限维”赋范线性空间, 必须且只需 T 是“有限秩”算子.

2.20　设 $L^2(-\infty, +\infty)$ 内定义一个到其内的算子 T(量子力学中的“坐标算子”):

$$[T(x)](t) = tx(t),\quad \forall\, x = x(t) \in \mathcal{D}(T);$$

其中, $\mathcal{D}(T) = \{x(t)\text{: } x(t), tx(t) \in L^2(-\infty, +\infty)\}$. 试求: $[T^*(g)](t)$ 对于 $g(t) \in \mathcal{D}(T^*)$ 的表达式及定义域 $\mathcal{D}(T^*)$, 并说明 $T^* = T$ (自共轭算子).

2.21　在 $L^2[0,1]$ 内定义了一个到其内的算子 T (量子力学中的“动量算子”):

$$[T(x)](t) = \frac{1}{i} x'(t),\quad \forall\, x = x(t) \in \mathcal{D}(T);$$

其中, $\mathcal{D}(T) = \{x(t)\text{: } x(t), x'(t) \in L^2[0,1]\}$. 试求: $[T^*(g)](t)$ 对于 $g(t) \in \mathcal{D}(T^*)$ 的表达式及定义域 $\mathcal{D}(T^*)$ (由此可知, 数理方程里有时所说的“自共轭”只是形式的. 而此处, 虽然形式上 T^* 与 T 的“变换式”相同, 然而 $\mathcal{D}(T^*)$ 与 $\mathcal{D}(T)$ 是不同的).

2.22　由空间 $C[0,1]$ 内单位闭球 $B(\theta, 1)$ 中的元列 $\{x_n\}$ 设为

$$x_n = x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \text{时};\\[2mm] 2n\Big(t - \dfrac{1}{2}\Big), & \text{当 } \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} \text{时};\\[2mm] 1, & \text{当 } \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} \leqslant t \leqslant 1 \text{时}, \end{cases}$$

直接说明 $C[0,1]$ 内单位闭球不是弱列紧的.

2.23　当已知“E 自反 $\Longrightarrow E^*$ 自反”时, 利用 §2.5 中的引理 2(Pettis 定理) 证明: 当 E 为 Banach 空间时, E^* 自反 $\Longrightarrow E$ 自反.

第三章 Hahn-Banach 型定理

在函数论中, 我们曾经考虑过把一些函数从原来的定义域中扩充出去的问题. 例如定义在度量空间内某一闭集的连续函数可以保持其上下界延拓成整个空间上的连续函数 (值得注意的是, 此结论对于非闭集未必正确. 反例可见数学分析中定义于 $(0,1]$ 中的函数 $\sin\frac{1}{x}$); 又如, 解析函数的解析开拓等. 同样在测度论中有测度的扩张, 在代数上有域的扩张等.

此外在上一章中, 对于任意赋范线性空间 E, 我们曾经引入其上定义的有界线性泛函的全体构成的共轭空间 E^* 的概念. 虽然对于某些具体的空间找到了共轭空间, 但对任意的赋范线性空间 E, 我们并不知道除了零泛函以外还有没有其他的非零的有界线性泛函存在.

为了使得任意的线性空间 E 上存在非零的有界线性泛函, 最简化的方法自然使我们想到了前面所说的 "延拓" 的方法, 即: 如果能在 E 内某一子空间上定义一个有界线性泛函, 而且还能够使其延拓成为整个 E 上的有界线性泛函, 那么问题就解决了.

值得注意的是, 在现代的文献中, 人们不在仅仅将 §3.1 中的定理 1 称为汉恩 - 巴拿赫 (Hahn-Banach) 定理, 而是将此一章的 §3.1 和 §3.2 的各个定理和推理, 均习惯地、不加区别地统称为 Hahn-Banach 定理.

§3.1 线性泛函的控保延拓定理

本段下面的两个定理, 就是用来解决延拓的可能性问题的. 首先引出一个与 Zermelo 公理等价的 Zorn 引理, 它在定理的证明中是非常必要的. 首先给出下面关于 "序" 的一些定义.

定义 1 集合 G 称为**有序集**, 是指对于其中 "某些元" 之间定义了一个 "**序关系**" $\prec$. 关系 $\prec$ 满足下面三个条件:

(i) 如果 $x\prec y$ 且 $y\prec z$, 那么 $x\prec z$(传递性),

(ii) 对任意 $x\in G$ 均有 $x\prec x$(自反性),

(iii) 如果 $x\prec y$ 且 $y\prec x$, 那么 $x=y$ (反对称性).

定义 2 集合 G 称为 "**全序集**", 是指它是一个有序集, 并且对于 E 中的任意两个元 x 和 y, 关系 $x\prec y$ 和 $y\prec x$ 至少有一个成立.

定义 3　设 G 为一有序集, 集 $B \subset G$, 元 $y \in G$ 称为集 B 的**上界**, 是指对于任意的 $x \in B$, 均有 $x \prec y$ 成立. G 中的元 x_0 称为"**极大元**", 是指若 $x \in G$ 且 $x_0 \prec x$, 则有 $x = x_0$.

有了上面的定义就可以引入下面的公理:

引理 1 (Zorn 引理)　如果 G 是非空有序集, 且其内每个全序子集都有上界, 那么 G 至少有一个极大元.

从上面的引理 1, 我们将给出一般 (没有拓扑结构的) 线性空间上的线性泛函在某种特定泛函"控制下"的延拓定理. 首先选择"控制函数"为"次加、正齐性"泛函, 其定义重述如下:

定义 4　线性空间 E 上的泛函 $p(x)$ 称为**次加的**, 是指

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad \forall\, x, y \in E.$$

线性空间 E 上的泛函 $p(x)$ 称为"**正齐性的**"是指

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall\, \alpha \geqslant 0, x \in E.$$

注　这里所给出的"次加、正齐性"泛函, 对于我们来说并不是陌生的. 事实上, 在赋范线性空间中, 元的拟范数 $\|\cdot\|$ 就是这种泛函. 一般来说, 它未必是"加法的"或"齐性的".

下面我们给出在泛函分析中起着重大作用的著名定理:

定理 1 (Hahn-Banach 定理)　假设

1° E 是"实"线性空间, $E_0 \subset E$ 是其线性子空间,

2° $p(y)$ 是 E 上的次加正齐性泛函, $f_0(y)$ 是定义在子空间 E_0 上的 (实) 线性泛函, 并且满足 $f_0(y) \leqslant p(y)$ $(\forall\, y \in E_0)$,

则必存在定义在整个空间 E 上的 (实) 线性泛函 $f(y)$, 满足

1) $f(y) = f_0(y), \quad \forall\, y \in E_0$,

2) $f(y) \leqslant p(y), \quad \forall\, y \in E$

(并且称 f 为 f_0 在全空间 E 上的**延拓**).

证明　下面我们分三步来证明:

(1) 设任意一点 $x_1 \in E \backslash E_0$, 我们把泛函 f_0 从 E_0 在保持泛函 $p(x)$ 的控制下延拓到子空间 E_1 上去, 其中 E_1 定义为

$$E_1 = \{y + \alpha x_1\colon\ y \in E_0, \alpha \in (-\infty, +\infty)\}.$$

考察 E_0 中的任意两元 y' 和 y''. 从定理假设 2° 可知

$$f_0(y') - f_0(y'') = f_0(y' - y'') \leqslant p(y' - y'') \leqslant p(y' + x_1) + p(-y'' - x_1),$$

由此有 $-p(-y''-x_1)-f_0(y'')\leqslant p(y'+x_1)-f_0(y')$, 故可得到

$$-\infty < m \triangleq \sup_{y\in E_0}\{-p(-y-x_1)-f_0(y)\}\leqslant p(y'+x_1)-f_0(y'),\quad \forall y'\in E_0.$$

因而导出

$$-\infty < m \leqslant \inf_{y\in E_0}\{p(y+x_1)-f_0(y)\}\triangleq M < +\infty.$$

任取一个数 ξ_1, 使得 $m\leqslant\xi_1\leqslant M$, 并且在子空间 E_1 上定义泛函

$$f_1(y+\alpha x_1)=f_0(y)+\alpha\xi_1,\quad \forall\, y\in E_0,\alpha\in(-\infty,+\infty). \tag{3.1.1}$$

于是, 由于空间 E_1 中的每个元是唯一表示为形如 $y+\alpha x_1$ 的, 因此式 (3.1.1) 唯一确定了 E_1 上的一个线性泛函. 此外, 由定义显然有

$$f_1(y)=f_0(y),\quad \forall\, y\in E_0.$$

因此, 可以看出泛函 f_1 是 f_0 在 E_1 上的延拓. 所以, 余下来的只要证明仍有下面 "控制" 关系式:

$$f_1(y+\alpha x_1)\leqslant p(y+\alpha x_1),\quad \forall\, y\in E_0,\quad \alpha\in(-\infty,+\infty) \tag{3.1.2}$$

成立就可以了.

事实上, 当 $\alpha=0$ 时, 由式 (3.1.1) 及假设条件 2° 显然式 (3.1.2) 成立, 因此我们假设 $\alpha\neq 0$ 并分两种情形来讨论.

(i) 如果 $\alpha>0$, 注意到 ξ_1 的取法, 故知对任意 $y\in E_0$, 有

$$\xi_1\leqslant M\leqslant p\Big(\frac{y}{\alpha}+x_1\Big)-f_0\Big(\frac{y}{\alpha}\Big),$$

从而有

$$\alpha f_0\Big(\frac{y}{\alpha}\Big)+\alpha\xi_1\leqslant \alpha p\Big(\frac{y}{\alpha}+x_1\Big).$$

再注意到 f_0 的线性以及泛函 p 的正齐性假设, 便可得到

$$f_0(y)+\alpha\xi_1\leqslant p(y+\alpha\xi_1).$$

最后由式 (3.1.1) 及上式则可导出

$$f_1(y+\alpha x_1)\leqslant p(y+\alpha x_1),\quad \forall\, y\in E_0,\alpha\in(0,\infty).$$

(ii) 如果 $\alpha<0$, 那么类似地, 对任意 $y\in E_0$ 有

$$-p\Big(-\frac{y}{\alpha}-x_1\Big)-f_0\Big(\frac{y}{\alpha}\Big)\leqslant m\leqslant\xi_1,$$

故有

$$-\alpha p\Big(-\frac{y}{\alpha}-x_1\Big)\geqslant \alpha\xi_1+\alpha f_0\Big(\frac{y}{\alpha}\Big).$$

由 $-\alpha>0$, 从上式可得 $p(y+\alpha x_1)\geqslant f_0(y)+\alpha\xi_1$, 也即证得

$$f_1(y+\alpha x_1)\leqslant p(y+\alpha x_1)\quad(\forall\, y\in E_0,\alpha\in(0,\infty)).$$

总合上述 $\alpha=0$ 情形及 (i) 和 (ii), 便证得泛函 f_1 即为 f_0 在 E_1 空间上保持"p 控制"下的延拓.

(2) 设 $\mathcal{F}_p$ 表示 f_0 的一切满足条件 $f(z)\leqslant p(z)(\forall\, z\in\mathcal{D}(f))$ 的延拓线性泛函的全体, 即有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p=\{f_\lambda\text{: }&f_\lambda\text{ 为线性子空间}\mathcal{D}(f_\lambda)\text{上的线性泛函},E_0\subset\mathcal{D}(f_\lambda),f_\lambda(z)\leqslant p(z)\ (\forall z\in\mathcal{D}(f)),\\ &f_\lambda(y)=f_0(y),\ \ \forall\, y\in E_0.\},\end{aligned}$$

在 $\mathcal{F}_p$ 中定义序关系"$\prec$"如下: 对任意 $f_{\lambda'},f_{\lambda''}\in\mathcal{F}_p$. 称 $f_{\lambda'}\prec f_{\lambda''}$ 是指

$$\mathcal{D}(f_{\lambda'})\subset\mathcal{D}(f_{\lambda''}),\quad f_{\lambda''}(z)=f_{\lambda'}(z),\ \ \forall\, z\in\mathcal{D}(f_{\lambda'}).$$

于是, $\mathcal{F}_p$ 就成为一个有序集. 此外, 对于 $\mathcal{F}_p$ 中的任一全序子集 $\mathcal{M}_p$, 令

$$\mathcal{D}=\bigcup_{f\in\mathcal{M}_p}\mathcal{D}(f),\quad f_{\hat\lambda}(z)=f_{\bar\lambda}(z)\ \ (\forall\, z\in\mathcal{D}(f_{\bar\lambda}),\quad f_{\bar\lambda}\in\mathcal{M}_p).$$

由 $\mathcal{M}_p$ 是全序的可知 $f_{\hat\lambda}(z)$ 在 $\mathcal{D}$ 上是唯一确定的, 并且它是以 $\mathcal{D}$ 为定义域的线性泛函, 当然仍有

$$f_{\hat\lambda}(z)\leqslant p(z),\ \ \forall\, z\in\mathcal{D},$$

从而导出 $f_{\hat\lambda}\in\mathcal{F}_p$ 及 $f_{\bar\lambda}\prec f_{\hat\lambda}$ $(\forall\, f_{\bar\lambda}\in\mathcal{M}_p)$, 此即导出: $\mathcal{F}_p$ 中任一全序集 $\mathcal{M}_p$ 均有上界. 所以由引理 1 可知 $\mathcal{F}_p$ 必存在一极大元, 不妨记为 f.

(3) 极大元 f 即为 f_0 在 E 上的延拓. 为验证这一结论, 由 f 的求法可知仅需证明 $\mathcal{D}(f)=E$ 就可以了. 事实上, 如果此结论不成立, 即有 $\mathcal{D}(f)\subsetneqq E$, 则由上面证明中的 (1) 可知, 此时必有泛函 f 的一个保持"p 控制"的线性延拓 f^*, 使得 $f^*\in\mathcal{F}_p$ 以及 $\mathcal{D}(f)\subsetneqq\mathcal{D}(f^*),f^*(x)=f(x)$ $(\forall x\in\mathcal{D}(f))$. 显然, 这与 f 是集 $\mathcal{F}_p$ 中的极大元假设相矛盾. □

注 在上面定理的证明中, (1) 是关键. 初看起来其证明思路难以理解, 然而, 如果我们注意式 (3.1.1) (泛函 f_0 的"形式扩张"), 然后倒推出数 ξ_1 所须满足的条件, 其证明技巧就不难掌握了.

事实上, 如果 f_1 是 f_0 在 E_1 上的线性延拓, 那么它一定具有如下的形式:

$$f_1(y+\alpha x_1)=f_0(y)+\alpha\xi_1\quad(\forall\, y\in E_0,\alpha\in(-\infty,\infty)).$$

如果我们能确定上面的 (实) 数 $\xi_1=f_1(x_1)$, 使得其满足:

$$f_1(y+\alpha x_1)\leqslant p(y+\alpha x_1)\quad(\forall\, y\in E_0,\alpha\in(-\infty,\infty)),$$

问题就解决了. 而此式等价于

$$\alpha\xi_1\leqslant p(y+\alpha x_1)-f_0(y).$$

当 $\alpha=0$ 时, 上式显然成立.

当 $\alpha>0$ 时, 就必须要求 (注意 p 的正齐性及 f_0 的线性) $\xi_1\leqslant p(\frac{1}{\alpha}y+x_1)-f_0(\frac{1}{\alpha}y)$ $(\forall\, y\in E_0;\alpha>0)$. 此式显然等价于 (注意 E_0 为线性空间) $\xi_1\leqslant p(y+x_1)-f_0(y)\,(\forall\, y\in E_0)$, 这也等价于

$$\xi_1\leqslant\inf_{y\in E_0}(p(y+x_1)-f_0(y)).$$

而当 $\alpha<0$ 时, 类似地需要求 $\xi_1\geqslant -p(\frac{1}{-\alpha}y-x_1)+f_0(\frac{1}{-\alpha}y)$ $(\forall\, y\in E_0;\alpha<0)$, 此式等价于 $\xi_1\geqslant -p(y-x_1)+f_0(y)$ $(\forall\, y\in E_0)$, 故也等价于

$$\xi_1\geqslant\sup_{y\in E_0}(-p(y-x_1)+f_0(y)).$$

为了 ξ_1 取法的合理性只需下式成立:

$$\sup_{y\in E_0}(-p(y-x_1)+f_0(y))\leqslant\inf_{y\in E_0}(p(y+x_1)-f_0(y)),$$

此式显然等价于不等式

$$-p(y'-x_1)+f_0(y')\leqslant p(y''+x_1)-f_0(y'')\quad(\forall y',y''\in E_0).$$

注意到 f_0 的线性和 p 的次加性, 上式显然可由以下关系式导出:

$$\begin{aligned}f_0(y')+f_1(y'')&=f_0(y'+y'')\leqslant p(y'+y'')\\&=p(y'+x_1+y''-x_1)\\&\leqslant p(y'+x_1)+p(y''-x_1).\end{aligned}$$

因而定理 1 中的 (1) 得证.

为了将定理 1 推广到“凸泛函”控制下的情形, 我们给出凸泛函的定义:

定义 5　线性空间 E 的泛函 $c(x)$ 称为**凸泛函**,是指对任意 $x, y \in E$ 均有

$$c(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda c(x) + (1-\lambda)c(y) \quad (\forall \lambda \in [0,1]).$$

注　前面定义的次加、正齐性泛函显然是凸泛函, 但反之未必. 其反例见实轴上定义的函数 $y = x^2$ 即可.

完全与上面定理 1 的证明方法类似, 当我们注意到凸泛函的定义时, 不难导出下面的推广命题:

定理 2 (Weston)　在上面的定理 1 中, 当把那里的次加、正齐性 "控制泛函" $p(x)$ 换为凸泛函 $c(x)$ 时, 其相应的结论仍是成立的.

证明　与定理 1 的证明方法类似, 对于任一元 $x \in E \backslash E_0$, 只要能证明将 E_0 上定义的 (实) 线性泛函 f_0 在保持 "凸泛函控制下", 可以延拓到 (实) 线性子空间 $E_1 = \{y + \alpha x_1\colon y \in E_0, \alpha \in (-\infty, +\infty)\}$ 上去就可以了. 下面就来证明这一事实.

我们注意到, 如果 f_1 是 f_0 在 E_1 上的线性延拓, 那么它一定具有形式

$$f_1(y + \alpha x_1) = f_0(y) + \alpha \xi_1, \quad \forall y \in E_0, \alpha \in (-\infty, \infty).$$

如果能确定某 $\xi_1 = f_1(x_1) \in \mathbb{R}$, 使得

$$f_1(y + \alpha x_1) \leqslant c(y + \alpha x_1), \quad \forall y \in E_0, \alpha \in (-\infty, \infty),$$

问题就解决了. 而此式等价于

$$\alpha \xi_1 \leqslant c(y + \alpha x_1) - f_1(y) = c(y + \alpha x_1) - f_0(y),$$

这就要求 ξ 满足

$$\xi_1 \leqslant \frac{1}{\alpha} c\Big(\alpha\Big(\frac{1}{\alpha} y + x_1\Big)\Big) - f_0\Big(\frac{1}{\alpha} y\Big), \quad \forall y \in E_0, \alpha > 0$$

及

$$\xi_1 \geqslant -\frac{1}{-\alpha} c\Big(-\alpha\Big(\frac{1}{-\alpha} y - x_1\Big)\Big) + f_0\Big(\frac{1}{-\alpha} y\Big), \quad \forall y \in E_0, \alpha < 0.$$

此式显然等价于

$$\begin{cases} \xi_1 \leqslant \dfrac{1}{\alpha} c\Big(\alpha\Big(y + x_1\Big)\Big) - f_0(y), & \forall y \in E_0, \alpha > 0; \\ \xi_1 \geqslant -\dfrac{1}{-\alpha} c(-\alpha(y - x_1)) + f_0(y), & \forall y \in E_0, \alpha < 0. \end{cases}$$

这也等价于

$$\begin{cases} \xi_1 \leqslant \alpha c\Big(\dfrac{1}{\alpha}(y + x_1)\Big) - f_0(y), & \forall y \in E_0, \alpha > 0; \\ \xi_1 \geqslant -\alpha c\Big(\dfrac{1}{\alpha}(y - x_1)\Big) + f_0(y), & \forall y \in E_0, \alpha > 0. \end{cases}$$

故 ξ 需满足

$$\begin{cases} \xi_1 \leqslant \inf\limits_{\substack{y\in E_0\\ \alpha>0}} \Big[\alpha c\Big(\dfrac{1}{\alpha}(y+x_1)\Big) - f_0(y)\Big], \\ \xi_1 \geqslant \sup\limits_{\substack{y\in E_0\\ \alpha>0}} \Big[-\alpha c\Big(\dfrac{1}{\alpha}(y-x_1)\Big) + f_0(y)\Big]. \end{cases}$$

为了 ξ_1 的存在只需

$$-\infty < \sup_{\substack{y\in E_0\\ \alpha>0}} \Big[-\alpha c\Big(\frac{1}{\alpha}(y-x_1)\Big) + f_0(y)\Big] \leqslant \inf_{\substack{y\in E_0\\ \alpha>0}} \Big[\alpha c\Big(\frac{1}{\alpha}(y+x_1)\Big) - f_0(y)\Big] < \infty.$$

最后一式显然等价于

$$-\alpha c\Big(\frac{1}{\alpha}(y'-x_1)\Big) + f_0(y') \leqslant \beta c\Big(\frac{1}{\beta}(y''+x_1)\Big) - f_0(y''), \quad \forall y', y'' \in E_0, \quad \alpha, \beta > 0.$$

而此式可从

$$\begin{aligned} f_0(y') + f_1(y'') &= (\alpha+\beta) f_0\Big(\frac{y'+y''}{\alpha+\beta}\Big) \\ &\leqslant (\alpha+\beta) c\Big(\frac{y'+y''}{\alpha+\beta}\Big) \\ &= (\alpha+\beta) c\Big(\frac{y'-x_1+y''+x_1}{\alpha+\beta}\Big) \\ &= (\alpha+\beta) c\Big(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{1}{\alpha}(y'-x_1) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{1}{\beta}(y''+x_1)\Big) \\ &\leqslant (\alpha+\beta)\Big[\frac{\alpha}{\alpha+\beta} c\Big(\frac{1}{\alpha}(y'-x_1)\Big) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} c\Big(\frac{1}{\beta}(y''+x_1)\Big)\Big] \\ &= \alpha c\Big(\frac{1}{\alpha}(y'-x_1)\Big) + \beta c\Big(\frac{1}{\beta}(y''+x_1)\Big), \quad \forall\, y', y'' \in E_0, \alpha, \beta > 0 \end{aligned}$$

中得出. □

注* 定理 2 也可以作为定理 1 的直接推理.

证明* 作 $E\times\mathbb{R}$, 令

$$p[(x,t)] = \inf\Big\{\alpha\colon c\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) \leqslant \frac{t}{\alpha}+1\Big\}, \quad \forall\,(x,t) \in E\times\mathbb{R};$$

$$g_0[(x,t)] = f_0(x) - t, \ \forall (x,t) \in E_0\times\mathbb{R}.$$

若 $c(\frac{x}{\alpha}) \leqslant \frac{t}{\alpha}+1$ 成立, 可知对任意 $(x,t) \in E_0\times\mathbb{R}$, 从设则有

$$f_0\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) \leqslant c\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) \leqslant \frac{t}{\alpha}+1,$$

从而 $g_0[(x,t)] = f_0(x) - t \leqslant \alpha$. 再由 $p[(x,t)]$ 的定义知

$$g_0[(x,t)] \leqslant p[(x,t)], \quad \forall\,(x,t) \in E_0\times\mathbb{R}.$$

另外, 对于任意 $\lambda>0$ 及 $(x,t),(y,s)\in E\times\mathbb{R}$, 由 p 的定义有

$$\begin{aligned}p[\lambda(x,t)]&=\inf\left\{\alpha\colon c\left(\frac{\lambda x}{\alpha}\right)\leqslant\frac{\lambda t}{\alpha}+1\right\}\\&=\lambda\inf\left\{\alpha\colon c\left(\frac{x}{\alpha}\right)\leqslant\frac{t}{\alpha}+1\right\}\\&=\lambda p[(x,t)],\end{aligned}$$

又设 $\lambda=p[(x,t)],\mu=p[(y,s)]$, 对任意 $\varepsilon>0$, 必存在 λ' 和 μ' 满足

$$\lambda<\lambda'<\lambda+\varepsilon,\quad \mu<\mu'<\mu+\varepsilon;$$

$$c\left(\frac{x}{\lambda'}\right)\leqslant\frac{t}{\lambda'}+1,\quad c\left(\frac{y}{\mu'}\right)\leqslant\frac{y}{\mu'}+1.$$

故

$$\begin{aligned}c\left(\frac{x+y}{\lambda'+\mu'}\right)&=c\left(\frac{\lambda'}{\lambda'+\mu'}\frac{x}{\lambda'}+\frac{\mu'}{\lambda'+\mu'}\frac{y}{\mu'}\right)\\&\leqslant\frac{\lambda'}{\lambda'+\mu'}c\left(\frac{x}{\lambda'}\right)+\frac{\mu'}{\lambda'+\mu'}c\left(\frac{y}{\mu'}\right)\\&\leqslant\frac{\lambda'}{\lambda'+\mu'}\left(\frac{t}{\lambda'}+1\right)+\frac{\mu'}{\lambda'+\mu'}\left(\frac{s}{\mu'}+1\right)\\&\leqslant\frac{t+s}{\lambda'+\mu'}+1,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}p[(x,t)+(y,s)]&=p(x+y,t+s)\\&=\inf\left\{\alpha\colon c\left(\frac{x+y}{\alpha}\right)\leqslant\frac{t+s}{\alpha}+1\right\}\\&\leqslant\lambda'+\mu'\\&\leqslant\lambda+\mu+2\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知 $p[(x,t)+(y,s)]\leqslant\lambda+\mu=p[(x,t)]+p[(y,s)]$, 故导出 $p[(x,t)]$ 是次加、正齐性的.

由此直接从定理 1 可知存在定义在 $E\times\mathbb{R}$ 上的线性延拓泛函 g, 满足 $g[(x,t)]\leqslant p[(x,t)]$ $(\forall\,(x,t)\in E\times\mathbb{R})$. 可令 $g[(x,t)]=f(x)-at$ (其中: $a\in\mathbb{R},f(x)$ 为 E 上线性泛函). 由 $f(y)-at=f_0(y)-t\ \ (\forall y\in E_0,t\in\mathbb{R})$ 知 $a=1$. 当 $t=0$ 时, 有

$$f(y)=f_0(y),\quad\forall\,y\in E_0.$$

当令 $\alpha=1, t=c(x)-1$ 时, 可知

$$c\left(\frac{x}{\alpha}\right)=c(x)=[c(x)-1]+1=\frac{t}{\alpha}+1.$$

由 $g[(x,t)]\leqslant p[(x,t)]$ 及 $p[(x,t)]$ 的定义知

$$f(x)-[c(x)-1]=f(x)-t=g[(x,t)]\leqslant\alpha=1,\quad\forall x\in E,$$

从而

$$f(x)\leqslant c(x),\quad\forall x\in E,$$

故 $f(x)$ 即为所需的保控延拓线性泛函. □

对上面的定理我们感到不足的是, 它仅仅是在 "实" 的线性空间 (在一定条件下) 讨论线性泛函的可延拓性. 当然, 我们希望把它推广到一般 "复的" 线性空间中去. 然而, 仅仅把上面的定理形式地搬来是不行的, 因为在复线性空间中上面的条件和结论中相应的不等式就没有意义了 (一般的复数是不能比较大小的), 因此必须做某些修改. 首先, 把 "控制函数" 做某些修改, 我们给出下面的定义:

定义 6 线性空间 E 上的次加泛函 $p(x)$ 称为**对称的** (或**绝对齐次性的**), 是指

$$p(\alpha x)=|\alpha|p(x),\quad\forall x\in E,\alpha\in K.$$

注 1 设 $p(x)$ 为 E 上的对称次加泛函, 则在 E 上必有 $p(x)\geqslant 0$.

事实上, 对任意 $x\in E$, 由泛函 $p(x)$ 的假设, 有

$$p(x)=p(2x-x)\leqslant p(2x)+p(-x)=2p(x)+p(x)=3p(x)\quad(\forall x\in E),$$

从而导出 $2p(x)\geqslant 0$ 即 $p(x)\geqslant 0$.

注 2 显然易见, 拟范数 $||x||$ 是赋拟范线性空间 E 上的一个对称次加泛函. 此外, 凡对称 (次加) 泛函一定也是正齐性 (次加) 泛函. 但反之却未必成立.

事实上, 取函数 $p(x)=|x|+x$ $(\forall x\in\mathbb{R})$, 则 $p(x)$ 显然是正齐性次加泛函, 但却不是对称次加泛函.

有了上面的定义, 借助于实空间上泛函的延拓定理, 我们就可以引出在一般 "复" 线性空间中的线性泛函的延拓定理.

定理 3 (Bohnenblust-Sobczyk 定理) 假设

1° E 是 "复" 线性空间, E_0 是 E 内一 "复" 线性子空间;

2° $p(x)$ 是 E 上的 "对称、次加" 泛函, 并且满足条件 $|f(y)|\leqslant p(y)$ $(\forall y\in E_0)$,

则必存在一定义在全空间 E 上的线性泛函 $f(x)$, 满足

1) $f(y)=f_0(y),\quad\forall y\in E_0$;

2) $|f(x)|\leqslant q(x),\quad\forall x\in E$.

证明　首先令 $f_0(x) = R_0(x) + \mathrm{i}I_0(x)$ $(\forall x \in E_0)$, 这里 $R_0(x) = \mathrm{Re}.f_0(x)$, $I_0(x) = \mathrm{Im}.f_0(x)$, 对任意 $x \in E_0$, 从而由 $f_0(x)$ 的"复齐性"可知 $I_0(x) = -R_0(\mathrm{i}x)$. 由 E_0 是复线性空间, 根据泛函 $R_0(x)$ 的定义不难由 $f_0(x)$ 在 E_0 上的线性推出它们均为 E_0 上的"实"线性泛函. 且由于实数域是复数域的子集, 故每个复线性空间按原来复空间的加法及关于实数的乘法, 显然亦构成实的线性空间. 因此, 当我们视 E 和 E_0 为实空间时, E_0 仍为 E 的线性子空间, 泛函 $R_0(x)$ 就成为实空间 E_0 上的"实"线性泛函了. 此外由假设条件

$$R_0(x) \leqslant |R_0(x)| = |\mathrm{Re}f_0(x)| \leqslant |f_0(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in E,$$

故由定理 1 可知: 泛函 $R_0(x)$ 可以在保持 $p(x)$ 的"控制"下延拓为整个空间 E 上的"实"线性泛函 $R(x)$. 令

$$f(x) = R(x) - \mathrm{i}R(\mathrm{i}x) \quad (\forall x \in E);$$

下面我们分三步来证明 $f(x)$ 即为定理所求之泛函:

(1) $f(y) = f_0(y)$ $(\forall y \in E_0)$.

事实上, 由 $f(x)$ 构造可知, 对于任意的 $x \in E_0$, 有

$$f(x) = R(x) - \mathrm{i}R(\mathrm{i}x) = R_0(x) - \mathrm{i}R_0(\mathrm{i}x).$$

这样由于 E_0 为"复"线性子空间的假设, 故由 $x \in E_0$ 可知 $\mathrm{i}x \in E_0$. 另外, 注意到 $f_0(x)$ 的实部 $R_0(x)$ 与虚部 $I_0(x)$ 的关系即得到 $f(x) = R_0(x)+\mathrm{i}I_0(x) = f_0(x)$ $(\forall x \in E_0)$.

(2) $f(x)$ 是 E 上的 (复) 线性泛函.

其实, 由 $f(x)$ 的定义以及 $R(x)$ 的实线性, 显然可知 $f(x)$ 是实齐性的可加泛函. 下面证明它的"复"齐性. 为此我们只要对 i 的乘法验证其为齐性的就可以了. 而此同样由 $f(x)$ 的定义直接如下导出:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{i}x) &= R(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}R(\mathrm{i}(\mathrm{i}x)) = R(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}R(-x) \\ &= R(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}R(x) = \mathrm{i}[R(x) - \mathrm{i}R(\mathrm{i}x)] \\ &= \mathrm{i}f(x), \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

可知这是明显的.

(3) $f(x) \leqslant p(x)$ $(\forall x \in E)$.

事实上, 注意到对任意的 $x \in E$, 如果 $f(x) = 0$, 那么显然上式成立. 而当 $f(x) \neq 0$ 时, 设 $\psi = \arg f(x)$(复数 $f(x)$ 的"主幅角"), 那么注意到 $f(x)$ 的复齐性, 便可得到

$$|f(x)| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi} f(x) = f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi} x) = R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi} x) + \mathrm{i} \cdot 0 = R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi} x).$$

而再注意到 $R(x)$ 是 $R_0(x)$ 保持 $p(x)$ 控制的延拓, 因此从上式立即导出

$$|f(x)| = R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}x) \leqslant p(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}x) = |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}|p(x) = p(x). \qquad \square$$

由上面的定理, 我们不难导出下面关于连续线性泛函的“保范延拓”命题:

推理 1 设 E 为复 (实) 赋拟范线性空间, E_0 为其一复 (实) 线性子空间, f_0 为 E_0 上定义的连续线性泛函, 则在 E 上必存在连续线性泛函 f, 使得

$$f(y) = f_0(y) \ \ (\forall\, y \in E_0), \quad ||f|| = ||f_0||_{E_0},$$

这里 $||f_0||_{E_0}$ 为泛函 f_0 在 E_0 上的范数.

证明 只要在上面的定理 2(和定理 1) 中, 令控制泛函

$$p(x) = ||f_0||_{E_0} \cdot ||x||, \quad \forall\, x \in E,$$

则有 $|f_0(y)| \leqslant ||f_0||_{E_0} \cdot ||y|| \overset{\triangle}{=} p(y)$ $(\forall\, y \in E_0)$. 故由上面定理 2(和定理 1) 可知: f_0 在 E 上必有线性延拓 f 满足 $|f(x)| \leqslant p(x) \overset{\triangle}{=} ||f_0||_{E_0} \cdot ||x||$ $(\forall\, x \in E)$. 由此立即得到 $||f|| \leqslant ||f_0||_{E_0}$. 另一方面, 由泛函范数的定义又知

$$||f|| = \sup_{\substack{||x||=1 \\ x\in E}} |f(x)| \geqslant \sup_{\substack{||y||=1 \\ y\in E_0}} |f(y)| = \sup_{\substack{||y||=1 \\ y\in E_0}} |f_0(y)| = ||f_0||_{E_0}.$$

结合上面两式则得 $||f|| = ||f_0||_{E_0}$, 此即导出了本推理的结论. $\square$

作为定理 1 和 2 的有趣应用, 我们给出下面的推理. 当读者逐行阅读此推理的证明时, 可能并不感到有任意困难. 但我们必须提醒注意的是: 此证明方法是非常具有创造性的! 读者如果怀疑这一点, 你不妨先不看下面的证明, 自己先思索一下, 想想如何证法. 这样, 你方能品出此证明的技巧所在.

推理 2 (线性泛函的保控分解定理) 设 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 为复 (实) 线性空间 E 上的两个次加、绝对齐性 (正齐性) 泛函, $f(x)$ 为 E 上一线性泛函, 满足条件

$$|f(x)| \leqslant p_1(x) + p_2(x) \text{ 或 } (f(x) \leqslant p_1(x) + p_2(x)), \quad \forall\, x \in E,$$

则必存在 E 上的线性泛函 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 使得

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad \forall\, x \in E$$

及

$$|f_1(x)| \leqslant p_1(x), \quad |f_2(x)| \leqslant p_2(x)$$

$$(\text{相应地, } f_1(x) \leqslant p_1(x), \quad f_2(x) \leqslant p_2(x)).$$

证明 令 $Z=E\times E$, 及函数

$$q(x,y)=p_1(x)+p_2(y),\quad \forall\,(x,y)\in Z.$$

显然, $q(x,y)$ 亦为空间 Z 上的次加、绝对齐性 (正齐性) 泛函. 并且, 当令"对角线"集 $Z_0=\{\,(x,x)\colon x\in E\}$ 时, Z_0 为 Z 的一个线性子空间. 此外, 对于 Z_0 上的线性泛函

$$g_0(x,x)=f(x),\quad \forall\,(x,x)\in Z_0,$$

由假设还有

$$|g_0(x,x)|\leqslant q(x,x),\quad (g_0(x,x)\leqslant q(x,x));\quad \forall\,(x,x)\in Z_0.$$

因而, 由上面定理 2(定理 1) 则知: 存在 g_0 在空间 Z 上的线性延拓泛函 $g(x,y)$, 使得

$$|g(x,y)|\leqslant q(x,y),\quad (g(x,y)\leqslant q(x,y));\quad \forall\,(x,y)\in Z.$$

此外, 注意到 g 的线性, 又有

$$f(x)=g_0(x,x)=g(x,x)=g(x,0)+g(0,x),$$

及

$$|g(x,0)|\leqslant q(x,0)=p_1(x),\quad |g(0,x)|\leqslant q(0,x)=p_2(x),$$

$$(g(x,0)\leqslant p_1(x),\quad g(0,x)\leqslant p_2(x));\quad \forall\,x\in E.$$

所以 $f_1(x)=g(x,0)$ 及 $f_2(x)=g(0,x)$ 即为所求. □

附 必须特别注意的是, 上面证明中: 作积空间 $Z=E\times E$ 并考虑其"对角线"子空间 $Z_0=\{(x,x)\colon x\in E\}$ 上相应线性泛函的保控延拓, 此乃是一个非常出色的创新思维! 当我们联想到一个著名的智力测验题:"用 6 根火柴棍如何摆成 4 个全等三角形?"时, 我们就不难体会, 解决这两问题的共同创新思维就是把问题从"平面"引申到"空间"来思考.

作为本节的结束, 我们对于本节的定理和推理作一些注记如下:

注 1 由归纳法, 不难将推理 2 中线性泛函 $f(x)$ 的控制泛函 $p(x)$ 的数目, 从两个增加到任意正整数 n 个, 并类似可得到 $f(x)$ 相应的 n 个线性泛函的保控分解定理.

注 2 在定理 2 关于"复"线性空间上线性泛函的延拓定理中, E_0 必须是"复"的线性子空间. 而对于实的线性子空间, 则命题未必仍成立. 并且 Bohnenblust 和 Sobczyk 已经指出:"在任意无穷维的复 Banach 空间中, 总存在其内一实线性子空间, 使得其上存在一个有界复线性泛函, 其不能保范延拓到全空间中去"(参看文献 [8]).

注 3 从定理 1 的证明中的几次"任取"(例如, 任取 ξ, 在 $\mathcal{F}_p$ 中任取极大元 f 等等) 可知, 上述线性泛函的延拓未必是唯一的. 因此, 相应的定理 2 和推理 1 及推理 2 中的延拓和分解也不是唯一的. 下面我们举一个简单的例子.

例 在二维"复"欧氏空间 $\mathbb{C}^2$ 中, 引入范数

$$||x||_1 = |\xi_1| + |\xi_2|, \quad \forall x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2,$$

并在此二维赋范空间 $E_{(2)}$ 的一个一维线性子空间 $E_0 = \{(\xi_1, 0): \forall \xi_1 \in \mathbb{C}\}$ 上定义泛函

$$f_0[(\xi_1, 0)] = \xi_1, \quad \forall x = (\xi_1, 0) \in E_0.$$

于是, 容易验证 $f_0 \in E_0^*, ||f_0|| = 1$. 并且对于 $E_{(2)}$ 上形如下式的泛函:

$$f_\alpha[(\xi_1, \xi_2)] = \xi_1 + \alpha\xi_2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},$$

显然它们均为 f_0 在全空间上的"线性延拓"泛函. 此外再从范数定义可知

$$||f_\alpha|| = \sup_{|\xi_1|+|\xi_2|=1} |\xi_1 + \alpha\xi_2| = \max(1, |\alpha|), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

因此我们看出, 上面对于 $|\alpha| \leqslant 1$ 时的泛函 f_α, 必均为 E_0 上泛函 f_0 在全空间 $E_{(2)}$ 上的"保范延拓"线性连续泛函. 故知保控线性延拓未必是唯一的.

注 4 对于连续线性算子而言, 相应的保范线性延拓定理一般是不成立的. 在 1939 年, Kakutani (角谷静夫) 得到了下面的结果:"设 T_0 是从 Banach 空间 E 的任意子空间 E_0 到 Banach 空间 E_1 内的连续线性算子, 那么 T_0 可保范延拓为整个空间 E 到 E_1 内的连续线性算子必须且只需 E 是内积空间"(参见文献 [7]).

§3.2 (非零) 连续线性泛函的存在定理 (含隔离性定理)

上节定理之应用是非常广泛的, 下面我们将逐一地予以介绍. 首先, 我们将前面的第二章多次用过的以下命题予以证明:

定理 1 (足够多的有界线性泛函存在) 设 E 为赋拟范线性空间, 则对任意的 $x_0 \in E, ||x_0|| \neq 0$, 存在 $f_1 \in E^*$, 使得

$$f_1(x_0) = ||x_0||, \quad ||f_1|| = 1.$$

证明 由于所需的泛函要满足条件 $f_1(x_0) = ||x_0||$, 因此我们自然想到, 在 E 的线性子空间 $E_0 = \{\alpha x_0: \alpha \in \mathbb{K}\}$ 上定义的泛函 f_0, 如果其延拓成为所需的泛函 f, 则必须定义为

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha f_0(x_0) = \alpha ||x_0||, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

于是, 当在 E 上定义泛函 $p(x) = ||x||$ $(\forall x \in E)$ 时, 容易看出, 有 $|f_0(y)| = ||y|| \leqslant p(y)$ $(\forall y \in E_0)$. 这样一来, 注意到 $p(x)$ 的性质, 我们就可以由上面的定理 1 和 3 把 f_0 控制延拓为全空间 E 上的线性泛函 f_1, 即有: $f_1(y) = f_0(y)$ $(\forall y \in E_0)$ 及

$$\begin{cases} f_1(x) \leqslant ||x||, & E\text{为“实”线性空间时}, \\ |f_1(x)| \leqslant ||x||, & E\text{为“复”线性空间时}, \quad \forall x \in E. \end{cases}$$

因此, 无论 E 为实或复空间, 均有 $|f_1(x)| \leqslant ||x||$ $(\forall x \in E)$, 从而 $||f_1|| \leqslant 1$. 但由另一方面, 延拓性还有 $f_1(x_0) = f_0(x_0) = ||x_0|| \neq 0$, 故 $||f_1|| \cdot ||x_0|| \geqslant |f_1(x_0)| = ||x_0||$, 从而 $||f_1|| \geqslant 1$. 最后综合以上两关系式便可得到 $||f_1|| = 1$. □

注 1　我们必须注意的是, 如果 E 不是赋拟范线性空间, 则其非零的连续线性泛函未必存在. 例如, 在第二章习题 2.15 中我们已经知道: 赋准范空间 (s) 上的连续线性泛函是存在的 (它们由“有限项非零”的数列的全体所构成), 然而, 也有非零连续线性泛函不存在的例子如下:

反例*　对于赋准范空间 $S[a,b]$(即: 在 $[a,b]$ 上所有“概”有穷的可测函数的全体. (其“概相等”视为同一元, 其“准范”数 $||x|| = \int_a^b \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}dt$). 由第一章知道其构成一个 Fréchet 空间, 且 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$ 等价于 $x_n(t)$ 当 $n \to \infty$ 时“依测度”收敛于 $x_0(t)$), 其上的非零连续线性泛函是不存在的.

验证　反之, 若 $S[a,b]$ 上有非零的连续线性泛函 f_0, 则注意到函数论中的“平均收敛”蕴含着“测度收敛”, 因而 f_0 也是 $S[a,b]$ 的子空间 $L^1[a,b]$ 上的连续线性泛函, 且由 $L^1[a,b]$ 按“测度收敛”也是稠于 $S[a,b]$ 的, 从而知 f_0 亦为 $L^1[a,b]$ 上的非零泛函. 继而由 §2.2 中 $(L^1[a,b])^* = M[a,b]$ 的结论可知, 必有一不恒为 0 的函数 $\tilde{f}_0(t) \in M[a,b]$, 使得

$$f_0(x) = \int_a^b x(t)\tilde{f}_0(t)dt, \quad \forall x = x(t) \in L^1[a,b].$$

我们取正数 ε_0, 使得集 $A_{\varepsilon_0} = \{t\colon |\tilde{f}_0(t)| \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall t \in [a,b]\}$ 有 $\mu(A_{\varepsilon_0}) > 0$, 并且用 $\chi_n(t)$ 表示 A_{ε_0} 内一测度在 $\frac{\mu(A_{\varepsilon_0})}{n}$ 与 $\frac{\mu(A_{\varepsilon_0})}{n-1}$ 之间的子集的特征函数. 这样, 当取 $x_n(t) = n\frac{\overline{f_0(t)}}{|f_0(t)|}\chi_n(t) (n = 1, 2, \cdots)$ 时, 对任意 $\sigma > 0$ 有

$$\begin{aligned} \mu\{t\colon |x_n(t)| \geqslant \sigma, t \in [a,b]\} &= \mu\{t\colon |n\chi_n(t)| \leqslant \sigma, t \in [a,b]\} \\ &\leqslant \frac{\mu(A_{\varepsilon_0})}{n-1}. \end{aligned}$$

即 $x_n(t)$ 当 $n \to \infty$ 时, “依测度”收敛于零, 也即 $||x_n(t)|| \to 0 (n \to \infty)$. 但另一方面, 却有

$$f_0(x_n)=\int_a^b x_n(t)\tilde{f}_0(t)dt$$

$$=\int_a^b n|\tilde{f}_0(t)|\chi_n(t)dt \geqslant n\varepsilon_0\frac{\mu(A_{\varepsilon_0})}{n}=\varepsilon_0\mu(A_{\varepsilon_0})>0,$$

从而 $f_0(x_n) \nrightarrow f(\theta)=0(n\to\infty)$, 此显然与 f_0 的连续性假设相矛盾. □

注 2 由上面的反例还可以得出：对一个赋"准范"线性空间而言, 连续线性泛函的延拓定理已经失效了. 类似的反例还可以在赋准范空间 $L^\beta(0<\beta<1)$ 上找到 (参考文献 [9]).

由上面定理 1 我们不难得到下面的推理：

推理 设 E 为赋范线性空间, $x,y\in E$, 则为了 $x=y$ 必须且只需对任意的 $f\in E^*$ 均有 $f(x)=f(y)$.

证明 推理的必要性是显然的. 充分性可由归谬法导出, 事实上, 如果 $x\neq y$, 则取元 $x_0=x-y\neq\theta$, 由范数定义有 $||x_0||\neq 0$. 故从定理 1 知存在 $f_1\in E^*$, 使得 $f_1(x_0)=||x_0||\neq 0$, 也即有 $f_1(x)-f_1(y)=f_0(x-y)\neq 0$. 此显然与假设矛盾. □

注 3 上面的定理 1 及其推理常常称为"Hahn-Banach 定理", 它是泛函分析中的基本定理之一, 在本书我们不断地用到它.

注 4 由定理 1 的推理显然可以看出：对于一个"弱收敛"的元列来说, 其弱收敛的极限必定是唯一确定的. 并且借助于它, 当我们要证明赋范线性空间中的两元 x 和 y 相等时, 只需验证 $f(x)=f(y)$ $(\forall f\in E^*)$.

注 5 满足定理 1 的条件的泛函 f_1 (即 $||f_1||=1, f_1(x_0)=||x_0||$) 称为非零元 x_0 的**极大泛函**. 因为注意到 §2.3 的命题, 我们可知

$$f_1(x_0)=||x_0||=||\widetilde{x}_0||$$

$$=\sup\{|f(x_0)|: ||f||\leqslant 1, f\in E^*\},$$

其中 $\widetilde{x}_0\in E^{**}$ 是按自然映射：$\widetilde{x}_0(f)=f(x_0)$ $(\forall f\in E^*)$, x_0 对应于 E^{**} 空间中的元. 也即：在 E^* 的单位球上定义的泛函 $|f(x_0)|$ 在"点" f_1 达到了极大值.

§3.2 附录　定理 1 的几何意义

定义 1 实线性空间 E 内的超平面 $\{x: f(x)=\xi, x\in E\}$ 称为凸集 V 的**承托超平面**, 是指该超平面在 V 的一侧且与 V 有公共点. 也即有

1) $f(x)-\xi$, 当 $x\in V$ 时具有相同的符号 ($\geqslant 0$ 或 $\leqslant 0$),

2) 存在一元 $x_0\in V$, 使得 $f(x_0)=\xi$.

注 1 对于实的赋 (拟) 范线性空间内的任意一元 $x_0(||x_0||\neq 0)$, 必可作 E 的"原心球" $B(\theta,||x_0||)=\{x: ||x||\leqslant ||x_0||, x\in E\}$ 的一个闭承托超平面 $\pi=$

$\{x\colon f_1(x)=||x_0||, x\in E\}$, 这就是定理 1 的几何意义 (参见图 3.1).

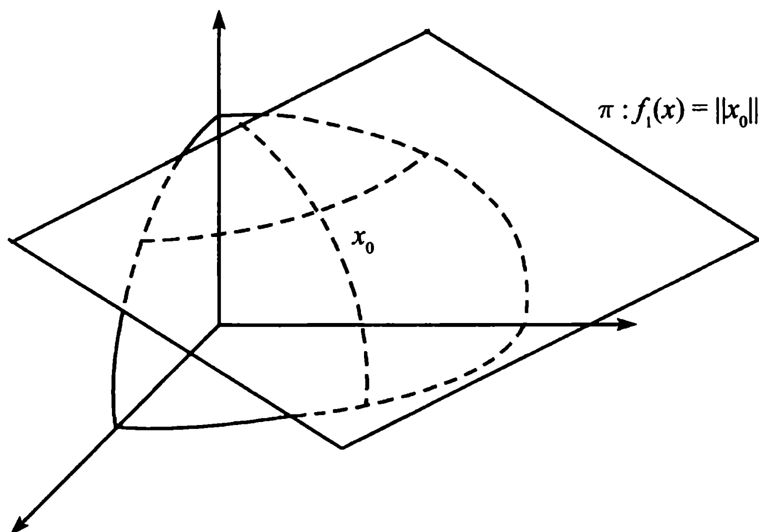


图 3.1

事实上, 对于上述 x_0 从定理 1 所得的泛函 $f_1\in E^*$, 我们可以作超平面 $\pi=\{x\colon f_1(x)=||x_0||, x\in E\}$. 那么首先由 f_1 的连续性可知上面的超平面是闭的. 其次, 对任意元 $x\in B(\theta,||x_0||)$, 由 $||f_1||=1$ 的性质, 我们可以导出 $f_1(x)-||x_0||\leqslant ||x||-||x_0||\leqslant 0$. 所以上面的超平面在球 $B(\theta,||x_0||)$ 的一侧. 最后由 $f_1(x_0)=||x_0||$ 的性质, 以及 $x_0\in B(\theta,||x_0||)$ 可知该超平面 π 与球 $B(\theta,||x_0||)$ 有公共点. 综合上述结果, 即得出注 1 的结论.

注 2　不难看出, 在定理 1 中, 如果对于实空间的情形, 换那里的 $||x||$ 为任意一个"非负的正齐性次加"泛函 $p(x)$; 而对于复空间的情形换为任意一个"对称次加"泛函 $p(x)$; 则相应的定理也成立. 由此可以类似地得到关于下面的几何解释: 对于实的赋"拟"范线性空间 E 内的任意一元 $x_0(||x_0||\neq 0)$, 必可作 E 内一凸集 $V=\{x\colon p(x)\leqslant p(x_0), x\in E\}$ 的一个闭承托超平面 $\{x\colon f(x)=p(x_0), x\in E$. 此结论的验证作为习题留给读者完成.

定理 2　设 E 为一个赋范线性空间, E_0 为其线性子空间, 则对任意 $x_1\in E$ 如果有

$$d(x_1,E_0)\triangleq\inf_{y\in E_0}||x_1-y||\triangleq d>0,$$

则存在 $f_1\in E^*$, 使得

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=x_1 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x\in E_0 \text{ 时};\end{cases}\quad \text{且有 } ||f_1||=\frac{1}{d}.$$

证明　作 E 内一线性子空间 $\widehat{E}_0$,

$$\widehat{E}_0=\{\alpha x_1+y\colon \alpha\in\mathbb{K}, y\in E_0\},$$

并在 $\widehat{E}_0$ 上定义泛函 f_0,

$$f_0(\alpha x_1 + y) = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, y \in E_0.$$

易见, f_0 为 $\widehat{E}_0$ 上一个确定的线性泛函, 且有

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}\, x = x_1 \text{时}; \\ 0, & \text{当}\, x \in E_0 \text{时}. \end{cases}$$

由 x_1 假设可知：于当 $\alpha \neq 0$ 时, 有 $||\alpha x_1 + y|| \neq 0$ $(\forall y \in E_0)$, 故得

$$\begin{aligned} |f_0(\alpha x_1 + y)| &= \frac{|\alpha|}{||\alpha x_1 + y||} ||\alpha x_1 + y|| \\ &= \frac{1}{||x_1 - (-y/\alpha)||} ||\alpha x_1 + y||, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, y \in E_0. \end{aligned}$$

并注意到 $-\frac{y}{\alpha} \in E_0$, 则有

$$\left|\left| x_1 - \left(-\frac{y}{\alpha} \right) \right|\right| \geqslant \inf_{y \in E_0} ||x_1 - y|| = d > 0.$$

从而由上两式可得

$$|f_0(\alpha x_1 + y)| \leqslant \frac{1}{d} ||\alpha x_1 + y||, \quad \forall (\alpha x_1 + y) \in \widehat{E}_0$$

(上式当 $\alpha = 0$ 时亦对). 由此导出 $||f_0||_{\widehat{E}_0} \leqslant \frac{1}{d}$. 另一方面, 又有

$$1 = |f_0(x_1)| = |f_0(x_1 - y)| \leqslant ||f_0||_{\widehat{E}_0} ||x_1 - y||, \quad \forall y \in E_0,$$

从而

$$1 \leqslant ||f_0||_{\widehat{E}_0} \inf_{y \in E_0} ||x_1 - y|| = d ||f_0||_{\widehat{E}_0},$$

也即导出 $||f_0||_{\widehat{E}_0} \geqslant \frac{1}{d}$. 因此, 总上两结果, 我们立即得到 $||f_0||_{\widehat{E}_0} = \frac{1}{d}$.

最后利用 §3.1 定理 1 的结果, 便可将线性子空间 $\widehat{E}_0$ 上定义的连续线性泛函 f_0 "保范延拓" 为全空间 E 上的连续线性泛函 f_1. 且由 f_0 的性质可以看出 f_1 即是本定理所要求的泛函. □

注 定理 2 的几何意义是, 在空间中存在一闭超平面, 把一个点及与之有正距离的一个线性子空间隔开.

由定理 2 可以直接导出一个与逼近论有关的推理：

推理 设 M 是赋范线性空间 E 内的任一子集, $x_0 \neq \theta$ 为 E 中任意给定元, 则为了元 $x_0 \in \overline{[M]}$, 必须且只需对任意 $f \in E^*$ 如果有 $f(x)=0$ $(\forall x \in M)$, 则有 $f(x_0)=0$(这里 $\overline{[M]}$ 表示由 M 张成的"闭线性子空间").

为了介绍下面一个定理, 我们先给出仿射平面的定义.

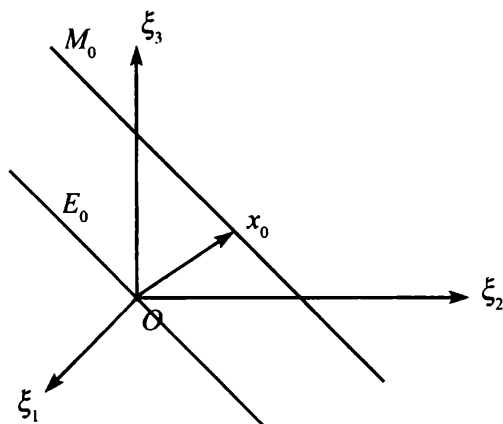


图 3.2

定义 2 线性空间 E 中的集 M_0 称为**仿射平面 (线性流形)** 是指 $M_0 = E_0 + x_1 = \{x_1 + y\colon y \in E_0\}$, 其中: 元 E_0 是 E 上的线性子空间, x_1 为 E 中一个元. 特别地, 线性子空间就是一个仿射平面.

注 1 当 $x_1 \notin E_0$ 时, 上面的 M_0, 即为 E 内线性子空间 E_0 按"向量 x_1"平移而得到的集合 (参见图 3.2). 特别地, 当 M_0 是仿射平面时, 任取一点 $y_0 \in M_0$, 则 $M_0 - y_0$ 必为 E 中的线性子空间.

注 2 不难验证: M_0 为 E 中的仿射平面, 必须且只需对任意 $y_1, y_2 \in M_0$, 有

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in M_0, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \text{且 } \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

注 3 从定义不难看出, 与 §2.3 定理 1 类似, 我们有如下结果: 对于上述仿射平面 M_0 而言, M_0 为闭集 $\Longleftrightarrow$ E_0 为 E 的闭线性子空间.

定理 3 (Mazur) 设 V 是"实"赋范线性空间 E 中含有内点的凸集. M 为 E 中的仿射平面, 并有 $M \bigcap V^\circ = \varnothing$, 则必定存在泛函 $f_1 \in E^*$ 和实数 c_1, 使得

$$f_1(x) = \begin{cases} = c_1, & \text{当 } x \in M \text{时}; \\ \leqslant c_1, & \text{当 } x \in V \text{时}; \\ < c_1, & \text{当 } x \in V^\circ \text{时}. \end{cases}$$

证明 首先, 由假设凸集 V 具有内点, 因此不妨假设 $\theta \in V^\circ$ (否则, 我们可以通过"平移"来实现, 而平移后仿射平面仍为仿射平面, 而在线性泛函作用下, 它们的泛函值仅差同一常数, 所以不妨碍本定理的结论). 然后, 我们作 M 的线性扩张 $E_0 = [M]$. 显然 E_0 为 E 的线性子空间, 并且由仿射平面的定义可知 M 必为子空间 $E_0 = [M]$ 内 (仅差一维) 的一个超平面, 因而必存在 E_0 上的线性泛函 f_0, 使得

$$M = \{x\colon f_0(x) = 1, x \in E_0\}.$$

其次, 令 $p(x)$ 为 E 中 (满足 $\theta \in V^\circ$) 的凸集 V 上所决定的 Minkowski 泛函, 则有 (参见本章附录中定理 6)

$$V \subset \{x\colon p(x) \leqslant 1, x \in E\}, \quad V^\circ = \{x\colon p(x) < 1, x \in E\}.$$

由假设 M 不含 V 的内点, 从上式便可导出对任意 $x \in M$, 必有 $p(x) \geqslant 1$. 由此则有

$$f_0(x) = 1 \leqslant p(x), \quad \forall x \in M.$$

此外, 注意到 f_0 在 E_0 上的齐性以及 $p(x)$ 的正齐性, 我们还可得到

$$f_0(tx) = t \leqslant tp(x) = p(tx), \quad \forall t \geqslant 0, x \in M.$$

再由 $p(x)$ 的非负性, 又有

$$f_0(tx) = t \leqslant 0 \leqslant p(x), \quad \forall t < 0, x \in M.$$

于是再注意到 M 为 E_0 上超平面的性质, 当令 $N_{f_0} = \{x\colon f_0(x) = 0, \ \ \forall x \in E_0\}$, 元 $x_0 \in M$ 时, 则有

$$E_0 = \{\alpha x_0\} + N_{f_0} = \{\alpha x\colon \alpha \in \mathbb{R}, x \in M\} \bigcup N_{f_0}.$$

因此从前面的两个结果可以得出

$$f_0(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in E_0.$$

最后利用 Hahn-Banach 定理, 便可将上述线性泛函 f_0 保持 $p(x)$ 控制地延拓为 E 上的线性泛函 f_1. 这样, 根据 Minkowski 泛函 $p(x)$ 的性质, 可导出

$$f_1(x) \leqslant p(x) \leqslant 1, \quad \forall x \in V;$$

$$f_1(x) \leqslant p(x) < 1, \quad \forall x \in V^\circ.$$

而由上面后一式知存在 $x_0 \in V^\circ, \delta > 0$ 使得当 $||x|| \leqslant \delta$ 时, 便有 $f_1(x_0 \pm x) < 1$. 由此则有

$$|f_1(x)| < 1 + |f_1(x_0)|, \quad \forall x \in B(\theta, \delta),$$

从而

$$|f_1(x)| \leqslant (1 + |f_1(x_0)|)\frac{1}{\delta}||x||, \quad \forall x \in E.$$

故 f_1 为 E 上的有界线性泛函, 即 $f_1 \in E^*$. 并且由 f_1 及 f_0 的形成可知

$$f_1(x) = f_0(x) = 1, \quad \forall x \in M,$$

即知此 f_1 为本定理所求之泛函. □

注 1 定理 3 的几何意义是指: 在定理的假设条件下, 必存在包含着仿射平面 M 的 "闭" 超平面 $H, H = \{x\colon f(x) = c_1, x \in E\}$, 使其不含凸集 V 的内点.

由定理 3, 我们可以直接得到下面的推理 (取 $M=\{x_1\}$(单点集)):

推理 1　如果 V 为"实"赋范线性空间 E 中一具有内点的凸集, 那么对任意 $x_1 \notin V^\circ$, 存在 $f_1 \in E^*, c_1 \in \mathbb{R}$, 使得

$$f_1(x)=\begin{cases} c_1, & \text{当 } x=x_1 \text{时}; \\ \leqslant c_1, & \text{当 } x\in V \text{时}; \\ < c_1, & \text{当 } x\in V^\circ \text{时}. \end{cases}$$

注 2　上面推理 1 的几何意义是指: 在推理 1 的条件下, 必有一经过点 x_1 的"闭"超平面 H, 使得凸集 V 在 H 的一侧. 特别地, 如果推理 1 中有元 $x_1 \in V\setminus V^\circ$, 那么其结论表明: 过具有内点的凸集 V 上的任一边界点 x_1 必存在着 V 的一个"闭"的"承托"超平面 (参阅 §3.2 的定义 1).

由上面的推理 1 还可以得到下面关于"**凸体**"(含有内点的闭凸集) 构造的一个推理. 为此, 作为平面的几何推广, 我们先给出关于闭的"半空间"集的定义.

定义 3　设 E 为一实赋范线性空间, H_f 为由泛函 $f\in E^*$ 所确定的闭超平面, $H_f=\{x\colon f(x)=c_f, x\in E\}$($c_f$ 为某一实数), 则称集 $W_f=\{x\colon f(x)\leqslant c_f, x\in E\}$ 为由闭超平面 H_f 所确定的闭的**半空间集**.

有了上面的定义, 我们就可以给出下面的推理:

推理 2*　如果 V 为"实"赋范线性空间 E 中具有内点的闭凸集, 那么 V 必为一些闭的"半空间"集之交集.

证明　由推理 1 及注 2 可知, 对于 (凸体) V 的任意边界点 $x\in \overline{V}\setminus V^\circ = V\setminus V^\circ$, 均存在着 V 的一个闭的承托超平面 (参看图 3.3):

$$H_f=\{x\colon f(x)=c_f, x\in E\},$$

这里 $f(x)\leqslant c_f$ $(\forall x\in V), f(x)<c_f$ $(\forall x\in V^\circ)$. 于是, 当设这样的泛函 f 的集为 G^* 时 (显然 $G^*\subset E^*$), 由这些闭超平面 H_f 所确定的闭的半空间的集类

$$W_f=\{x\colon f(x)\leqslant c_f, x\in E\},\quad \forall f\in G^*$$

的交集 $\bigcap_{f\in G^*} W_f$ 必为 V.

事实上, 一方面从上面的闭超平面 H_f $(f\in G^*)$ 的形成显然可知

$$V\subset \bigcap_{f\in G^*} W_f.$$

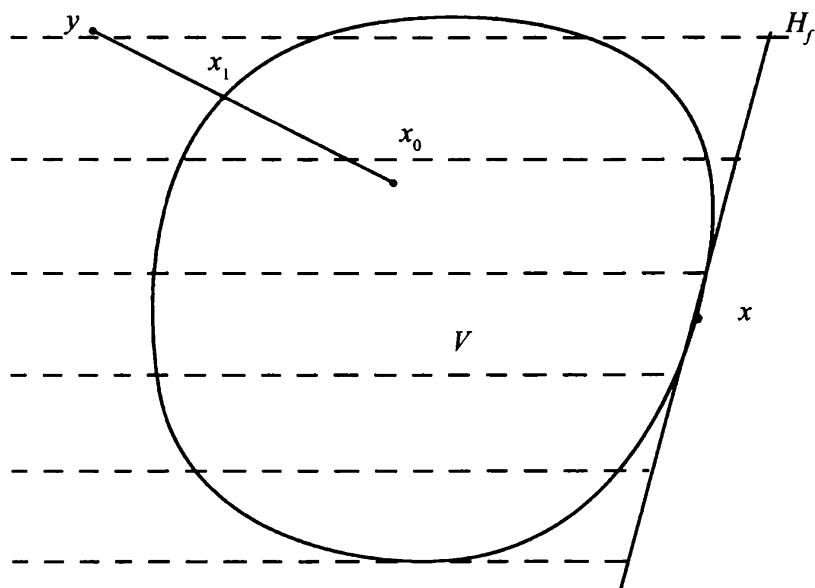


图 3.3

而另一方面, 如果有一元 $y \in \bigcap_{f\in G^*} W_f$, 使得 $y \notin V$, 那么当取 V 中任一内点 x_0, 并作闭线段 $[x_0, y] = \{\lambda x_0 + (1-\lambda)y\colon 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ 时, 用熟知的"区间套"定理对上面 λ 的"抽象"函数 (值域是空间 E): $\varphi(\lambda) = \lambda x_0 + (1-\lambda)y (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ 来讨论时 (注意 $\varphi(\lambda)$ 在 $[0,1]$ 两端分别为内点和外点), 我们便可找到一点 $\lambda_1 \in (0,1)$, 使得 $\varphi(\lambda_1) = \lambda_1 x_0 + (1-\lambda_1)y = x_1$ 为 V 的边界点, 从而注意到 V 是闭集的假设, 则可得到 $x_1 \in V \setminus V^\circ$. 同理可知, 对于 V 的边界点 x_1 而言, 存在 $f_1 \in E^*$, 使得

$$H_{f_1} = \{x\colon f_1(x) = c_{f_1}, x \in E\}$$

为 V 的一闭的承托超平面, 且有 $f_1(x_1) = c_{f_1}$ 以及

$$f_1(x) \leqslant c_{f_1} \quad (\forall\, x \in V), \ f_1(x_0) < c_{f_1};$$

即 $f_1 \in G^*$. 然而, 根据元 $y \in \bigcap_{f\in G^*} W_f \subset W_{f_1}$ 的假设, 又可导出

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= f_1(\lambda_1 x_0 + (1-\lambda_1)y) \\ &= \lambda_1 f_1(x_0) + (1-\lambda_1) f_1(y) \\ &< \lambda_1 c_{f_1} + (1-\lambda_1) c_{f_1} = c_{f_1}. \end{aligned}$$

此显然与 f_1 的取法矛盾. □

注 推理 2 同样也是可以由下面的定理 4 导出的, 然而作为介绍一种证明方法, 现在把它放在这里讨论. 由本节的习题, 我们可以看到当凸集 V 不含有内点时结论也是正确的.

定理 4 (Eidelheit 定理)　设 V_1 和 V_2 为"实"赋范线性空间 E 中的两个凸集, 并且 $V_2^\circ \neq \varnothing, V_1 \bigcap V_2^\circ = \varnothing$, 则必定存在一个泛函 $f_1 \in E^*$, 使得

$$\sup_{x \in V_1} f_1(x) \leqslant \inf_{y \in V_2} f_1(y); \quad \sup_{x \in V_1} f_1(x) < f_1(y^\circ),\ \forall\, y^\circ \in V_2^\circ.$$

证明　首先, 由本章附录中的定理 3 知, 当设 $V = V_2 - V_1$ 时, V 亦为具有内点的凸集, 并且有 $\theta \notin V^\circ$. 其次, 对于零元 θ 与凸集 V 直接利用定理 3 的推理 1 时 (注意这里的泛函取了一个负号), 我们可以得到一个非零泛函 $f_1 \in E^*$, 使得

$$f_1(z) \geqslant 0, \quad \forall\, z \in V.$$

于是由 f_1 的线性及集 V 的定义, 便得到

$$f_1(x) \leqslant f_1(y), \quad \forall\, x \in V_1, y \in V_2.$$

由此导出

$$\sup_{x \in V_1} f_1(x) \leqslant \inf_{y \in V_2} f_1(y).$$

最后, 注意到对任意 $y^\circ \in V_2^\circ$, 必有一闭球 $B(y^\circ, \delta_0) \subset V_2$, 故有

$$\begin{aligned}\sup_{x \in V_1} f_1(x) &\leqslant \inf_{y \in V_2} f_1(y) \leqslant \inf_{y \in B(y^\circ, \delta_0)} f_1(y) \\ &= \inf_{\|y\| \leqslant \delta_0} f_1(y^\circ + y) \\ &= f_1(y^\circ) + \inf_{\|y\| \leqslant \delta_0} f_1(y) \\ &= f_1(y^\circ) - \sup_{\|y\| \leqslant \delta_0} f_1(y) \\ &= f_1(y^\circ) - \delta_0 \|f_1\|.\end{aligned}$$

由此导出

$$\sup_{x \in V_1} f_1(x) < f_1(y^\circ).$$

□

注　定理 4 的几何意义是指: 对于实赋范线性空间内的两个凸集而言, 只要其中一个具有内点, 并且其任一内点均不为另一个所包含, 则必定存在一个"闭"超平面将此两凸集分离 (此定理也常称为"凸集的第一隔离性定理").

事实上, 只要对定理 4 结论中的泛函 $f_1 \in E^*$, 取 $\sup_{x \in V_1} f_1(x)$ 与 $\inf_{x \in V_2} f_1(x)$ 之间的任意一个数 c_1, 然后作闭超平面 $H = \{x\colon f_1(x) = c_1, x \in E\}$, 则这就是所要求的闭超平面, 并且可知 V_1 在 $f_1(x) \leqslant c_1$ 的这一侧, 而 V_2 在 $f_1(x) \geqslant c_1$ 的那一侧. 特别地, 当 $y \in V_2^\circ$ 时均有 $f_1(y) > c_1$.

作为定理 2 的推广, 下面一个应用广泛的定理告诉我们: 不但闭线性子空间与其外面的点, 可以用连续线性泛函所确定的闭超平面来隔离开, 更一般地, 对于一个闭凸集与其外面的点, 同样具有上面的性质. 其表述如下:

定理 5 (**Ascoli-Mazur 定理**) 设 V 是"实"赋范线性空间 E 中的一个闭凸集, 则对任意 $x_1 \notin V$, 存在 $f_1 \in E^*$, 使得

$$\sup_{x\in V} f_1(x) < f_1(x_1).$$

证明 由假设 V 是 E 中的闭集, 故从 $x_1 \notin V$ 必有 x_1 的一球 $B(x_1,\delta_1)$, 使得 $B(x_1,\delta_1)\bigcap V = \varnothing$. 于是对于凸集 V 以及具有内点的凸集 $B(x_1,\delta_1)$, 直接利用定理 4 的结论, 我们立即便可导出存在 $f_1 \in E^*$, 使得

$$\sup_{x\in V} f_1(x) < f_1(x_1). \qquad \square$$

下面, 我们再给出称为"凸集的第二隔离性定理"的命题.

定理 6 设 E 为实赋范空间, B 为 E 中的闭凸集, C 为 E 中的紧凸集, 并且 $B\bigcap C = \varnothing$, 则必存在泛函 $f_1 \in E^*$ 及实数 α, 使得

$$f_1(x) < \alpha < f_1(y), \quad \forall\, x \in B, y \in C.$$

证明 首先, 由假设可知: 对任意 $c \in C$, 从 $c \notin B$ 及 B 的"闭"性, 必存在原心开球 $O(\theta,\delta_c)$, 使得

$$[c + O(\theta,\delta_c)]\bigcap B = \varnothing. \tag{3.2.1}$$

由此, 从 C 是紧集知, 必存在有限开集 $\{c_k + O(\theta, \frac{\delta_{c_k}}{2})\colon 1 \leqslant k \leqslant n_0\}$, 使得

$$\bigcup_{k=1}^{n_0}\left[c_k + O\left(\theta, \frac{\delta_{c_k}}{2}\right)\right] \supset C. \tag{3.2.2}$$

令 $2\delta_0 = \min_{1\leqslant k\leqslant n_0} \delta_{c_k}$. 对任意的 $c_0 \in C$, 由式 (3.2.2) 知存在 $k_0 (1 \leqslant k_0 \leqslant n_0)$, 使得 $c_0 \in c_{k_0} + O(\theta, \frac{\delta_{c_{k_0}}}{2})$. 由此, 我们有

$$c_0 + O(\theta,\delta_0) \subset c_{k_0} + O\left(\theta, \frac{\delta_{c_{k_0}}}{2}\right) + O\left(\theta, \frac{\delta_{c_{k_0}}}{2}\right) = c_{k_0} + O(\theta, \delta_{c_{k_0}}),$$

而由式 (3.2.1) 并注意上面 c_0 的任意性, 可得到

$$[c + O(\theta,\delta_0)]\bigcap B = \varnothing, \ \forall\, c \in C. \tag{3.2.3}$$

从上也即导出

$$\left[C + O\left(\theta, \frac{\delta_0}{2}\right)\right]\bigcap\left[B + O\left(\theta, \frac{\delta_0}{2}\right)\right] = \varnothing. \tag{3.2.4}$$

最后, 注意到集 $V_1 \triangleq C + O(\theta, \frac{\delta_0}{2})$ 与 $V_2 \triangleq B + O(\theta, \frac{\delta_0}{2})$ 均为开凸集, 故从式 (3.2.4) 以及前面 Eideheit 定理, 我们立即导出本定理的结论. □

为了引出一个推理, 下面先介绍一个定义:

定义 4 赋范线性空间 E 内的集 F 称为**弱列闭**的①,是指对任意 $x \in E$ 及集 F 中的任意元列 $\{x_n\}$, 只要有

$$f(x_n) \to f(x_0)\ (n \to \infty), \quad \forall f \in E^*$$

成立, 就可导出 $x_0 \in F$.

注 E 中的弱列闭集必为 (强) 闭集. 反之不一定成立.

事实上, 前一结论是明显的, 只要注意到泛函 $f \in E^*$ 的连续性就不难导出. 至于后一结论, 我们可以举一反例如下:

反例 设 $E = (c)$, $F = \{e_n\}$(其中: $e_n = (0, 0, \cdots 0, \overset{\text{第}\,n\,\text{位}}{1}, 0, \cdots)$, $n \in \mathbb{N}$). 显然, F 是空间 (c) 中的强闭集 (由"孤立点"组成). 但另一方面, 由 §2.4 可知 $(c)^* = (\ell^1)$, 故对任意 $f \in (c)^*$, 存在 $\{f_n\} \in (\ell^1)$, 使得 (记 $e_n = \{\xi_k^{(n)}\}$)

$$f(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \xi_k^{(n)} = f_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$, 便可导出 $f(e_n) \to 0 = f(\theta)\,(n \to \infty)\ (\forall f \in (c)^*)$. 然而 $\theta \notin F$, 故知 F 不是弱列闭集.

推理 1 设 V 是赋范线性空间 E 内的一个凸集, 则为使 V 是弱列闭集必须且只需 V 是一个闭集.

证明 本推理的必要性是显然的. 下面仅证其充分性. 反之, 如果有 $\{x_n\} \subset V, x_0 \in E$, 使得均有

$$f(x_n) \to f(x_0), \quad \forall f \in E^*; \tag{3.2.5}$$

然而, $x_0 \notin V$. 如果 E 为复空间, 由 §3.1 定理 3 证明中的说明, 则可"视" E 为"实"的赋范线性空间. 而由 Ascoli-Mazur 定理 (定理 5) 可知, 存在一个 E 上的"实"的连续线性泛函 R_1, 使得 $\sup_{x \in V} R_1(x) < R_1(x_0)$. 由此, 当令

$$f_1(x) = R_1(x) - \mathrm{i} R_1(\mathrm{i}x), \quad \forall x \in E$$

---

① 在这里我们不准备介绍"弱拓扑"的知识, 因此不涉及弱闭集的概念. 要进一步了解这方面的内容, 请参见本书后面的第九章, 或者文献 [10, 11] 等.

时, 显然可知 $f_1 \in E^*$ (即 f_1 为复空间 E 上的复连续线性泛函). 且有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \mathrm{Re} f_1(x_n) &\leqslant \sup_n f_1(x_n)\\ &\leqslant \sup_{x\in V} \mathrm{Re} f_1(x)\\ &= \sup_{x\in V} R_1 x\\ &< R_1(x_0) = \mathrm{Re} f_1(x_0)\end{aligned}$$

(上面的结论当 E 为实空间时亦对). 此显然与式 (3.2.5) 相矛盾. □

注 必须注意, 对 E 中的非凸集, 推理 1 的结论未必正确.

事实上, 反例可举空间 $(\ell^p)(1 < p < \infty)$ 内的闭单位原心球面 S_1. 由 $(\ell^p)^* = (\ell^q)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, 而 (ℓ^q) $(q > 1)$ 的元的第 n 个 "坐标" 当 $n \to \infty$ 时是趋于 0 的, 从而可知零元为 S_1 上一元列 $\{e_n\}$ 的一个 "弱" 极限点却又不属于 S_1.

推理 2 设 E 为赋范线性空间, M 为任意子集, $x_0 \neq \theta$ 为 E 中任一元, 则为使 $x_0 \in \overline{\mathrm{cov}M}$ 必须且只需

$$\sup_{y\in M} f(y) \geqslant f(x_0), \quad \forall f \in E^*$$

(这里 $\overline{\mathrm{cov}M}$ 表示由 M 张成的闭凸集).

证明 "⇒" : 设 $x_0 \in \overline{\mathrm{cov}M}$, 则对任意 $f \in E^*, \varepsilon > 0$(不妨假设 $\|f\| = 1$), 可知存在 $y_0 \in \mathrm{cov}M$, 使得 $\|y_0 - x_0\| < \varepsilon$. 设

$$y_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot y_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \quad (y_k \in M,\ \lambda_k \geqslant 0;\ k = 1, 2, \cdots, n),$$

从而

$$\begin{aligned}\sup_{y\in M} f(y) &\geqslant f(y_0) = f(x_0) + f(y_0 - x_0)\\ &\geqslant f(x_0) - \|y_0 - x_0\|\\ &> f(x_0) - \varepsilon.\end{aligned}$$

注意到正数 ε 及泛函 f 的任意性, 则可导出

$$\sup_{y\in M} f(y) \geqslant f(x_0), \quad \forall f \in E^*.$$

"⇐" : 反之, 设 $x_0 \notin \overline{\mathrm{cov}M}$. 由 Ascoli-Mazur 定理 (定理 5) 可知: 存在 $f_0 \in E^*$, 使得 $\sup_{x\in\overline{\mathrm{cov}M}} f_0(x) < f_0(x_0)$, 所以

$$\sup_{x\in M} f_0(x) \leqslant \sup_{x\in\overline{\mathrm{cov}M}} f_0(x) < f_0(x_0).$$

与假设 $\sup_{y\in M} f(y) \geqslant f(x) \quad (\forall f \in E^*)$ 矛盾. □

作为定理 2 的推理或者作为定理 5 的推理 1 的直接结果, 我们还可以得到下面的结论:

推理 3　*对于赋范线性空间 E 内的线性子空间 E_0 而言, 其强闭与弱列闭是等价的.*

§3.3　元列的弱收敛与强收敛

在 §2.5 中我们给出了元列的强收敛与弱收敛的概念, 并且指出强收敛的元列一定弱收敛. 本节指出在有限维赋 (准) 范空间中, 两者是等价的. 然而, 对于我们熟悉的无限维的赋范空间来说, 绝大多数空间中其点列的强弱收敛两概念是不等价的, 虽然也有"点列"强弱收敛等价的空间存在, 例如 (ℓ^1). 我们还要指出弱收敛元列与其子列中元的凸组合构成的元列的强收敛的关系. 然后, 介绍在某些赋范空间中, 如果弱收敛元列的范数构成的数列也收敛于极限元的范数, 则其必也是强收敛的 (即 Hilbert 性质, 简称 H 性质).

定理 1　*在任意有限维的赋范线性空间中, 元列的弱收敛与强收敛是等价的.*

证明　设 $E_{(n)}$ 是 n 维赋范线性空间, $E_{(n)}$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于其中一点 x_0. 由 §1.5 的引理 1, 坐标泛函 f_k: $x \mapsto x(k)$ 均是连续线性泛函, 即 $f_k \in E^*$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 故由弱收敛的定义可知, 对于 $1 \leqslant k \leqslant n$, 有

$$x_m(k) = f_k(x_m) \to f_k(x_0) = x_0(k),\ m \to \infty.$$

再次使用此引理便知 x_m 按范收敛于 x_0, 从而由强收敛定义知定理得证. □

下面的反例说明存在无穷维赋范空间, 其中有弱收敛而非强收敛的点列:

反例　*空间 (c_0) 中点列 $\{e_n\}$ (其中 $e_n = (0,\cdots,0,\overset{\text{第}n\text{项}}{1},0,\cdots), n \in \mathbb{N}$), 是弱收敛而非强收敛的点列.*

事实上, 对于 (c_0) 上任意连续线性泛函 x^*, 由 §2.4 知 $(c_0)^* = (\ell^1)$, 故有 $x^* = (\xi_k) \in (\ell^1)$, 及 $x^*(e_n) = \xi_n \to 0\ (n \to \infty)$. 从而 $\{e_n\}$ 弱收敛于 (c_0) 中的零元 θ, 因此若 $\{e_n\}$ 强收敛, 则必也强收敛于 θ (因强收敛也必弱收敛且弱收敛极限唯一). 但此显然与 $\|e_n\| = 1 (n \in \mathbb{N})$ 矛盾, 故 $\{e_n\}$ 非强收敛.

注　*当注意到 §2.4 中共轭空间的表现定理时, 不难导出: 当上例中的空间 (c_0) 换为 (c) 或 $(\ell^p)(p > 1)$ 时, 结论仍是成立的.*

上面的定理及反例说明: 虽然有限维赋范空间中点列的强弱收敛是等价的, 但是在无限维赋范空间中没有这样的结果. 尽管如此, 点列的强弱收敛等价并非有限维赋范空间的特征. 这可由下面的定理说明.

定理 2 (Schur 定理)　*在空间 (ℓ^1) 中, 元列的弱收敛与强收敛是等价的.*

证明 * 设 $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \in (\ell^1)(n=1,2,\cdots)$, 且 $x_n \xrightarrow[(弱)]{w} \theta\,(n\to\infty)$. 下面用归谬法证明 $\{x_n\}$ 亦必强收敛于 θ, 即 $\|x_n\| \to 0(n\to\infty)$.

事实上, 由 §2.4 知 $(\ell^1)^* = (\ell^\infty)$, 及假设 $x_n \xrightarrow[(弱)]{w} \theta\,(n\to\infty)$, 我们便有

$$\xi_i^{(n)} \to 0(n\to\infty), \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{3.3.1}$$

如果 $\|x_n\| \nrightarrow 0\ (n\to 0)$, 则其有子列收敛于 $+\infty$ 或某正数, 不妨假设 $\{\|x_n\|\}$ 具有此性质 (否则可以用 $\{\|x_n\|\}$ 的子列代之), 并且又不妨假设 $\|x_n\| \to \frac{6}{5}$, (否则以 $\{\frac{6}{5\|x_n\|}x_n\}$ 代 $\{x_n\}$). 这样, 由 ℓ^1 上范数的定义可设

$$(\lim_{n\to\infty}\|x_n\| =) \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}| = \frac{6}{5}, \tag{3.3.2}$$

由数列极限的定义可知, 存在自然数 n_0, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时有

$$\|x_n\| < \frac{7}{5}, \tag{3.3.3}$$

并且可取自然数 $n_1 > n_0$ 及相应的项数 i_1, 使得

$$\sum_{i=1}^{i_1}|\xi_i^{(n_1)}| \geqslant \frac{4}{5}. \tag{3.3.4}$$

由式 (3.3.1) 和 (3.3.2), 对于上面项数 i_1 (固定), 可找到自然数 $n_2 > n_1$, 使得

$$\sum_{i=1}^{i_1}|\xi_i^{(n_2)}| < \frac{1}{5}, \quad \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n_2)}| > 1; \tag{3.3.5}$$

且存在项数 i_2, 使得

$$\sum_{i=i_1+1}^{i_2}|\xi_i^{(n_2)}| = \sum_{i=1}^{i_2}|\xi_i^{(n_2)}| - \sum_{i=1}^{i_1}|\xi_i^{(n_2)}| \geqslant \frac{4}{5}. \tag{3.3.6}$$

一般地, 如果已找到自然数 n_{k-1} 及元 $x_{n_{k-1}}$ 的相应项数 i_{k-1}, 同样由式 (3.3.1) 和 (3.3.2), 当项数 i_{k-1} 固定时, 必可找到自然数 $n_k > n_{k-1}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{i_{k-1}}|\xi_i^{(n_k)}| < \frac{1}{5}, \quad \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n_k)}| > 1; \tag{3.3.7}$$

且存在项数 i_k, 使得

$$\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k}|\xi_i^{(n_k)}| = \sum_{i=1}^{i_k}|\xi_i^{(n_k)}| - \sum_{i=1}^{i_{k-1}}|\xi_i^{(n_k)}| \geqslant \frac{4}{5}. \tag{3.3.8}$$

这样, 我们就得到两单调自然数列 $\{n_k\}$ 及 $\{i_k\}$, 它们满足相应的上述不等式 (见图 3.4).

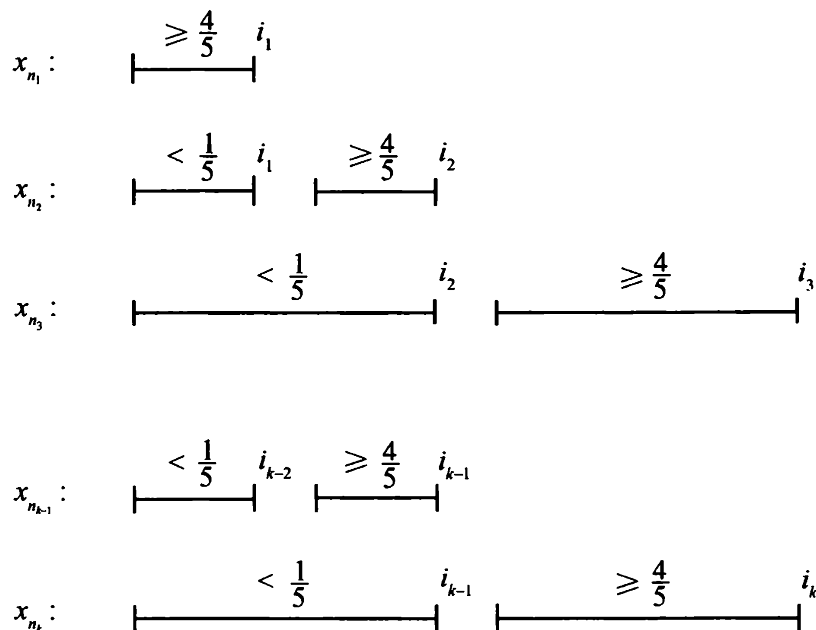


图 3.4

现在, 构造一有界线性泛函 $f_0 = \{f_i^{(0)}\} \in (l^1)^* = (\ell^\infty)$, 其中:

$$f_i^{(0)} = \begin{cases} \operatorname{sgn} \xi_i^{(n_k)} \triangleq |\xi_i^{(n_k)}| \dfrac{\overline{\xi_i^{(n_k)}}}{|\xi_i^{(n_k)}|}, & i_{k-1}+1 \leqslant i \leqslant i_k \ (k \in \mathbb{N}), \\ & (\text{设}\, i_0 = 0 \text{且}\, \xi_i^{(n_k)} \neq 0); \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

我们则有 (注意式 (3.3.3) 和 (3.3.4)):

$$\begin{aligned} |f_0(x_{n_k})| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} f_i^{(0)} \xi_i^{(n_k)} \right| \\ &\geqslant \left| \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} f_i^{(0)} \xi_i^{(n_k)} \right| - \sum_{\text{其他}} \left| f_i^{(0)} \xi_i^{(n_k)} \right| \\ &\geqslant \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} |\xi_i^{n_k}| - \sum_{\text{其他}} |\xi_i^{n_k}| \\ &\geqslant \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

这表明

$$f_0(x_{n_k}) \nrightarrow f_0(\theta) = 0 \quad (k \to \infty).$$

与原设 $x_n \underset{(\text{弱})}{\rightharpoonup} \theta (n \to \infty)$ 矛盾! □

注 上面证明的技巧：主要是利用了一列正数所组成的无穷矩阵，如果每"行"之(级数)"和"有界，且每"列"之数"趋于 0"，则我们可以对每"行"用去"头"、去"尾"、取"中段"的方法，选出一无穷"子行"；使得：所选每行"中段"均对应于不同的列，并且各"中段"之和均大于同一常数.

在上面定理的证明中，主要用到元列 $\{x_n\}$ 对于任一固定"坐标"(所成的数列 $\{x_n(k)\}_n$) 收敛于 0 的性质，因此我们可将上述定理改述如下：

定理 2′ 在空间 (ℓ^1) 中，如果元列 $\{x_n\}$ 的各"坐标"所成的数列 $\{x_n(k)\}_n(k \in \mathbb{N})$ 均收敛于 0，则当 $\{x_n\}$ 不强收敛于 (零元) θ 时，必存在一子列 $x_{n_k} \subset \{x_n\}$ 及一泛函 $f_0 \in (\ell^1)^*$，使得

$$f_0(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

一致的成立.

为了进一步阐明点列之强、弱两种收敛之间的关系，我们给出一些在逼近论中非常有用的结果.

首先，由 §3.2 相应结果，可以得到下面的两个定理：

定理 3 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 E 内的一元列，$x_0 \in E$ 且 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 (即 $x_n \underset{(弱)}{\xrightarrow{w}} x_0$)，则 x_0 可用 $\{x_n\}$ 的"线性组合"按范逼近，即存在一个元列 $\{y_n\}$ (其中 $y_n = \sum_{k=1}^{k(n)} \xi_k^{(n)} x_k$, $n \in \mathbb{N}$)，使得

$$\|y_n - x_0\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

证明 令 $M = \{x_n\}$. 显然，对任意的 $f \in E^*$ 且 $f(x_n) = 0 \, (n = 1, 2, \cdots)$ 的泛函，由 $x_n \underset{(弱)}{\xrightarrow{w}} x_0$ 知

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

则由 §3.2 定理 2 的推理知 $x_0 \in \overline{[M]}$. 故对 $n = 1, 2, \cdots$，存在

$$y_n = \sum_{k=1}^{k(n)} \xi_k^{(n)} x_k \in [M],$$

使得 $\|y_n - x_0\| < \frac{1}{n}$，从而 $\|y_n - x_0\| \to 0 \ (n \to \infty)$. □

定理 4 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 E 内的一元列，$x_0 \in E$ 且 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 (即 $x_n \underset{(弱)}{\xrightarrow{w}} x_0$)，则 x_0 可用 $\{x_n\}$ 的"凸组合"按范逼近，即存在元列 $\{z_n\}$ (其中：

$$z_n = \sum_{k=1}^{k(n)} \lambda_k^{(n)} x_k; \quad \sum_{k=1}^{k(n)} \lambda_k^{(n)} = 1, \quad \lambda_k^{(n)} \geqslant 0, 1 \leqslant k \leqslant k(n), n \in \mathbb{N}),$$

使得

$$\|z_n - x_0\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

证明　令 $M=\{x_n\}$. 显然, 对任意的 $f\in E^*$, 由 $x_n \xrightarrow[(弱)]{w} x_0$ 知

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\leqslant\sup_{n\in\mathbb{N}}f(x_n),$$

则由 §3.2 Ascoli-Mazur 定理 (定理 5) 的推理 2 知 $x_0\in\overline{\mathrm{cov}M}$, 故存在元列 $\{z_n\}$ (其中:

$$z_n=\sum_{k=1}^{k(n)}\lambda_k^{(n)}x_k;\ \ \sum_{k=1}^{k(n)}\lambda_k^{(n)}=1,\ \ \lambda_k^{(n)}\geqslant 0,\ 1\leqslant k\leqslant k(n),\ n\in\mathbb{N}),$$

使得 $\|z_n-x_0\|<\frac{1}{n}$, 从而 $\|z_n-x_0\|\to 0\ (n\to\infty)$. □

注　当一个元列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 时, 其内任意子列也必弱收敛于 x_0, 因此在上述的两定理中, 当将那里的线性组合或凸组合的元列中的 x_k 换为 x_{n_k} 时, 其结论仍然成立. 特别地, 我们可以将上面 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 换为某 $\{\bar{y}_n\}$ 和 $\{\bar{z}_n\}$ (其中 $\bar{y}_n=\sum_{k=n}^{\bar{k}(n)}\eta_k^{(n)}x_k$, 和

$$\bar{z}_n=\sum_{k=n}^{\bar{k}(n)}\mu_k^{(n)}x_k;\ \ \sum_{k=n}^{\bar{k}(n)}\mu_k^{(n)}=1,\ \ \mu_k^{(n)}\geqslant 0, n\leqslant k\leqslant\bar{k}(n)),$$

$(n\in\mathbb{N})$, 则结论仍然正确.

推理　设 E 为赋范线性空间, $\{x_n\}\subset E, x_0\in E$, 那么, 为使 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0, 必须且只需对于任意递增的自然数子列 $\{n_i\}$, 存在由 $\{x_{n_i}\}$ 构成的凸组合元列

$$\left\{y_n=\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}x_{n_i}\colon\ \sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}=1,\ \ \lambda_i^{(n)}\geqslant 0,\ \ 1\leqslant i\leqslant m(n),\ \ i,n\in\mathbb{N}\right\},$$

使其强收敛于 x_0.

证明　必要性已经由上面的注得出, 下面仅证明定理的充分性:

反之, 若 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 不成立, 则存在 $f_0\in E^*$ 正数 ε_0 及 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_i}\}$, 使得 $f_0(x_{n_i})\geqslant f_0(x_0)+\varepsilon_0(\forall i\in\mathbb{N})$. 然而, 对于任意的由 $\{x_{n_i}\}$ 构成的凸组合元列 $\{z_n\}$ (其中:

$$z_n=\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}x_{n_i};\ \ \sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}=1,\ \ \lambda_i^{(n)}\geqslant 0,\ \ 1\leqslant i\leqslant m(n),\ \ n\in\mathbb{N}),$$

我们有

$$\begin{aligned}||f_0||\cdot||z_n-x_0||&\geqslant f_0(z_n-x_0)\\&=f_0\Big(\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}x_{n_i}-\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}x_0\Big)\\&=\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}f_0(x_{n_i}-x_0)\\&\geqslant\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}=1.\end{aligned}$$

注意到 $||f_0||\neq 0$, 则知上式与定理充分性的假设矛盾! □

下面几个定理说明, 在某些赋范空间中, 当元列的“范数”(数列) 也收敛于“弱收敛元”的“范数”时, 则其强、弱收敛是等价的 (由于 Hilbert 空间中均有此特性, 因此人们常将此性质简称为 (H) 性质).

定理 5 *在“内积空间”中, 为使弱收敛于 x_0 的元列 x_n 也强收敛于 x_0, 必须且只需 $||x_n||\to||x_0||(n\to\infty)$.*

证明 必要性是显然的. 下面我们来验证其充分性. 此时, 只要注意到“内积”的性质, 由

$$\begin{aligned}||x_n-x_0||^2&=(x_n-x_0,x_n-x_0)\\&=||x_n||^2-(x_0,x_n)-(x_n,x_0)+||x_0||^2,\quad\forall n\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

并注意到内积是连续的以及定理的假设, 我们可直接导出

$$\lim_{n\to\infty}||x_n-x_0||^2=||x_0||^2-2(x_0,x_0)+||x_0||^2=0,$$

即 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. □

更一般地, 下面, 我们可以证明: 任意一个“一致凸”的赋范空间也必具有 (H) 性质 (有关“一致凸”的定义可参看 §3.4).

定理 6* *设 E 为“一致凸”的赋范线性空间, 则为使弱收敛于 x_0 的元列 x_n 也强收敛于 x_0, 必须且只需 $||x_n||\to||x_0||(n\to\infty)$.*

证明 同样, 只要证明定理的充分性就可以了.

首先, 我们指出: 当 $||x_n||=||x_0||=1\ (\forall n\in\mathbb{N})$ 时, 定理结论成立.

事实上, 由 Hahn-Banach 定理 (§3.2 定理 1) 可知: 存在 $f_0\in E^*$, 使得 $f(x_0)=$

$||x_0|| = 1$. 于是有

$$\begin{aligned} 2 = 2||x_0|| = 2f_0(x_0) &= \lim_{n\to\infty} f_0(x_0 + x_n) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} (||x_0 + x_n||) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} (||x_0|| + ||x_n||) = 2, \end{aligned}$$

也即得到 $\lim_{n\to\infty}(||x_0 + x_n||) = 2$. 注意到 E 是"一致凸"空间, 因此由定义立即导出 $\lim_{n\to\infty}(||x_0 - x_n||) = 0$.

其次, 考虑一般情形. 不失一般性, 我们只需假设 $x_0 \neq \theta$ 且 $x_n \neq \theta(\forall n \in \mathbb{N})$. 令 $y_n = \frac{1}{||x_n||} x_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则 $||y_0|| = ||y_n|| = 1$. 由设 x_n 弱收敛于 x_0 且 $||x_n|| \to ||x_0||$, 易知 y_n 亦弱收敛于 y_0, 再由上段证明结果可立即导出

$$||y_n - y_0|| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

最后, 再注意到

$$\begin{aligned} ||x_n - x_0|| &= || \, ||x_n|| \, y_n - ||x_0|| \, y_0 \, || \\ &= || \, ||x_n|| \, (y_n - y_0) + (||x_n|| - ||x_0||) y_0 \, || \\ &\leqslant ||x_n|| \cdot ||y_n - y_0|| + | \, ||x_n|| - ||x_0|| \, | \cdot ||y_0|| \end{aligned}$$

可导出 $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$. □

注 上面定理对于非一致凸空间未必成立, 可见如下反例:

反例 在空间 (c) 中, 取元列 $x_n = (1, 1, \cdots, \underset{(n)}{1}, 0, 0, \cdots)(n \in \mathbb{N})$, 则必有 x_n 弱收敛于 $x_0 = (1, 1, \cdots)$; 且 $||x_n|| \to ||x_0||$. 然而 $x_n \nrightarrow x_0(n \to \infty)$.

验证 我们逐条来验证所需的结论:

(1) 注意到 $(c)^* = (\ell^1)$, 且对任意的 $f = \{f_i\} \in (\ell^1)$, 均有

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k \to \sum_{k=1}^{\infty} f_k = f(x_0) \quad (n \to \infty)$$

成立, 因而可知 $x_n \underset{(\text{弱})}{\xrightarrow{w}} x_0 \quad (n \to \infty)$.

(2) 由空间 (c) 中范数定义显然可知: $||x_n|| = ||x_0|| = 1(n \in \mathbb{N})$.

(3) 同样由空间 (c) 中范数定义, 还有

$$||x_n - x_0|| = ||(0, \cdots, 0, 1, 1, \cdots)|| = 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

从而可知: $x_n \nrightarrow x_0 \ (n \to \infty)$. □

上面例子中的空间 (c) 是可分的 Banach 空间, 故上例也说明: 即使是可分空间, 也未必具有上述 (H) 性质; 然而, 在"改赋范数"后 (即: 赋予一与原空间拓扑

等价的范数后), 此可分空间却可具有该 (H) 性质. 因为我们有下面著名的卡切兹定理 (只介绍):

定理 7*(卡切兹 (Кадец)定理) 如果 E 是一个"可分的" Banach 空间, 那么能够在 E 中引入一个新的范数"$||\cdot||_1$", 使其与原范数等价; 并且在此范数下 E 具有 (H) 性质 (也即: 对于任意一个弱收敛于 x_0 的元列 $\{x_n\}$, 只要有 $||x_n||_1 \to ||x_0||_1 (n\to\infty)$, 就可导出 $\{x_n\}$ 强收敛于 x_0).

此定理证明可参阅文献 [1]298~301 页.

§3.4 严格凸空间与一致凸空间

为了讨论最佳逼近的唯一性问题, 空间的自反性问题以及有界线性泛函的"保范延拓"问题, 我们讨论几种特殊类型的赋范线性空间.

在这一节里我们将介绍关于"严格凸""平性凸"和"一致凸"空间的基本概念. 先给出关于"严格凸"空间的定义:

定义 1 赋范线性空间 E 称为**严格凸**的, 是指对任意 $x\neq\theta, y\neq\theta$, 必有下列关系:

$$||x+y|| = ||x|| + ||y|| \Longrightarrow x = \alpha y$$

(其中 α 为某一正数).

注 严格凸的一个常用的等价定义是: 当 $||x|| = ||y|| = r \neq 0$ 时, 一致的有 $||\lambda x + (1-\lambda)y|| < r\,(\forall\,\lambda\in(0,1))$(此等价性验证可以从后面的定理 1 导出).

下面给出关于"平性凸"的定义:

定义 2 赋范线性空间 E 称为**平性凸**的, 是指在 E 的单位原心球面 S_1 上, 有两个点 x_0 和 y_0, 使得

$$\left|\left|\frac{x_0+y_0}{2}\right|\right| = ||x_0|| = ||y_0|| = 1.$$

对于平性凸空间, 我们给出一个命题, 由此命题便可体会"平性凸"这个名词的几何直观意义.

命题 如果 E 为平性凸空间, 则 E 的单位原心球面 S_1 上必有两个不同的点 x_0 和 y_0, 使得"线段" $[x_0, y_0]\subset S_1$.

证明 事实上, 当设单位球面 S_1 上的两个点 x_0 和 y_0 满足定义 2 的条件时, 则可得出, 线段 $[x_0, y_0]$, 即线段 $[x_0, \frac{x_0+y_0}{2}]$ 和 $[\frac{x_0+y_0}{2}, y_0]$ 必都含于单位球面 S_1 内. 反之, 如果有点 $u_0 = \lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0)\frac{x_0+y_0}{2}\notin S_1 (0<\lambda_0<1)$ 或 $v_0 = \mu_0 y_0 + (1-\mu_0)\frac{x_0+y_0}{2}\notin S_1 (0<\mu_0<1)$. 那么由 $x_0, y_0, \frac{x_0+y_0}{2}\in S_1$, 立即导出 $||u_0||<1$ 或 $||v_0||<1$. 这样, 注

意到

$$\frac{\mu_0}{\lambda_0+\mu_0}u_0+\frac{\lambda_0}{\lambda_0+\mu_0}v_0=\frac{\lambda_0\mu_0}{\lambda_0+\mu_0}(x_0+y_0)+\frac{\lambda_0+\mu_0-2\lambda_0\mu_0}{2(\lambda_0+\mu_0)}(x_0+y_0)$$
$$=\frac{x_0+y_0}{2},$$

便可导出 (注意：$\|u_0\|,\|v_0\|\leqslant 1$; 且至少有一范数小于 1)

$$\left\|\frac{x_0+y_0}{2}\right\|\leqslant\frac{\mu_0}{\lambda_0+\mu_0}\|u_0\|+\frac{\lambda_0}{\lambda_0+\mu_0}\|v_0\|$$
$$<\frac{\mu_0}{\lambda_0+\mu_0}+\frac{\lambda_0}{\lambda_0+\mu_0}=1,$$

显然与开始假设的 $\|\frac{x_0+y_0}{2}\|=1$ 相矛盾. □

例　空间 (ℓ^1) 和 $L^1[0,1]$ 均是平性凸的.

验证　当在二维空间中观察空间 $(\ell^1_{(2)})$ 的 “单位球面” 时, 结论是非常直观的, 因为此时 “单位球” 即为过

$$\xi=\pm1,\quad \eta=\pm1$$

四点所连成的正方形 (斜置), 所以除了四个顶点以外, “球面” 是 “平” 的 (参看图 3.5). □

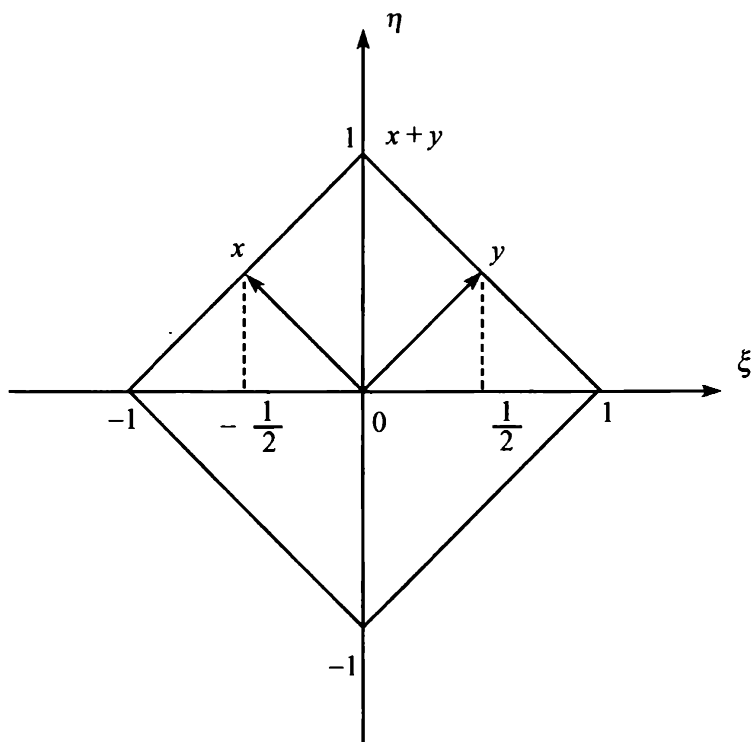


图 3.5

注 由定义 2 与定义 1 显然可以看出, 平性凸空间一定不是严格凸空间.

事实上, 对于满足定义 2 条件的单位球面 S_1 上的两个点 x_0 和 y_0 而言, 元 $\frac{x_0}{2}$ 和 $\frac{y_0}{2}$ 满足关系式

$$\left\|\left(\frac{x_0}{2}\right)+\left(\frac{y_0}{2}\right)\right\|=\left\|\frac{x_0+y_0}{2}\right\|=1=\left\|\frac{x_0}{2}\right\|+\left\|\frac{y_0}{2}\right\|.$$

然而, 由于 $\|x_0\|=\|y_0\|$ 但 $x_0\neq y_0$, 所以均有 $\frac{x_0}{2}\neq\alpha\frac{y_0}{2}(\forall\alpha>0)$. 故知空间不是严格凸的 (至于反过来的关系, 我们可以从定义 1 的注, 也即以后关于严格凸空间特性的定理 1 导出).

下面我们给出 “一致凸” 空间的定义:

定义 3 赋范线性空间 E 称为**一致凸**的, 是指: 对任意 $\{x_n\},\{y_n\}\subset E$, 只要有 $\|x_n\|=\|y_n\|=1$ $(n\in\mathbb{N})$ 以及 $\|x_n+y_n\|\to 2$ $(n\to\infty)$, 则必有 $\|x_n-y_n\|\to 0$ (参见图 3.6).

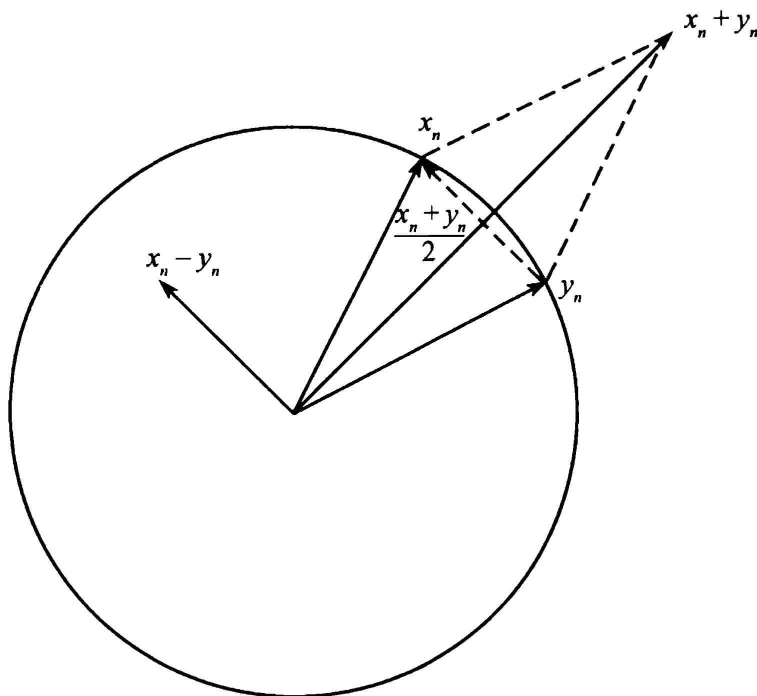


图 3.6

注 1 千万不要将 “一致凸” 的定义记反为

$$\|x_n-y_n\|\to 0\Rightarrow\|x_n+y_n\|\to 2,$$

$\forall\{x_n\},\{y_n\}\subset S_1$. 上面的关系式对任意的赋范空间均是成立的 (与空间球的凸性无关)!

事实上, 此可由下面的不等式看出:

$$2-\|x_n-y_n\|=\|2x_n\|-\|x_n-y_n\|\leqslant\|x_n+y_n\|\leqslant\|x_n\|+\|y_n\|=2.$$

注 2　上面一致凸空间有下面常见的“等价定义”：赋范线性空间 E 成为一致凸的，是指：对任意 $\varepsilon\,(0<\varepsilon\leqslant 2)$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得对任意 $x,y\in E$，只要当 $\|x\|=\|y\|=1, \|x-y\|\geqslant\varepsilon$ 时，就一致地有 $\|x+y\|\leqslant 2[1-\delta(\varepsilon)]$ (其中：函数 $\delta(\varepsilon)$ 称为 (空间的)“凸性模”，其有性质：$\delta(0)=0$，及当 $\varepsilon>0$ 时有 $\delta(\varepsilon)>0$).

注 2 的结论作为习题留给读者完成，有意思的是在空间 $L^p(p>1)$ 中，这里定义的凸性模 $\delta(\varepsilon)$ 的估计值是能够求出来的，当正数 ε 足够小的时候 $\delta(\varepsilon)\sim\varepsilon^2(1<p\leqslant 2)$ 及 $\delta(\varepsilon)\sim\varepsilon^p(2\leqslant p)$ (可参看文献 [12, 13]).

注 3　由注 2 可知，对于一致凸空间内单位原心球面 S_1 上的任意两 (不同) 点 x 和 y，必有 $\|x+y\|<2$，这个推理下面要常用的.

最常见的一致凸空间的例子如下：

例*　空间 (ℓ^p) 和 $L^p[a,b]$ 当 $p>1$ 时均为一致凸空间.

其证明可参见文献 [14].

当然，赋范空间未必是一致凸的，我们可以看到下面的反例：

反例 1　空间 (ℓ^1) 不是一致凸的.

验证　取 $x_n\equiv e_1=(1,0,0,\cdots), y_n\equiv e_2=(0,1,0,\cdots)\,(n\in\mathbb{N})$，则显然有 $\|x_n\|=\|y_n\|\equiv 1, \|x_n+y_n\|\equiv 2(n\in\mathbb{N})$. 然而 $\|x_n-y_n\|=2\nrightarrow 0(n\to\infty)$. □

注 4　当空间 (ℓ^1) 换为有限维而范数以 (ℓ^1) 形式定义时，显然结论仍是正确的.

反例 2　空间 $L^1[0,1]$ 不是一致凸的.

验证　对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，取

$$x_n(t)\equiv x_0(t)=\begin{cases}2, & \text{当}\, 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{当}\,\dfrac{1}{2}<t\leqslant 1;\end{cases}$$

$$y_n(t)\equiv y_0(t)=\begin{cases}0, & \text{当}\, 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 2, & \text{当}\,\dfrac{1}{2}<t\leqslant 1.\end{cases}$$

显然 $\|x_n\|=\|y_n\|=1, \|x_n+y_n\|=2$；但 $\|x_n-y_n\|=2\ (\forall\, n\in\mathbb{N})$，从而知 $L^1[0,1]$ 不满足一致凸的定义. □

反例 3　空间 (c) 和 $C[a,b]$ 都不是一致凸的 (请读者自己验证.)

下面，我们给出有关严格凸空间性质的三个定理：

定理 1 为了空间 E 是严格凸的, 必须且只需 E 的单位球面 S_1 是"严格凸"的 (即: 对任意 $x, y \in S_1, x \neq y$, 只要 $||x|| = ||y|| = 1$, 则均有 $||\lambda x + (1+\lambda)y|| < 1(\forall\, \lambda \in (0,1))$)(参看图 3.7).

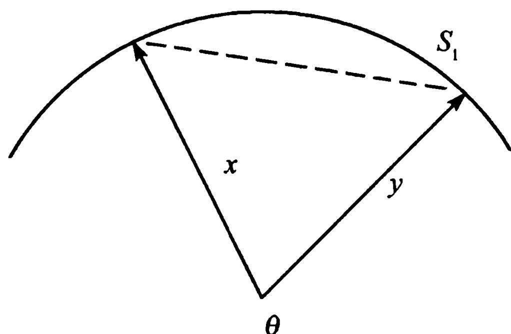


图 3.7

证明 1) "⇒" : 反之, 如果 E 的单位球面 S_1 不是严格凸的, 那么, 必有两个不同的元 $x_0, y_0 \in S_1$ 及一数 $\lambda_0 \in (0,1)$, 使得

$$||\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0)y_0|| = 1,$$

于是有

$$||\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0)y_0|| = ||\lambda_0 x_0|| + ||(1-\lambda_0)y_0||,$$

这样由空间严格凸的假设, 必存在数 $\alpha_0 > 0$, 使得

$$\lambda_0 x_0 = \alpha_0[(1-\lambda_0)y_0],$$

即 $x_0 = \frac{\alpha_0(1-\lambda_0)}{\lambda_0}y_0$. 最后, 注意到 $||x_0|| = ||y_0|| = 1$ 的假设, 有 $\frac{\alpha_0(1-\lambda_0)}{\lambda_0} = 1$, 此即导出 $x_0 = y_0$, 与原来 x_0 和 y_0 的取法矛盾.

2) "⇐" : 反之, 如果 E 不是严格凸的空间, 那么, 必存在两个非零元 x_0 和 y_0, 使得

$$||x_0 + y_0|| = ||x_0|| + ||y_0||,$$

且 $x_0 \neq \alpha y_0 \quad (\forall\, \alpha > 0)$; 于是 $\frac{x_0}{||x_0||}$ 与 $\frac{y_0}{||y_0||}$ 则为 E 的单位原心球面 S_1 上两个不同的点. 这样, 由球面 S_1 是严格凸的假设, 便有

$$\left|\left|\left(\frac{||x_0||}{||x_0|| + ||y_0||}\right)\frac{x_0}{||x_0||} + \left(\frac{||y_0||}{||x_0|| + ||y_0||}\right)\frac{y_0}{||y_0||}\right|\right| < 1,$$

即

$$\left|\left|\frac{x_0 + y_0}{||x_0|| + ||y_0||}\right|\right| < 1,$$

也即 $||x_0 + y_0|| < ||x_0|| + ||y_0||$, 从而与 x_0 和 y_0 的取法矛盾. □

注 由定理 1 显然可以看出, 严格凸的空间一定不是平性凸的空间.

定理 2 如果空间 E 不是严格凸的, 则必是平性凸的.

证明 事实上, 根据定理 1 的结论可知, 如果 E 不是严格凸的, 则必存在 S_1 上的两个元 x_0 和 y_0 以及正数 $\lambda_0 \in (0,1)$, 使得 $||\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0)y_0|| = 1$. 这样, 类似上面有关平性凸命题的证明方法, 可导出线段 $[x_0, y_0] \subset S_1$, 因而 E 是平性凸的. □

注 由定理 2 可知, 一个赋范线性空间只能是严格凸或平性凸的, 并且此两类型是互斥的.

定理 3 (Clarkson 定理)　*一致凸空间必是严格凸的.*

证明　反之, 如果空间 E 是一致凸但不是严格凸的, 那么由 E 不是严格凸, 从定理 2 知: 其必是平性凸空间, 且从平性凸的命题 (定义 2 后面的命题), 则可得到一线段 $[x_0, y_0] \subset S_1$. 这样一来, 当令 $x_n \equiv x_0, y_n \equiv y_0 (\forall n \in \mathbb{N})$ 时, 我们立即导出

$$||x_n + y_n|| = 2\left|\left|\frac{x_0 + y_0}{2}\right|\right| = 2,$$

但

$$||x_n - y_n|| = ||x_0 - y_0|| > 0;\quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

此显然与一致凸的假设矛盾! □

下面介绍严格凸的另一个性质, 此性质与所谓"最佳逼近元"相关联, 因此先介绍后者的定义.

定义 4　*赋范空间 E 中元 y_0 是凸集 $V \subset E$ 对一点 $x_0 \in E$ 的***最佳逼近元***, 是指 $y_0 \in V$, 且*

$$||x_0 - y_0|| = d(x_0, V) = \inf_{y \in V} ||y - x_0||.$$

(后面还要提到此概念.)

空间的严格凸性与最佳逼近元的唯一性有如下密切关系:

定理 4　*赋范空间 E 是严格凸的充要条件是: E 的凸集对于任意元的最佳逼近元, 如果存在则必唯一.*

证明　"$\Rightarrow$": 设赋范空间 E 是严格凸的, 若其中凸集 V 对于某元 x_0 的最佳逼近元不是唯一的. 借助于"平移", 先不妨假设 $x_0 = \theta$, 则由归谬假设可知存在 $y_0, y_0' \in V, y_0' \neq y_0$, 使得 $||y_0|| = ||y_0'|| = d(\theta, V)$, 由 V 的凸性, 从 $\frac{1}{2}(y_0 + y_0') \in V$, 有

$$\left|\left|\frac{1}{2}\left(\frac{y_0'}{||y_0'||}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y_0}{||y_0||}\right)\right|\right| = 1.$$

从而由上面定理 1, 可知空间不是严格凸的, 与假设矛盾!

"$\Leftarrow$": 反之, 如果空间不是严格凸的, 由定理 2 知其必为平性凸的. 故从定义 2 的命题, 必有线段 $V = [x_0, y_0]$ 含于空间 E 的单位原心球面 S_1 内 (这里, $x_0 \neq y_0$). 因此导出 x_0 和 y_0 均为 V 对于原点 θ 的最佳逼近元, 与最佳逼近元的唯一性矛盾! 从而得证. □

下面给出关于一致凸空间的几个定理. 在后面 §3.7 中将会看到, 即使对于一个 Banach 空间内的有限维线性子空间而言, 其内关于空间一元 x_1 的"最佳逼近元"虽然存在, 但一般说来, 却不是唯一的. 而上面的命题告诉我们, 对于一个严格凸的 Banach 空间来说, 上面的最佳逼近元如果存在, 则必是唯一的. 并且, 这里将要指出, 对于"一致凸"的空间而言, 有下面更好的一般结果:

定理 5 设 V 是一致凸 Banach 空间 E 内的一个闭凸集, 则对于 E 中任意一元 x_1, 必存在唯一的元 $y_0 \in V$, 使得

$$||x_1 - y_0|| = \inf_{y \in V} ||x_1 - y||.$$

证明 当 $x_1 \in V$ 时, 定理的结论是明显的. 下面仅对 $x_1 \notin V$ 来验证定理的结论:

首先, 证明定理中所需元 y_0 的存在性. 可设 $x_1 = \theta \notin V$ (否则可以"平移" x_1 及 V 而得, 且不影响定理的结论), 则由 V 是闭集, 必有 $\inf_{y \in V} ||y|| = d > 0$. 从而, 由下确界的定义可知: 必有元列 $\{y_n\} \subset V$, 使得 $||y_n|| \to d(n \to \infty)$. 这样, 对于 $\{y_n\}$ 中任意子列 $\{y_{n_k}\}$ 和 $\{y_{m_k}\}$, 由 V 是凸集的假设, (由第一章, 习题 1.1 中的 (ii)) 可知

$$\left|\left|\frac{y_{n_k}}{||y_{n_k}||} + \frac{y_{m_k}}{||y_{m_k}||}\right|\right| \to 2 \ (k \to \infty),$$

于是, 由空间的一致凸的假设, 便可导出

$$\left|\left|\frac{y_{n_k}}{||y_{n_k}||} - \frac{y_{m_k}}{||y_{m_k}||}\right|\right| \to 0(k \to \infty).$$

而注意到 $\lim_{k \to \infty} ||y_{n_k}|| = \lim_{k \to \infty} ||y_{m_k}|| = d > 0$, 由上不难导出

$$||y_{n_k} - y_{m_k}|| \to 0(k \to \infty).$$

注意到子列 $\{y_{n_k}\}, \{y_{m_k}\} \subset \{y_n\}$ 的任意性, 上式也即得到 $\{y_n\}$ 为 E 中的 Cauchy 列. 因此, 从 E 的完备性以及集 V 的闭性便可得到一元 $y_0 \in V$, 使得 $\lim_{n \to \infty} y_n = y_0$, 此即导出 $||y_0|| = d$. 也即得到: y_0 是凸集 V 对于点 x_1 的一个最佳逼近元.

其次, 直接利用上面的定理 3 和定理 4, 我们则知上述 y_0 还是唯一的. □

推理 设 E_0 为严格凸空间 E 内的任意有限维线性子空间, 则对任意 $x_1 \in E$, 在 E_0 内必存在唯一的最佳逼近元 y_0.

证明 事实上, 由于 E_n 显然为 E 的闭线性子空间, 故联系到后面 §3.7 的定理 1 (最佳逼近元的存在性) 和上面的定理 4(最佳逼近元的唯一性), 我们便可直接导出本定理的结论. □

下面一个很著名的定理是由Мильман(米尔曼), Pettis(培梯斯), S. Kakutani(角谷静夫) 等人证明的 (我们用角谷静夫的证明方法).

定理 6 ** **(Мильман 定理)** 一致凸的 Banach 空间必为自反空间.

证明 设 E 为一致凸的 Banach 空间, 并设 $\widetilde{x}_0 \in E^{**} = (E^*)^*$(不妨设 $||\widetilde{x}_0|| = 1$), 只需证明, 存在 $x_0 \in E$, 使得

$$\widetilde{x}_0(f) = f(x_0), \quad \forall f \in E^*$$

即可.

首先, 由于 $||\widetilde{x}_0||=1$, 因而从空间 E^* 上泛函的范数定义可知, 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 存在 $f_n\in E^*$, 使得

$$||f_n||=1,\quad \widetilde{x}_0(f_n)>1-\frac{1}{n}(\forall n\in\mathbb{N}).$$

其次, 考虑前 n 个泛函 $f_1,f_2,\cdots,f_n$, 利用 Helly 定理 (§3.6 中引理, 也即本章习题 3.19) 可知: 存在 $x_n\in E$, 使得其满足

$$f_k(x_n)=\widetilde{x}_0(f_k)\quad(k=1,2,\cdots,n); \tag{3.4.1}$$

$$||x_n||\leqslant||\widetilde{x}_0||+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{n}. \tag{3.4.2}$$

结合前面的关系式, 从式 (3.4.1) 及 (3.4.2) 可得到

$$1-\frac{1}{n}<\widetilde{x}_0(f_n)=f_n(x_n)\leqslant||f_n||\cdot||x_n||=||x_n||\leqslant 1+\frac{1}{n},\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

即有 $\lim_{n\to\infty}||x_n||=1$.

其三, 证明上面选出的元列 $\{x_n\}\subset E$ 是强收敛的. 事实上, 如果此结论不成立, 则必存在一正数 ε_0, 及自然数列 $n_1<m_1<n_2<m_2<\cdots<n_k<m_k<\cdots$, 使得非零子列 $\{x_{n_k}\},\{x_{m_k}\}\subset\{x_n\}$, 均有

$$||x_{n_k}-x_{m_k}||\geqslant\varepsilon_0\quad(k=1,2,\cdots).$$

因而, 由 $||x_n||\to 1\quad(n\to\infty)$, 及以上不等式, 则可得到

$$\left|\left|\frac{x_{n_k}}{||x_{n_k}||}-\frac{x_{m_k}}{||x_{m_k}||}\right|\right|\nrightarrow 0\quad(k\to\infty).$$

从而由空间 E 是"一致凸"的, 便可导出

$$\left|\left|\frac{x_{n_k}}{||x_{n_k}||}+\frac{x_{m_k}}{||x_{m_k}||}\right|\right|\nrightarrow 2\quad(k\to\infty). \tag{3.4.3}$$

另一方面, 注意到 x_{n_k} 和 x_{m_k} 的取法、式 (3.4.1) 及 $n_k<m_k$, 又有

$$f_{n_k}(x_{n_k})=\widetilde{x}_0(f_{n_k}),\quad f_{n_k}(x_{m_k})=\widetilde{x}_0(f_{n_k});\ (k=1,2,\cdots).$$

根据泛函 f_{n_k} 的取法, 从上式还可得到

$$\begin{aligned}2\left(1-\frac{1}{n_k}\right)&<2\widetilde{x}_0(f_{n_k})=f_{n_k}(x_{n_k})+f_{n_k}(x_{m_k})\\&=f_{n_k}(x_{n_k}+x_{m_k})\leqslant||f_{n_k}||\cdot||x_{n_k}+x_{m_k}||\\&=||x_{n_k}+x_{m_k}||\leqslant||x_{n_k}||+||x_{m_k}||\\&\leqslant 2\left(1+\frac{1}{n_k}\right),\quad\forall n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

因此有

$$\lim_{k\to\infty}||x_{n_k}+x_{m_k}||=2,$$

从而不难导出

$$\left|\left|\frac{x_{n_k}}{||x_{n_k}||}+\frac{x_{m_k}}{||x_{m_k}||}\right|\right|\to 2\ (k\to\infty). \tag{3.4.4}$$

这样, 式 (3.4.4) 与 (3.4.3) 的矛盾归谬证明了 $\{x_n\}$ 必收敛于一元 $x_0\in E$. 并且由 $\{x_n\}$ 选法所得到的上面第二段结果, 导出

$$||x_0||=1;\quad f_k(x_0)=\widetilde{x}_0(f_k),\quad \forall\, k\in\mathbb{N}. \tag{3.4.5}$$

其四, 证明满足上面式 (3.4.5) 的元 $x_0\in E$ 是唯一的. 事实上, 如果有元 $x_0'\in E$, 也满足上式 (3.4.5), 我们则可得到

$$f_k(x_0+x_0')=2\widetilde{x}_0(f_k)$$

以及 (注意 $\{f_k\}$ 选法)

$$\begin{aligned}2\left(1-\frac{1}{k}\right)&<2\widetilde{x}_0(f_k)=f_k(x_0+x_0')\\&\leqslant||f_k||\cdot||x_0+x_0'||\\&=||x_0+x_0'||\\&\leqslant||x_0||+||x_0'||=2,\quad \forall\, k\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

故知 $||x_0+x_0'||=2$, 从而又由空间一致凸的假设便可导出 $||x_0-x_0'||=0$, 即 $x_0'=x_0$. 也即上述的元 x_0 是唯一的.

最后, 证明对任意 $f_0\in E^*$, 均有 $f_0(x_0)=\widetilde{x}_0(f_0)$. 事实上, 将此泛函加到上面泛函列 $\{f_n\}$ 中去, 那么, 对于 “新” 的泛函列 $f_0,f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots$, 我们按着上面的做法定出一元列 $\{x_n'\}$, 同样可知 $\{x_n'\}$ 收敛于一元 $x_0'\in E$, 从而得出其也满足式 (3.4.5) 的同样结果:

$$||x_0'||=1,\quad f_k(x_0')=\widetilde{x}_0(f_k)\quad (k=0,1,2,\cdots,).$$

故由其上面唯一性的结论可知 $x_0'=x_0$. 这样便可导出: $f_0(x_0)=\widetilde{x}_0(f_0)$. 而当注意到 f_0 的任意性, 此即说明 x_0 即为定理所求. □

注 1**　可以验明, 定理 6 的逆命题是不成立的. 即: 的确可以举出一自反但却不是一致凸的空间之例子.

反例　任意取一个非严格凸的有限维 Banach 空间 $E_{(n)}$(例如, 可以取 $(\ell^{\infty}_{(n)})$ 或 $(\ell^{1}_{(n)})$), 则 $E_{(n)}$ 必然不是一致凸 Banach 空间, 但是由 §1.5 的定理 1, §2.5 的定理 1 和 §3.3 的定理 1 可以知道: $E_{(n)}$ 是自反的. 更进一步, 甚至可以举出一个严格凸的自反而非一致凸的空间的例子 (参见文献 [15]).

注 2*　严格凸的空间未必是一致凸的. 要说明这一结论并不是很简单的. 首先, 由定理 6, 一致凸的 Banach 空间必是自反空间. 因此, 能举出一个不自反且严格凸的 Banach 空间的例子就验证了本注的结论. 下面给出此一反例:

反例　在 (ℓ^{∞}) 中改赋范如下:

$$||x||^* = ||x|| + \Big(\sum_n \frac{1}{2^n}|\xi_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \ \ \forall x = \{\xi_n\} \in (\ell^{\infty})$$

(这里, $||x|| = \sup_n |\xi_n|$ 是空间 (ℓ^{∞}) 中的原范数), 则新空间 $E = (\ell^{\infty}, ||x||^*)$ 必为一个严格凸、但非自反 (从而非一致凸) 的 Banach 空间.

验证　首先, 由上面定义不难得到

$$||x|| \leqslant ||x||^* \leqslant ||x|| + ||x|| = 2||x||, \ \ \forall x = \{\xi_n\} \in (\ell^{\infty}).$$

由此则容易看出, 空间 $E = (\ell^{\infty}, ||x||^*)$ 和 (ℓ^{∞}) 是两个"线性同构"的赋范空间 (也即: 存在一个线性映射, 此时可取恒等映射 I, 使此两空间是线性意义下的同构, 且是"拓扑同构"的), 因此 $E = (\ell^{\infty}, ||x||^*)$ 也必是 Banach 空间, 并由 (ℓ^{∞}) 不自反可知 E 也不是自反的, 故其不是一致凸空间.

另一方面, 从 $||x||^*$ 定义中的后一项 (注意到 (ℓ^2) 是严格凸空间), 我们由定义不难验证空间 $E = (\ell^{\infty}, ||x||^*)$ 是严格凸的. □

§3.5　赋范空间中连续线性泛函延拓的唯一性

从 Hahn-Banach 定理可知, 一般而言, 赋范空间上的连续线性泛函的保范延拓不能是唯一的. 然而, 在某些特殊的赋范空间中, 其上连续线性泛函的保范延拓却可以是唯一的. 下面, 我们给出此有关线性泛函保范延拓唯一性的重要定理, 首先我们介绍一个常用的引理:

引理　设 E 为线性空间, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 及 g 均为 E 上的线性泛函, 则 g 为 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 之线性组合的充要条件是

$$\bigcap_{k=1}^{n} N(f_k) \subset N(g)$$

(这里 $N(f)$ 表示 f 的"零点"集合).

证明 引理的必要性是显然的, 只需证明其充分性. 我们用三种方法来证明结论.

证法 1 我们用归纳法. 当 $n=1$ 时, 由 $N(f_1)\subset N(g)$ 知: 若 $f_1=0$ 必有 $g=0$, 则结论成立; 而若 $f_1\neq 0$, 则有一元 $x_1\in E$, 使得 $f_1(x_1)\neq 0$. 由此, 从假设可知

$$x-\frac{f_1(x)}{f_1(x_1)}x_1\in N(f_1)\subset N(g)\quad(\forall x\in E).$$

即有 $g[x-\frac{f_1(x)}{f_1(x_1)}x_1]=0\ \ (\forall x\in E)$, 从而导出

$$g(x)=\frac{g(x_1)}{f_1(x_1)}f_1(x),\quad \forall x\in E.$$

也即 $n=1$ 时结论成立.

设 $n=m$ 时, 该结论成立, 则当 $n=m+1$ 时, 由设有 $\bigcap_{k=1}^{m+1}N(f_k)\subset N(g)$. 故当我们在线性子空间 $N(f_{m+1})$ 中考虑上述问题时, 由假设, 在此线性子空间中则有 $\bigcap_{k=1}^{m}N(f_k)\subset N(g)$. 于是, 从归纳假设, 在子空间 $N(f_{m+1})$ 中, 则有线性组合关系 $g=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k$ 成立. 这样当设

$$h=g-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k$$

时, 由前面关系式可知: 在空间 E 上, 有 $N(f_{m+1})\subset N(h)$. 故再由前面归纳证明结果便知: 存在数 $\lambda_{m+1}\neq 0$, 使得 $h=\lambda_{m+1}f_{m+1}$, 此即导出

$$g=\sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k f_k.$$

证法 2 令 T 是从 E 到 $\mathbb{K}^n$ 的线性算子, 其由下式定义:

$$T(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)),\quad \forall x\in E.$$

不妨假设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关. 我们注意到假如 T 不 "满", 则必存在 $y_0\in\mathbb{K}^n$, 使得 $\theta\neq y_0\in T(E)^{\perp}$. 设 $y_0=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 则 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 不全为零; 且从线性代数的知识, 由 y_0 与 $T(E)$ "正交" 可知其 "内积" $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k(x)=0\ (\forall x\in E)$. 也即有: $(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k)(x)\equiv 0\ (\forall x\in E)$. 从而与 $\{f_k\}_1^n$ 线性无关矛盾! 故 T 必是满的.

而由假设又知 $N(T)\subset N(g)$. 故当 $T(x_1)=T(x_2)$ 时, 必有 $g(x_1)=g(x_2)$. 从而对于任意的 $y\in\mathbb{K}^n$, $g(x_1)=g(x_2)(\forall x_1,x_2\in T^{-1}(y))$, 故可做映射 φ: $\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$, 使得

$$\varphi(y)=g(x)(\forall x\in T^{-1}(y),\quad \forall y\in\mathbb{K}^n).$$

显然 φ 是 $\mathbb{K}^n$ 上一个确定的线性泛函, 从而亦是连续线性泛函 (§2.1 例 1). 于是由 §2.4 例 3 中 $(\mathbb{K}^n)^* = \mathbb{K}^n$ 的结果, 存在 $c_k \in \mathbb{K}(1 \leqslant k \leqslant n)$, 使得 φ 可表示为

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k, \quad \forall\, y = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n.$$

当令 $y = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$ $(\forall x \in E)$ 时, 显然 $x \in T^{-1}(y)$, 从而由前面 φ 的定义, 上式直接导出

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x), \quad \forall x \in E.$$

也即有 $g = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$. 因此完成了证明.

证法 3　令 T 是从 E 到 $\mathbb{K}^n$ 的线性算子, 其由下式定义:

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)), \quad \forall\, x \in E.$$

不妨假设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关. 由证法 2 知 T 为满射. 故当设 $e_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中的标准基向量时, 存在 $x_i \in E$, 使得

$$T(x_i) = e_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

从而

$$f_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{当 } k = i \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } k \neq i \text{ 时}; \end{cases} \quad (1 \leqslant i, k \leqslant n).$$

因此对任意 $x \in E$, 有

$$x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i \in \bigcap_{k=1}^{n} N(f_k) \subset N(g),$$

故可得到

$$g\Big(x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i\Big) = 0.$$

于是

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f_i(x), \quad \forall\, x \in E.$$

也即导出

$$g = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f_i.$$

因而又完成了证明.　□

注 上面证法 2 和 3 不同于一般书中的证法, 此两方法中有关 T 为“满”算子的证明, 在下一章有关“开算子”的命题时还要用到, 值得注意.

定理(**Taylor 定理**) 设 E 是一实 (复) 赋范线性空间, 则共轭空间 E^* 是严格凸的充要条件是: E 内任意实 (复) 线性子空间 E_0 上的任意连续线性泛函 f_0 必可唯一地保范延拓为全空间 E 上的一个连续线性泛函.

证明 “$\Rightarrow$”: 事实上, 如果结论不真, 设对 E 的某一线性子空间 E_0 上的某一连续线性泛函 f_0, 其可保范延拓为全空间 E 上的两个不同泛函 $f_1, f_2 \in E^*$ (显然, $f_0 \neq 0$ (泛函), 否则 $\|f_0\| = 0$, 是不可能有两个保范延拓泛函的). 则一方面由 f_1 和 f_2 均为 f_0 的延拓泛函可知, 对任意 $\lambda \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned}[\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2](y) &= \lambda f_1(y) + (1-\lambda) f_2(y) \\ &= \lambda f_0(y) + (1-\lambda) f_0(y) \\ &= f_0(y), \quad \forall\, y \in E_0, \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

从而导出

$$\begin{aligned}\|f_0\| &= \sup_{\substack{\|y\|\leqslant 1;\\ y\in E_0\subset E}} |f_0(y)| \\ &\leqslant \sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1;\\ x\in E}} |(\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2)(x)| \\ &= \|\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2\|, \quad \forall\, \lambda \in (0,1). \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

另一方面, 由于 f_1 和 f_2 对 f_0 是“保范”的, 即有 $\|f_1\| = \|f_2\| = \|f_0\|$, 故由假设 E^* 是严格凸的, 从 §3.4 定理 1 可知

$$\left\|\lambda \frac{f_1}{\|f_1\|} + (1-\lambda)\frac{f_2}{\|f_2\|}\right\| < 1, \quad \forall\, \lambda \in (0,1).$$

由此则可导出

$$\begin{aligned}\|\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2\| &= \|f_0\| \cdot \left\|\lambda \frac{f_1}{\|f_0\|} + (1-\lambda)\frac{f_2}{\|f_0\|}\right\| \\ &= \|f_0\| \cdot \left\|\lambda \frac{f_1}{\|f_1\|} + (1-\lambda)\frac{f_2}{\|f_2\|}\right\| \qquad (3.5.3) \\ &< \|f_0\|, \quad \forall\, \lambda \in (0,1). \qquad (3.5.4) \end{aligned}$$

显然, 式 (3.5.2) 与 (3.5.4) 是相互矛盾的, 从而证得“保范延拓”必须是唯一的.

“$\Leftarrow$”: 反之, 在定理假设条件下, 如果 E^* 不是严格凸的, 那么, 必存在着范数为 1 的两个不同泛函 f_1 和 f_2, 及某数 $\lambda_0 \in (0,1)$, 使得

$$\|\lambda_0 f_1 + (1-\lambda_0) f_2\| = \|f_1\| = \|f_2\| = 1. \tag{3.5.5}$$

令 $E_0 = N(f_1 - f_2) \triangleq \{x \in E\colon (f_1 - f_2)(x) = 0\}$, 由于 $f_1 \neq f_2$, 故知 E_0 必为 E 中的 (非空) 真闭子空间. 现在在 E_0 上定义泛函

$$f_0(x) \triangleq f_1(x), \quad \forall\, x \in E_0.$$

下面证明 $\|f_0\| = 1$. 首先我们注意到, 假若有 $f_1 = \alpha f_2$, 代入到式 (3.5.5), 则有

$$|\alpha| = 1, \quad |\lambda_0 \alpha + (1 - \lambda_0)| = 1.$$

当 α 为实数时, 从上式可知 $\alpha = 1$. 而当注意到复平面中单位圆盘是严格凸的, 故在复空间时, 亦可得到 $\alpha = 1$; 但这与假设 $f_1 \neq f_2$ 矛盾. 由此可知上面 f_1 和 f_2 必是线性无关的. 因而从引理可知 $N_{f_2} \setminus N_{f_1} \neq \varnothing$. 注意到 N_{f_1} 和 N_{f_2} 均为 E 的线性子空间, 故必存在 $z_0 \in N_{f_2} \setminus N_{f_1}$, 使得

$$f_1(z_0) = 1 \quad (f_2(z_0) = 0). \tag{3.5.6}$$

而由 $z_0 \notin N(f_1 - f_2)$ 和 §2.3 中定义 1 的注可知: 对于任意 $x \in E$, 必有唯一分解式

$$x = [f_1(x) - f_2(x)] z_0 + y \quad (\text{其中: } y \in E_0).$$

回到式 (3.5.5), 由范数的定义可知存在元列 $\{x_n\} \subset S_1(E)$, 使得

$$\lambda_0 f_1(x_n) + (1 - \lambda_0) f_2(x_n) \to 1 \quad (n \to \infty).$$

注意到 $0 < \lambda_0 < 1$ 及 $|f_i(x_n)| \leqslant 1 (i = 1, 2)$; $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ 从上极限则可得到

$$f_i(x_n) \to 1, n \to \infty \quad (i = 1, 2). \tag{3.5.7}$$

这样一来, 当记上述 x_n 的唯一分解式为

$$x_n = [f_1(x_n) - f_2(x_n)] z_0 + y_n \quad (\text{其中}\, y_n \in E_0, n \in \mathbb{N}) \tag{3.5.8}$$

时, 从式 (3.5.7) 及 x_n 的范数均为 1 可得

$$\lim_{n \to \infty} \|y_n\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n\| = 1.$$

故由 f_0 的定义及式 (3.5.6) ~ (3.5.8), 可以导出

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} f_0\Big(\frac{y_n}{\|y_n\|}\Big) &= \lim_{n \to \infty} (f_1(x_n) - [f_1(x_n) - f_2(x_n)] f_1(z_0)) \\
&= \lim_{n \to \infty} f_2(x_n) = 1.
\end{aligned}$$

再由 f_0 的定义, $||f_0|| \leqslant ||f_1|| = 1$, 从而得到 $||f_0|| = 1$.

最后注意到在 E_0 上均有 $f_0(y) = f_1(y) = f_2(y)$, 故知 f_0 在 E 上有两个不同的保范延拓, 与定理的假设矛盾! 从而定理充分性得证. □

作为推理, 注意到严格凸空间的子空间必是严格凸的, 以及赋范空间可视为其二次共轭的子空间, 我们给出一个赋范线性空间是严格凸的必要性命题:

推理 如果一个赋范线性空间 E 的共轭空间 E^* 满足: 对任意 $0 \neq f_1 \in E^*$, 均存在"唯一"的一个元 $\tilde{x} \in E^{**}$, 使得 $||\tilde{x}|| = 1, \tilde{x}(f_1) = ||f_1||$, 则空间 E 必为严格凸的.

§3.6 自反空间的一些特性

下面给出一个关于自反空间的闭线性子空间之特性的定理. 我们先给出在 §2.5 指出的引理 2 的证明. 这里作为本节的主要内容, 我们以定理 1 标记之.

定理 1 (Pettis 定理) 如果空间 E 是自反的, 那么 E 的任意闭线性子空间 E_0 也是自反的.

证明 我们分三步来证明.

(1) 对任意 $f \in E^*$, 由于 $E_0 \subset E$, 故知 f 限制在 E_0 上时, 可视为 E_0 上的连续线性泛函, 记为 f_0. 于是, 变换 $f \to f_0$ 就决定了一个从 E^* 到 E_0^* 的线性算子 T:

$$T(f) = f_0 \in E_0^*, \quad \forall f \in E^*.$$

且由于

$$\begin{aligned}||T(f)|| = ||f_0|| &= \sup_{\substack{||y|| \leqslant 1;\\ y \in E_0 \subset E}} |f_0(y)| \\ &\leqslant \sup_{\substack{||x|| \leqslant 1;\\ x \in E}} |f(x)| = ||f||, \quad \forall f \in E^*,\end{aligned}$$

故知 T 是定义在 E^* 上 (到 E_0^*) 的连续线性算子.

(2) 由上面 T 的性质, 从 §2.3 定理 4 知, T^* 必为从 E_0^{**} 到 E^{**} 内的有界线性算子. 并由 E 为自反空间的假设, 故对任意 $\widetilde{y}_0 \in E_0^{**}$, 存在 $x_{\widetilde{y}_0} \in E$, 使得

$$[T^*(\widetilde{y}_0)](f) = f(x_{\widetilde{y}_0}), \quad \forall f \in E^*.$$

根据上面 (1) 的结果可得到

$$\begin{aligned}f(x_{\widetilde{y}_0}) &= [T^*(\widetilde{y}_0)](f) = \widetilde{y}_0[T(f)] \\ &= \widetilde{y}_0(f_0), \quad \forall f \in E^*, \widetilde{y}_0 \in E_0^{**}.\end{aligned}$$

此外, 注意到对任意 $f_0 \in E_0^*$, 由 Hahn-Banach 定理可知, 其必存在一保范延拓的泛函 $f \in E^*$, 因而有 $T(f) = f_0$. 结合上面的关系式, 便可导出

$$\widetilde{y}_0(f_0) = f(x_{\widetilde{y}_0}), \quad \forall f_0 \in E_0^*,\ f \in T^{-1}(f_0),\ \widetilde{y}_0 \in E^{**}.$$

(3) 为了证明 E_0 的自反性, 只需证明上述元 $x_{\widetilde{y}_0} \in E_0$ 就可以了. 下面用归谬法来证明. 反之, 如果 $x_{\widetilde{y}_0} \notin E_0$, 则由 §3.2 的隔离性定理 (定理 2), 便可得泛函 $f^{(1)} \in E^*$, 使其满足

$$f^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = x_{\widetilde{y}_0} \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x \in E_0 \text{ 时.} \end{cases}$$

于是, 泛函 $f_0^{(1)} \triangleq T(f^{(1)}) = 0$ (零泛函) $\in E_0^*$, 而将此结果代入上面 (2) 中所得关系式中去, 则可导出

$$0 = \widetilde{y}_0(f_0^{(1)}) = f^{(1)}(x_{\widetilde{y}_0}) = 1,$$

矛盾! □

下面给出的 Helly 定理是很有用的 (我们采用 Y. Mimura[11] 的证明方法).

引理 (**Helly 定理**)　*设 E 为一赋范线性空间, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 E 上某 n 个连续线性泛函, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为某 n 个复数, γ 为某一正数, 则对任意正数 ε, 为了存在一元 $x_\varepsilon \in E$ 使其满足条件*

(i) $f_k(x_\varepsilon) = \lambda_k (k = 1, 2, \cdots, n)$,　(ii) $\|x_\varepsilon\| \leqslant \gamma + \varepsilon$;

必须且只需对于任意 n 个复数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 均成立关系式

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k\Big| \leqslant \gamma \Big\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\Big\|.$$

证明 *　(1) "⇒": 从定理假设条件 (i) 和 (ii), 显然可以导出对任意 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in \mathbb{C}$ 及任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_\varepsilon \in E$, 使得

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot f_k(x_\varepsilon)\Big| = \Big|\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\Big)(x_\varepsilon)\Big| \\ &\leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\Big\| \cdot \|x_\varepsilon\| \leqslant (\gamma + \varepsilon)\Big\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\Big\|, \end{aligned}$$

由此 (注意到 ε 的任意性), 我们便可导出

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k\Big| \leqslant \gamma \Big\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\Big\|.$$

(2) “$\Leftarrow$”：首先, 不妨设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关 (因为当其前 n_0 个线性无关, 而后面的 $f_{n_0+1}, f_{n_0+2}, \cdots, f_n$ 均为其线性组合时, 我们只要对泛函 $f_1, f_2, \cdots, f_{n_0}$ 推出上面的定理条件 (i) 和 (ii), 则后面 $(n-n_0)$ 个泛函必然也是满足的. 因而, 我们只要对 $f_k(k=1,2,\cdots,n_0)$ 来讨论就可以了).

其次, 考虑从空间 E 到 n 维复欧氏空间 $\mathbb{C}^n$ 的一个映射 T,

$$y = T(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)), \quad \forall x \in E. \tag{3.6.1}$$

不难看出, T 是将 E 映射到“整个”空间 $\mathbb{C}^n$ 上的“满”线性算子. 事实上, 线性是很显然的, 并且如果 $T(x)$ 的值域 $\mathcal{W}(T)$ 构成了 $\mathbb{C}^n$ 上的一个 m 维 $(m<n)$ 子空间, 则类似 §3.5 引理的证法 2, 由代数知识可知：必有 n 个不同时为 0 的复数 $\alpha_k(k=1,2,\cdots,n)$, 使其恒有

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\Big)(x) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(x) = 0, \quad \forall x \in E.$$

从而导出 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k = 0$(零泛函), 故与 $f_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是线性无关的假设矛盾.

其三, 我们证明当 ε 为任意正数时, 对于 E 中的“原心球” $B_{\gamma+\varepsilon} = B(\theta, \gamma+\varepsilon)$ 而言, $T(B_{\gamma+\varepsilon})$ 必定包含着 $\mathbb{C}_n$ 中一个“原心球”.

事实上, 由 $T(E) = \mathbb{C}^n$, 故我们可以取出 E 中的 n 个元 (必为非零元) $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使其满足

$$T(x_k) = (0, \cdots, \underset{(n)}{1}, 0, \cdots, 0) \ (k=1,2,\cdots,n),$$

这样, 当复数 δ_k 满足条件 $|\delta_k| < \delta = \frac{\gamma+\varepsilon}{n}\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\frac{1}{\|x_i\|})$ 时 $(k=1,2,\cdots n)$, 由于

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}\delta_k x_k\Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\delta_k|\cdot\|x_k\| < \gamma+\varepsilon,$$

故知均有元 $\sum_{k=1}^{n}\delta_k x_k \in B_{\gamma+\varepsilon}$, 从而可知 $\mathbb{C}_n$ 中上述相应的元

$$\begin{aligned}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) &= \sum_{k=1}^{n}\delta_k(0, \cdots, \underset{(k)}{1}, 0, \cdots, 0)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\delta_k T(x_k)\\ &= T\Big(\sum_{k=1}^{n}\delta_k x_k\Big) \in T(B_{\gamma+\varepsilon}).\end{aligned}$$

此即说明 $T(B_{\gamma+\varepsilon})$ 包含着 $\mathbb{C}_n$ 内以原点为中心, 以 2δ 为边长的“n 维 (开) 方体”. 从而当然也必含有 n 维复欧氏空间 $\mathbb{C}^n$ 的一个“原心球” $B(\frac{1}{2}\delta)$.

最后, 用归谬法推出结论. 反之, 如果原命题的结论不成立, 则必存在某一正数 ε_0, 使得 E 中不存在满足定理条件 (i) 和 (ii) 的元 x_{ε_0}, 此即 $\mathbb{C}^n$ 中有一点 $b = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \notin T(B_{\gamma+\varepsilon_0})$. 注意到单点集 $\{b\}$ 与 $T(B_{\gamma+\varepsilon_0})$ 为两不交凸集, 而且由上面结论还知, $[T(B_{\gamma+\varepsilon_0})]^\circ \neq \varnothing$. 这样, 当把 $\mathbb{C}^n$ 视为 "实" n 维线性空间时, 则由上节的 Eidelheit 定理并注意到 $\theta \in [T(B_{\gamma+\varepsilon_0})]^\circ$ (我们亦用 θ 表示 $\mathbb{C}_n$ 中的 "零元") 便可得到 $\mathbb{C}^n$ 上一 "实" 连续线性泛函 $g(x)$, 使得

$$g(y) \leqslant g(b), \quad \forall y \in T(B_{\gamma+\varepsilon_0}); \quad 0 = g(\theta) < g(b). \tag{3.6.2}$$

令泛函

$$f(y) = g(y) - ig(iy), \quad \forall\, y \in \mathbb{C}^n,$$

显然 $f \in (\mathbb{C}^n)^*$, 并且式 (3.6.2) 即为

$$\mathrm{Re} f(y) \leqslant \mathrm{Re} f(b) (> 0), \quad \forall\, y \in T(B_{\gamma+\varepsilon_0}).$$

此外, 由 §2.4 中关于 $(\mathbb{C}^n)^* = \mathbb{C}^n$ 的结论, 必存在不全为零的 n 个复数 $\{\xi_1^\circ, \xi_2^\circ, \cdots, \xi_n^\circ\}$, 使得 $f(y) = \sum_{k=1}^n \xi_k^\circ y_k$ $(\forall\, y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n)$, 故由式 (3.6.1) 中的元 y 以及上面元 b 的假设, 便可得到

$$\mathrm{Re}\Big[\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ f_k(x)\Big] \leqslant \mathrm{Re}\Big[\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ \lambda_k\Big] (> 0), \quad \forall x \in B_{\gamma+\varepsilon_0}.$$

注意到 $B_{\gamma+\varepsilon_0}$ 是球域, $f_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 均为线性泛函, 故由复数的特点以及上面论述便可导出

$$\Big|\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ f_k(x)\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ \lambda_k\Big| (> 0), \quad \forall x \in B_{\gamma+\varepsilon_0}.$$

即有

$$\Big|\Big(\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ f_k\Big)(x)\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ \lambda_k\Big|, \quad \forall\, x \in B_{\gamma+\varepsilon_0}.$$

最后, 由泛函范数的定义

$$\sup_{x \in B_{\gamma+\varepsilon}} \Big|\Big(\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ f_k\Big)(x)\Big| = (\gamma + \varepsilon_0)\Big\|\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ f_k\Big\|,$$

从前式便可得到

$$(\gamma + \varepsilon_0)\Big\|\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ f_k\Big\| \leqslant \Big|\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ \lambda_k\Big|.$$

由于 $f_k(k=1,2,\cdots,n)$ 线性无关, 因此 $\left\|\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ f_k\right\| \neq 0$, 从而由上式则可导出

$$\gamma\left\|\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ f_k\right\| < \left|\sum_{k=1}^n \xi_k^\circ \lambda_k\right|.$$

此显然与定理假设矛盾. □

注 上述引理中方程的"解"一般说来是不唯一的. 事实上, 只要当空间 E 的维数比 n 大时, 由在大于 n 维的线性空间中, n 个齐次方程构成的方程组

$$f_k(x) = 0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

必有一个非零解, 则可说明本结论.

下面给出关于自反空间特征的重要定理 (这里, 关于充分性, 我们只能在空间"可分"时予以初等证明):

定理 2 (Kakutani 定理) 为使 Banach 空间 E 是自反的, 必须且只需 E 内的 (闭) 单位球 $B(\theta,1)$ 是"弱"自列紧的.

证明 (1) "$\Rightarrow$": 设 E 为一自反空间, $\{x_n\}$ 为 $B(\theta,1)$ 上任意元列. 若令 $E_0=\overline{[\{x_n\}]}$ ($\{x_n\}$ 所张成的闭线性子空间), 则 E_0 显然是可分的, 且由定理 1, 还知它也是自反的.

其次, 令

$$\widetilde{x}_n(f^\circ) = f^\circ(x_n), \quad \forall f^\circ \in E_0^*, \quad n \in \mathbb{N}.$$

显然可以得到

$$\widetilde{x}_n \in E_0^{**}, \quad \|\widetilde{x}_n\| \leqslant 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由于 $E_0=(E_0^*)^*$ 是可分的, 从 §2.5 的引理 1 可知 E_0^* 也是可分的. 再利用 §2.5 的引理 3 可知 $(E_0^*)^*=E_0$ 的单位闭球是"弱*"自列紧的, 而当注意到 E_0 的自反性即知其为"弱"自列紧的, 因此存在 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ 及 $x_0\in B(\theta,1)$, 使得

$$f^\circ(x_{n_k}) \to f^\circ(x_0)\,(k\to\infty), \quad \forall f^\circ \in E_0^*.$$

最后, 注意到对任意 $f\in E^*$, 当其定义域限制在 E_0 则为 E_0^* 中的元时, 我们便可导出

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0)\ (k\to\infty), \quad \forall f \in E^*.$$

即 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛于 $B(\theta,1)$ 上的元 x_0, 从而知 $B(\theta,1)$ 是弱自列紧的.

(2) "$\Leftarrow$" (仅在"可分"空间中用此初等方法证之):

反之, 如果 E 不自反, 注意到 E 到 E^{**} 的典则映射 J 是线性等距映射, 故由 E 是 Banach 空间, 可知 $J(E)$ 为 E^{**} 内的真闭线性子空间. 因此, 由 Riesz 引理, 必存在一元 $F\in S(E^{**})$, 使得

$$d(F,J(E))\geqslant\frac{1}{2}. \tag{3.6.3}$$

由于 E 是可分的, 故单位原心球 B_1 内有一稠密子集 $\{x_k\}$. 因此, 对于任意 $n\in\mathbb{N}$, E^{**} 中的 $n+1$ 个元 $J(x_1),J(x_2),\cdots,J(x_n)$ 及 F; $n+1$ 个数 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0,\lambda_{n+1}=\frac{1}{2}$; 从式 (3.6.3), 对于任意 $n+1$ 个数 $\xi_1,\cdots,\xi_{n+1}$, 当 $\xi_{n+1}\neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_kJ(x_k)+\xi_{n+1}F\right\|&\geqslant d(\xi_{n+1}F,J(E))\\&=|\xi_{n+1}|\,d(F,J(E))\\&\geqslant\frac{1}{2}|\xi_{n+1}|\\&=\left|\sum_{k=1}^{n+1}\xi_k\lambda_k\right|;\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

而当 $\xi_{n+1}=0$ 时, 由 $\sum_{k=1}^{n+1}\xi_k\lambda_k=0$, 故上面不等式仍然成立.

这样, 由 Helly 定理, 对上述任意的 n, 我们可以找到一个泛函 $f_n\in E^*$, 使得

(i) $f_n(x_k)=J(x_k)(f_n)=\lambda_k=0\quad(1\leqslant k\leqslant n),\quad F(f_n)=\lambda_{n+1}=\dfrac{1}{2}.$ (3.6.5)

(ii) $\|f_n\|\leqslant 1+\varepsilon_0$ ($\varepsilon_0>0$ 为某一正数).

因此, 从 (i) 易知, 对于任意 $k\in\mathbb{N}$, 均有

$$f_n(x_k)\to 0\quad(n\to\infty).$$

而由 $\overline{\{x_k\}}=B_1$, 我们则不难导出

$$f_n\underset{(\text{弱})}{\xrightarrow{w}}0\quad(n\to\infty). \tag{3.6.6}$$

但另一方面, 对于任意的 $n\in\mathbb{N}$, E^* 中从 (3.6.5) 所得的 n 个泛函 $f_1,\cdots,f_n$ 和 n 个数 $F(f_1),\cdots,F(f_n)$, 对于任意 n 个数 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$; 注意到前面 (i) 的后一关系式, 我们又有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\mu_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}F(f_k)\mu_k\right|=\left|F\Big(\sum_{k=1}^{n}\mu_kf_k\Big)\right|$$

$$\leqslant \|F\| \cdot \Big\| \sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k \Big\|$$

$$= \Big\| \sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k \Big\|.$$

故再次利用 Helly 定理, 我们便可以找到一元 $y_n \in E$, 使得

(i)′ $f_k(y_n) = \frac{1}{2}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

(ii)′ $\|y_n\| \leqslant 1 + \varepsilon_0'$ ($\varepsilon_0' > 0$ 为某一正数).

最后, 注意到定理的假设, 由单位原心球 B_1 是弱自列紧的, 易知球 $B_{1+\varepsilon_0'}$ 也是弱自列紧的, 因此, $\{y_n\}$ 必存在一弱收敛的子列 $\{y_{n_i}\}$, 使得 $y_{n_k} \xrightarrow[\text{弱}]{w} y_0 (k \to \infty)$. 故从 (i)′ 知

$$f_k(y_0) = \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

而此显然与式 (3.6.6) 矛盾. □

注 1 当引入弱拓扑概念以后, 可知赋范空间是自反的充要条件是其闭单位球是"弱紧"的. 因此, 从上面定理的证明可以看出: 对于可分的赋范空间, 其闭单位球的弱紧性与弱自列紧性是等价的. 从而用较简单的方法部分地回答了高难度的 Eberlein-Šmulian 定理 (参见后面第九章第六节).

类似地, 由定理 2 我们可以直接导出下面的一个推理:

推理 在自反空间中, 任意有界集都是"弱"列紧的. 反之, 只要一个 Banach 空间 E 内的某一闭球 $B(x_0, \delta_0)$ 是弱自列紧的, 则 E 必为自反空间.

注 2 当 E 不是自反空间时, 其内单位球 $B(\theta, 1)$ 未必是弱自列紧的. 反例可见空间 (ℓ^1) (注意 Schur 定理, 在 (ℓ^1) 中, 其元列的强弱收敛是等价的).

注 3 根据定理 2 也可看出, 从"弱"自列紧性一般也推不出 (自) 列紧性, 反例可见空间 (ℓ^p) 或 $L^p[a,b] (p > 1)$.

注 4 由定理 2 的推理结合今后第五章的"共鸣定理", 我们将可以看出, 在一个自反空间中, 集 M 的有界性与其"弱"列紧性是等价的.

注 5* 关于自反空间的更有趣的结果是 R. C. James 在 1963 年 10 月在华沙举行的泛函会议上给出的, 他指出: "为了一个 Banach 空间是自反的, 必须且只需其任意连续线性泛函均在其单位 (闭) 球 $B(\theta, 1)$ 上取到其上确界".[38]

注 6* 我们同样可以利用 E^* 内的任意有限元引出空间 E 的"弱拓扑", 从而导出"弱"紧的概念. 并且, 它与"弱"自列紧也有如下的命题成立: "赋范线性空间的任意子集, 其弱紧与弱自列紧的性质是等价的". 但是"弱*"紧与"弱*"自列紧却不是等价的 (对比一下 §2.5 中引理 3(如 E 可分, 则 E^* 的单位 (闭) 球必"弱*"自列紧) 及著名的 Alaoglu-Bourbaki 定理: "对任意赋范线性空间 E, E^* 的单位 (闭) 球均是"弱*"紧的") 便可知), 有兴趣的读者可参看文献 [10, 11, 17, 18] 等.

§3.7 Hahn-Banach 定理的一些应用

3.7.1 最佳逼近的存在性

作为 Hahn-Banach 定理在逼近论方面的应用, 本节介绍关于空间中的一个集合与另一元之间的最佳逼近值的存在问题.

首先从赋准范空间 E 中一元 x_0 与 E 的一个"有限维"子空间 E_n 之间的最佳逼近元的存在性问题谈起. 即当设 $E_n=\{\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n\colon \lambda_k\in\mathbb{K}, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 时 (其中 $e_1,e_2,\cdots e_n$ 是 E 中的线性无关元), 试问: 是否存在一元

$$y_0=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^0e_k\in E_n,$$

使得

$$d(x_0,y_0)=\inf_{y\in E_n}d(x_0,y).$$

对赋范线性空间而言, 这个问题的回答是肯定的, 下面就来验证它. 首先我们给出一个引理:

引理　*设 E 是赋范空间, $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 E 中的线性无关元, 当令*

$$f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=||\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n||,\quad \forall\,\lambda_k\in\mathbb{K}, 1\leqslant k\leqslant n$$

时, 则有

$$\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|\to\infty\Longrightarrow f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\to\infty.$$

证明　首先, 从前面 §1.5 的引理 1 的证明可以知道: n 元函数 $f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$ 在 n 维空间闭曲面 $\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|=1$ 上具有"正"的下界, 不妨设其为 δ_0, 也即有

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|}f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=\Big|\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|}e_k\Big|\Big|\geqslant\delta_0>0,$$

$$\forall\,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n\in\mathbb{K}\text{ 且 }\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|\neq0.$$

也即 $f(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)\geqslant\delta_0\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|, (\forall\,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n\in\mathbb{K})$. 由此显然直接得出引理结论. □

有了上面的引理, 我们便可得到一个关于最佳逼近元的存在性命题.

定理 1　*设 E_n 是赋范线性空间 E 的一个 n 维线性子空间, 则对任意 $x_0\in E$, 存在 $y_0\in E_n$, 使得 y_0 为 E_n 中对 x_0 的最佳逼近元 (即有: $||x_0-y_0||=\inf_{y\in E_n}||x_0-y||$).*

证明 由于当 $x_0 \in E_n$ 时, 定理结论显然成立, 所以不妨设 $x_0 \notin E_n$(由此当然必有 $x_0 \neq \theta$). 令

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) = ||x_0 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n)||,$$
$$\forall \lambda_k \in \mathbb{K}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

于是注意到 $g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \geqslant ||\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n|| - ||x_0||$, 因此, 由上面的引理可知, 对 $2||x_0|| > 0$, 存在 $r > 0$, 使得当 $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| > r$ 时, 就有 $||\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n|| > 2||x_0||$. 由此可得

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) > 2||x_0|| - ||x_0|| = ||x_0||,$$
$$\forall_{\lambda_k} \in \mathbb{K} \text{ 且 } \sum_{k=1}^n |\lambda_k| > r \ (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{3.7.1}$$

另外, 再注意到

$$\begin{aligned}
&|g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) - g(\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n)| \\
=&\left| \left\|x_0 - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right\| - \left\|x_0 - \sum_{k=1}^n \mu_k e_k\right\| \right| \\
\leqslant&\left\| \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \mu_k) e_k \right\| \triangleq f(\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \cdots \lambda_n - \mu_n), \\
&\qquad \forall \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{K}; 1 \leqslant k \leqslant n,
\end{aligned}$$

则由 f 是 n 元连续正齐性函数, 故, 直接得出 $g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$ 也是 n 元连续函数. 所以, 在 n 维有界闭域 $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leqslant r$ 上必有一点 $(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots \lambda_n^0)$, 使得 $g(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots \lambda_n^0)$ 取到该闭域上的最小值. 这样当令 $y_0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^0 e_k$ 时, 便可得到

$$\begin{aligned}
||x_0 - y_0|| &= ||x_0 - (\lambda_1^0 e_1 + \lambda_2^0 e_2 + \cdots + \lambda_n^0 e_n)|| \\
&= g(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots \lambda_n^0) \\
&\leqslant g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n), \quad \forall \lambda_k \in \mathbb{K} \text{ 且} \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leqslant r \ (1 \leqslant k \leqslant n).
\end{aligned} \tag{3.7.2}$$

特别地有 $||x_0 - y_0|| \leqslant g(0, 0, \cdots, 0) = ||x_0||$. 最后由式 (3.7.1) 和 (3.7.2) 我们便可导出：对 E_n 中元 $y_0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^0 e_k$, 必有

$$||x_0 - y_0|| \leqslant g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) = ||x_0 - (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \cdots \lambda_n e_n)||, \quad \forall \lambda_k \in \mathbb{K}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

也即有

$$||x_0 - y_0|| = \inf_{y \in E_n} ||x_0 - y||.$$ □

注　在定理 1 中, E_n 对于 x_0 的最佳逼近元只有在某种类型的赋范线性空间中才能保证其唯一性 (见 §3.4 中定理 4), 对于一般的赋范线性空间而言, 最佳逼近元则未必是唯一的. 可见下面反例:

反例　设 $E=$ (实)$C[0,1]$, E_0 为一维闭线性子空间 $\{\alpha t\colon \alpha\in\mathbb{R}\}$, 元 $x_1=x_1(t)\equiv 1$ $(t\in[0,1])$, 则满足 $\|x_1-y_0\|=\inf\limits_{y\in E_0}\|x_1-y\|$ 的元 $y_0\in E_0$ 存在, 但不唯一.

验证　事实上, 对任意 $y=\alpha t\in E_0$, 由于

$$\|x_1-y\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|1-\alpha t|=\begin{cases}>1, & \text{当}\,\alpha<0\,\text{时};\\ >1, & \text{当}\,\alpha>2\,\text{时};\\ =1, & \text{当}\,0\leqslant\alpha\leqslant 2\,\text{时}.\end{cases}$$

因此, 如果 $y_0\in\{\alpha t\colon 0\leqslant\alpha\leqslant 2\}\subset E_0$, 则均有

$$\|x_1-y_0\|=\inf_{y\in E_0}\|x_1-y\|=1.$$

□

下面讨论对于一般赋范线性子空间 E_0 内关于元 x_1 之最佳逼近元的存在问题. 为此我们先给出一个一般性的定义.

定义 1　设 E 为一距离空间. 集 $G\subset E$, 元 $x_1\in E$. 称元 $y_0\in G$ 为 G 内对 x_1 的**最佳逼近元**, 是指其满足关系式

$$d(x_1,y_0)=\inf_{y\in G}d(x_1,y)$$

(即 y_0 是 G 中与元 x_1 的距离最近者). 上述 y_0 的全体记为 $\mathcal{A}_G(x_1)$, 即有

$$\mathcal{A}_G(x_1)=\{y_0\colon d(x_1,y_0)=\inf_{y\in G}d(x_1,y), y_0\in G\}.$$

注　从上面的定义不难看出, 当元 $x_1\in G$ 时有 $\mathcal{A}_G(x_1)=\{x_1\}$(单点集). 当元 $x_1\in\overline{G}\setminus G$(在不属于 G 之 G 的边界点) 时, 则有 $\mathcal{A}_G(x_1)=\varnothing$(空集). 因而为了下面的讨论有意义, 我们总是约定 $x_1\in E\setminus\overline{G}$(即避开上述两种平凡的情形).

定理 2　设 E 是赋范线性空间, E_0 为其线性子空间, 元 $x_1\in E\setminus\overline{E_0}$, 则对于 E_0 内的任一元 y_0, 为使 $y_0\in\mathcal{A}_G(x_1)$, 必须且只需: 存在一个泛函 $f_1\in E^*$, 使得

$$\|f_1\|=1,\quad f_1(y)=0,\quad (\forall\, y\in E_0);\ f_1(x_1-y_0)=\|x_1-y_0\|.$$

证明　(1) "$\Rightarrow$": 由假设元 $y_0\in\mathcal{A}_{E_0}(x_1)\subset E_0$ 及元 $x_1\notin E\setminus\overline{E}_0$ (参看图 3.8), 故知

$$\|x_1-y_0\|=d(x_1,E_0)=\inf_{y\in E_0}d(x_1,y)>0.$$

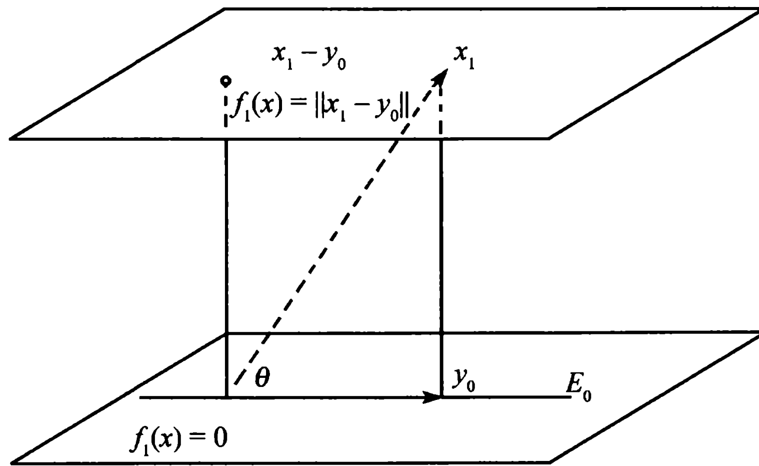


图 3.8

于是由 §3.2 的定理 2 知存在 $f' \in E^*$, 使得

$$\|f'\| = \frac{1}{\|x_1 - y_0\|};\quad f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = x_1 \text{ 时}; \\ 0, & \text{当 } x \in E_0 \text{ 时}. \end{cases}$$

这样, 我们取泛函 $f_1 = \|x_1 - y_0\| f'$, 其即为所求的泛函.

(2) "$\Leftarrow$": 如果泛函 $f_1 \in E^*$ 满足定理条件, 那么对于这样的任意元 $y_0 \in E_0$, 由 f_1 的性质有

$$\begin{aligned}\|x_1 - y_0\| &= f_1(x_1 - y_0) \\ &= f_1(x_1) - f_1(y_0) = f_1(x_1) \\ &= |f_1(x_1 - y)| \leqslant \|f_1\| \cdot \|x_1 - y\| \\ &= \|x_1 - y\|,\quad \forall y \in E_0,\end{aligned}$$

由此立即得出

$$\|x_1 - y_0\| = \inf_{y \in E_0} \|x_1 - y\|.$$

也即 $y_0 \in \mathcal{A}_{E_0}(x_1)$. □

注 1 定理 2 的几何意义是: 为了元 $y_0 \in \mathcal{A}_{E_0}(x_1)$, 必须且只需存在一个包含着 E_0, 且对于球 $B(x_1, \|x_1 - y_0\|)$ 的承托超平面 (参见图 3.9).

注 2 事实上, 由定理 2 中的泛函 $f_1 \in E^*$ 所形成的闭超平面: $H_{f_1} = \{x\colon f_1(x) = 0, x \in E\}$ 即为所需. 因为: (i) 由 $f_1(y) = 0 (\forall y \in E_0)$, 可知 $E_0 \subset H_{f_1}$. (ii) 对任意 $x \in B(x_1, \|x_1 - y_0\|)$, 由于 $\|x - x_1\| \leqslant \|x_1 - y_o\|$, 注意上面泛函 f_1 的三条性质, 我

们有

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_1(x_1) + f_1(x - x_1) &= f_1(x_1 - y_0) + f_1(x - x_1) \\ &\geqslant \|x_1 - y_0\| - \|f_1\| \cdot \|x - x_1\| \\ &= \|x - x_0\| - \|x - x_1\| \geqslant 0, \end{aligned}$$

即球 $B(x_1, \|x_1 - y_0\|)$ 在超平面 H_{f_1} 的一侧. (iii) 由元 $y_0 \in B(x_1, \|x_1 - y_0\|)$ 且 $y_0 \in E_0$, 因此必有 $y_0 \in H_{f_1}$. 综合上述可知 H_{f_1} 必为球 $B(x_1, \|x_1 - Y_0\|)$ 的闭承托超平面.

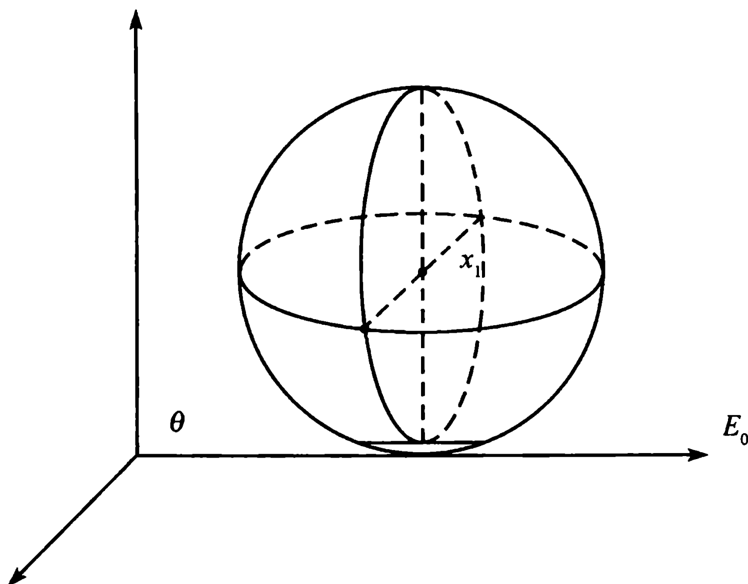


图 3.9

由定理 2 不难导出下面的推理:

推理　*E* 和 E_0 为定理 2 所设, $x_1 \in E \setminus \overline{E_0}$, 则对于 E_0 内的集 M_0, 为使 $M_0 \in \mathcal{A}_{E_0}(x_1)$, 必须且只需: 存在一泛函 $f_1 \in E^*$, 使得

$$\|f_1\| = 1, \quad f_1(y) = 0 \ (\forall y \in E_0);$$

及

$$f_1(x_1 - y_0) = \|x_1 - y_0\|, \quad \forall y_0 \in M_0.$$

证明　事实上, 只要注意到 $\mathcal{A}_{E_0}(x_1)$ 的定义, 则可导出对任意 $y_0', y_0'' \in \mathcal{A}_{E_0}(x_1)$, 均有 $\|x_1 - y_0'\| = \|x_1 - y_0''\|$. 因而类似定理 2 的证明方法不难导出本推理的结论.□

注 3　由推理可知, 即使线性子空间 E_0 对于元 x_1 的最佳逼近元的集合 $\mathcal{A}_{E_0}(x_1)$ 不止包含一个元素, 但满足定理 2 条件的相应连续线性泛函却只能是同一个.

下面我们举两个求 $\mathcal{A}_{E_0}(x_1)$ 的例子:

例 1　从前面引理后的反例中显然可以看出, 那里的 $\mathcal{A}_{E_0}(x_1) = \{\alpha t\colon 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\}$.

例 2 设 E 为一赋范线性空间, E_0 是 E 内的闭线性子空间. 由 §1.12 可知, 商空间 E/E_0 亦为一赋范线性空间, 并且对于任意 $x_1 \in E$, 其在 E_0 内的最佳逼近元的集合 $\mathcal{A}_{E_0}(x_1)$ 为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{E_0}(x_1) &= \{y_0: \|x_1 - y_0\| = \inf_{y \in E_0} \|x_1 - y_0\|, \quad y_0 \in E_0\} \\ &= \{y_0: \|x_1 - y_0\| = \|\,[x_1]\,\|, \quad y_0 \in E_0\}.\end{aligned}$$

特别地, 由于有限维空间中的有界闭集的列紧性, 我们还知, 当 E_0 为有限维子空间时, 对于空间 E 中的任意元 x_1 均有 $\mathcal{A}_{E_0}(x_1) \neq \varnothing$.

注 4 关于在 "实" 赋范空间中, 凸集对于元的最佳逼近元的存在问题, 以及在 "复" 空间时的情形就不详细讨论了, 有兴趣的读者可参看文献 [1, 19, 20].

注 5 在本段中, 我们只考虑了最佳逼近元存在性问题. 当然, 我们也可以考虑它们的唯一性等深入的问题, 这里也不详细介绍. 有兴趣的读者可参见文献 [21~23].

3.7.2 矩量问题

下面讨论关于未知数是 "泛函" 或 "元" 的无穷维线性方程的 "解" 之存在问题 (亦称为 "矩量问题"). 我们将利用 Hahn-Banach 定理及其推论来解决几个较复杂的问题.

定理 3 (Riesz-Helly-Hahn 定理) 设 E 为一赋范线性空间, $\{x_\iota: \iota \in I\} \subset E, \{\lambda_\iota: \iota \in I\} \subset \mathbb{C}, \gamma$ 为某一正数, 那么, 为了存在一泛函 $f_1 \in E^*$, 使其满足条件

(i) $f_1(x_\iota) = \lambda_\iota (\forall\, \iota \in I)$, (ii) $\|f_1\| \leqslant \gamma$;

必须且只需: 对于任意 n 个 "下标" 集 $\{\iota_1, \iota_2, \cdots, \iota_n\} \subset I$ 及 n 个复数 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, 均成立关系式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_{\iota_k}\right| \leqslant \gamma \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_{\iota_k}\right\|.$$

证明 (1) "⇒": 这是明显的, 此可由假设条件 (i) 和 (ii) 直接导出

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_{\iota_k}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_1(x_{\iota_k})\right| = \left|f_1\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_{\iota_k}\Big)\right| \\ &\leqslant \|f_1\| \cdot \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_{\iota_k}\right\| \\ &\leqslant \gamma \cdot \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_{\iota_k}\right\|.\end{aligned}$$

(2) "⇐": 设 $\{x_\iota^\circ: \iota \in I_0\}$ 为 $\{x_\iota: \iota \in I\}$ 内的极大线性无关组, 并设其张成的线性子空间为 E_0, 则显然可知: $\{x_\iota: \iota \in I\} \subset E_0$. 并且, 对任意 $y \in E_0$, 由 y 必为集

$\{x_\iota^\circ\colon \iota\in I_0\}$ 中某有限个元的线性组合，而该集的任意有限个元均是线性无关的，因而 y 的表示法是唯一的. 如果在 E_0 上定义泛函

$$f_0(y)=f_0\Big(\sum_{k=1}^n \xi_k x_{\iota_k}^\circ\Big)=\sum_{k=1}^n \xi_k\lambda_{\iota_k},\quad \forall\, y=\sum_{k=1}^n \xi_k x_{\iota_k}^\circ\in E_0,$$

那么，f_0 显然是线性泛函；并且注意到定理的假设条件还知，f_0 是 E_0 上的连续线性泛函. 这样，直接利用 §3.1 连续线性泛函的保范延拓定理，就可导出满足定理所需的条件 (i) 和 (ii) 的连续线性泛函 f_1. □

注　作为定理 3 的应用，我们可以在 (理论上) 解决下面关于 Fourier 展开系数的问题：对任意给定的两数列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$，在什么条件下，能够保证存在一个 $[0,2\pi]$ 上的“有界可测”函数 $x(t)$，使得其相应 Fourier 系数为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos ntdt=\alpha_n;\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin ntdt=\beta_n\ (n=1,2,\cdots)?$$

此结论请读者完成.

作为上面定理在“实”空间的某种推广，我们给出下面的命题. 它是由 Mazur 和 Orlicz 得到的，我们下面用的是 Ptàk 的简单证明方法 (参看文献 [24]).

定理 4*(Mazur-Orlicz 定理)　设 E 为一“实”线性空间，$p(x)$ 为 E 上一个次加正齐性泛函，$\{x_\iota\colon \iota\in I\}$ 为 E 内某一元素集，$\{\mu_\iota\colon \iota\in I\}$ 为一相应的实数集. 那么，为了存在一个 E 上的线性泛函 f，使其满足条件：

(i) $f(x_\iota)\geqslant \mu_\iota,\ \ \forall\,\iota\in I$;　(ii) $f(x)\leqslant p(x),\ \ \forall\, x\in E$,

必须且只需：对于任意 n 个“下标”集 $\{\iota_1,\iota_2\cdots,\iota_n\}\subset I$ 及 n 个“非负”实数集 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，均成立关系式

$$\sum_{k=1}^n \xi_k\mu_{\iota_k}\leqslant p\Big(\sum_{k=1}^n \xi_k x_{\iota_k}\Big).$$

证明　定理的必要性是显然的. 下面证明定理的充分性.

首先，作一辅助函数 (Pták 证明的技巧就在于此)

$$p^*(x)=\inf\Big\{\Big[p\Big(x+\sum_{k=1}^n \xi_k x_{\iota_k}\Big)-\sum_{k=1}^n \xi_k\mu_{\iota_k}\Big]\colon\ \{\iota_1,\iota_2,\cdots,\iota_n\}\subset I,\xi_k\geqslant 0;\ 1\leqslant k\leqslant n; n\in\mathbb{N}\Big\},\ \ \forall\, x\in E.$$

下面证明 $p^*(x)$ 具有以下三个性质：

1) $p^*(x)$ 在 E 上不取 $-\infty$. 事实上, 由定理后面的假设条件及 $p(x)$ 的次加性可以得到: 对任意 $\{\iota_1,\iota_2,\cdots,\iota_n\}\subset I,\xi_k\geqslant 0,1\leqslant k\leqslant n(n\in\mathbb{N})$, 均有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu_{\iota_k}&\leqslant p\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_{\iota_k}\Big)\\&\leqslant p\Big(x+\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_{\iota_k}-x\Big)\\&\leqslant p\Big(x+\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_{\iota_k}\Big)+p(-x),\quad\forall x\in E;\end{aligned}$$

由此即得到

$$-p(-x)\leqslant p\Big(x+\sum_{k=1}^{n}\xi_k x\iota_k\Big)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu_{\iota_k},\quad\forall x\in E.$$

注意到 $p^*(x)$ 的定义, 从上则可导出

$$p^*(x)\geqslant -p(-x)>-\infty,\quad\forall x\in E.$$

2) $p^*(x)$ 是次加泛函. 只要注意到 $p^*(x)$ 的定义以及 $p(x)$ 的次加性假设便可导出. 因对任意 $\{\iota_1,\iota_2,\cdots,\iota_n\}\subset I,\eta_k\geqslant 0;\{\iota_1',\iota_2',\cdots,\iota_n'\}\subset I,\eta_k'\geqslant 0;1\leqslant k\leqslant n(n\in\mathbb{N})$, 均有

$$\begin{aligned}p^*(x+x')&\leqslant p\Big(x+x'+\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_{\iota_k}+\sum_{k=1}^{n}\xi_k' x_{\iota_k'}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu_{\iota_k}-\sum_{k=1}^{n}\xi_k'\mu_{\iota_k'}\\&\leqslant\Big[p\Big(x+\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_{\iota_k}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu_{\iota_k}\Big]+\Big[p\Big(x+\sum_{k=1}^{n}\xi_k' x_{\iota_k'}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k'\mu_{\iota_k'}\Big],\forall x,x'\in E.\end{aligned}$$

由此可导出

$$p^*(x+x')\leqslant p^*(x)+p^*(x'),\quad\forall x,x'\in E.$$

3) $p^*(x)$ 是正齐性泛函, 这是明显的.

其次, 当 $p^*(x)\equiv 0(\forall x\in E)$ 时, 原所设的实数集 $\{\mu_\iota\colon\iota\in I\}$ 必均为 "非正数". 事实上, 如果反设 $\mu_{\iota_0}>0$, 则由定理的假设可知

$$\begin{aligned}&p\Big(x_{\iota_0}+\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_{\iota_k}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu_{\iota_k}\geqslant\Big(\mu_{\iota_0}+\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu_{\iota_k}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu_{\iota_k}\\&=\mu_{\iota_0}>0,\quad\forall\{\iota_1,\iota_2,\cdots,\iota_n\}\subset I,\quad\xi_k\geqslant 0(1\leqslant k\leqslant n(n\in\mathbb{N})).\end{aligned}$$

因而由 $p^*(x)$ 的定义则可导出: $p^*(x_{\iota_0})>\mu_{\iota_0}>0$, 与 $p^*(x)$ 为零泛函矛盾. 于是, 由泛函 $p^*(x)$ 的定义可以得出 (当在该定义中取系数 $\xi_k=0(1\leqslant k\leqslant n(n\in\mathbb{N}))$

$$p(x)\geqslant p^*(x)=0,\quad\forall x\in E.$$

故此时只要取 $f=0$ (零泛函) 就可满足定理的条件 (i) 和 (ii), 从而充分性在 $p^*(x)\equiv 0(\forall x\in E)$ 的条件下得证.

最后, 如果上面条件不成立, 则知存在 $x_0\in E$, 使得 $p^*(x_0)\neq 0$. 这时我们在 E 的子空间 $E_0=\{\alpha x_0:\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ 上定义一个线性泛函

$$f_0(x)=f_0(\alpha x_0)=\alpha p^*(x_0),\quad \forall x=\alpha x_0\in E_0,$$

显而易见, $f_0(x)\leqslant p^*(x)(\forall x\in E_0)$. 故由 Hahn-Banach 定理, 可得到 f_0 在 E 上的保控延拓线性泛函 $f(x)$, 即有

$$f(x)\leqslant p^*(x)\leqslant p(x),\quad \forall x\in E.$$

由此则可得到

$$f(-x_\iota)\leqslant p^*(-x_\iota)\leqslant p(-x_\iota+x_\iota)-\mu_\iota=-\mu_\iota,$$

也即导出

$$f(x_\iota)\geqslant \mu_\iota,\quad \forall \iota\in I.$$

从而在所有情形下, 充分性得证. □

另外的问题是讨论未知数是空间“元素”的无穷维线性方程组的对偶问题. 一般来说当空间不是自反空间时, 解是不存在的. 这方面最好的结果由 Helly 给出, 故称为 Helly 定理. 由于讨论空间的自反性特征时需用到它, 故我们已在前面介绍过了 (见 §3.6 定理 2 前的引理).

3.7.3 Banach 极限

在本节的最后, 我们先举一个 Hahn-Banach 定理应用的简单例子, 即关于“广义极限”的概念. 为此先给出“定向集”与“泛极限”的定义.

定义 一个有序集 A 称为**定向的**, 是指对任意 $\alpha,\beta\in A$, 存在 $\gamma\in A$, 使得 $\alpha\prec\gamma$, 及 $\beta\prec\gamma$ 均成立. 设 $\{x_\alpha\}$ 是定义在定向集 A 上的实数集 (简称**实数广义定向列**), 我们称 x_0 为 $(x_\alpha)(\alpha\in A)$ 的“**泛极限**” (或**Moore-Smith 极限**), 是指对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\alpha_0\in A$, 使得当 $\alpha_0\prec\alpha$ 时, 有 $|x_\alpha-x_{\alpha_0}|<\varepsilon$. 记为 $\lim_{\alpha\in A}x_\alpha=x_0$.

注 显然, 上面的广义定向列是自然数集 $\mathbb{N}$ 的推广, 实数广义定向列 $(x_\alpha)(\alpha\in A)$ 是通常实数列 $\{x_n\}$ 的推广.

例 3 在求 $[a,b]$ 上可积函数 $f(t)$ 的 Riemann 积分时, $[a,b]$ 区间上的所有“分法”的全体, 组成一个“广义定向列”; 而对应于分法的“积分和”, 则为实数广义定向列; 其“泛极限”即为此可积函数的 (R) 积分 $\int_a^b f(t)dt$.

下面给出关于“广义极限”存在性的一个定理:

定理 5 (Banach 定理) 假设 $\{(x_\alpha)\}$ 是"有界"实数广义定向列的全体所组成的集合, 则当它们之间的加法与数乘运算定义为

$$x+y=(x_\alpha+y_\beta),\quad \lambda x=(\lambda x_\alpha)$$

(其中, $x=(x_\alpha), y=(y_\alpha), \lambda\in\mathbb{R}$) 时, 它们构成一个实线性空间 E. 而且必存在一个定义在 E 上的线性泛函

$$f(x)\overset{\Delta}{=}\underset{\alpha\in A}{LIM}\, x_\alpha,\quad \forall\, x=(x_\alpha)\in E,$$

使其满足

$$\varliminf_{\alpha\in A} x_\alpha\leqslant f(x)\leqslant\varlimsup_{\alpha\in A} x_\alpha,\quad \forall x=(x_\alpha)\in E$$

(其中: 下极限、上极限分别定义为

$$\varliminf_{\alpha\in A} x_\alpha=\sup_\alpha\inf_{\alpha\prec\beta} x_\beta,\quad \varlimsup_{\alpha\in A} x_\alpha=\inf_\alpha\sup_{\alpha\prec\beta} x_\beta).$$

显然, 如果泛极限 $\lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ 存在, 则必有 $\underset{\alpha\in A}{LIM}\, x_\alpha=\lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$.

证明 首先, 上述空间 E 是一实线性空间是明显的. 其次, 在 E 上定义泛函

$$p(x)=\varlimsup_{\alpha\in A} x_\alpha(=\lim_\alpha\sup_{\alpha\prec\beta} x_\alpha),\qquad \forall x=(x_\alpha)\in E.$$

容易验证, $p(x)$ 是 E 上的"正齐性次加"泛函, 并且如果对于 E 的线性子空间 E_0: $E_0=\{\lambda x_0\colon \lambda\in\mathbb{N}, x_0=(\xi_0)\}$(其中: ξ_0 为某一给"定常数", 即 $x_0=(x_\alpha^0), x_\alpha^0\equiv\xi_0, (\forall\,\alpha\in A)$), 在其上定义一个线性泛函 f_0:

$$f_0(x)=\lim_{\alpha\in A} x_\alpha,\quad \forall\, x=(x_\alpha)\in E_0.$$

显然可以看出: $f_0(x)\leqslant p(x)(\forall\, x\in E_0)$. 从而由 Hahn-Banach 定理可知, 必存在 E 上的一线性泛函 $f(x)\overset{\Delta}{=}LIM_{\alpha\in A}x_\alpha$, 使其满足

$$f(x)\leqslant p(x)\quad \forall\, x=(x_\alpha)\in E.$$

注意到上、下极限的关系, 由上式便可得到

$$-p(-x)=-\varlimsup_{\alpha\in A}(-x_\alpha)=\varliminf_{\alpha\in A} x_\alpha,\quad \forall\, x=(x_\alpha)\in E.$$

根据 $f(x)$ 的线性及上两式, 可导出

$$f(x)\geqslant -p(-x)=\varliminf_{\alpha\in A} x_\alpha,\quad \forall\, x=(x_\alpha)\in E.$$

□

注　由定理 5 显然可知“$\underset{\alpha\in A}{LIM}\, x_\alpha$”具有通常“极限”的一般运算法则 (和、差、数乘), 且当泛极限 $\lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ 不存在时, 它却仍是存在的. 基于这点, 我们把它称为**广义极限** 或称为**Banach 极限**. 这种极限在证明 Haar 测度的存在时是有用的 (参阅文献 [25] 中 Banach 写的一个附录).

§3.7 附录　凸分析初步

在 §1.1 中, 为了讲述赋范线性空间中元的范数的特性, 我们曾经引出过线性空间中的“线段”和“凸集”的概念. 那里曾经指出对任意 $x, y\in E$, 集 $\{\lambda x+(1-\lambda)y\colon 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$ 称为由 x 和 y 组成的**“线段”**, 记为 $[x,y]$. 类似地, 当上面的线段不含 x 元、不含 y 元或不含 x 与 y 元时, 则分别称为**半开线段** $(x,y]$ 和 $[x,y)$, 或**“开线段”** (x,y). 这时对于空间 E 中的一个集合 V, 如果对于任意两元 $x,y\in V$ 均有 $[x,y]\subset V$, 则称 V 为**“凸集”**.

下面介绍凸集的一些简单性质:

定理 1　设 E 为线性空间, 则对于 E 内的凸集有下面性质成立:

(i) 如果 V_1 和 V_2 为凸集, 则对于任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ 有

$$\alpha V_1+\beta V_2=\{\alpha x+\beta y\colon x\in V_1, y\in V_2\}$$

亦为凸集;

(ii) 如果 $V_i (i\in I)$ 为凸集, 则当 $\bigcap_{i\in I} V_i\neq\varnothing$ 时, 其也为凸集.

(iii) 对于任意子集 $M\subset E$, 必存在一个包含它的“最小凸集” (**凸包络**), 记为 $\mathrm{cov}.M$, 并有

$$\mathrm{cov}.M=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\colon \lambda_k^n\geqslant 0, x_k\in M\ (k=1,2,\cdots n);\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^n=1, n\in\mathbb{N}\right\}$$

及 $\mathrm{cov}.M=\bigcap_{i\in I} V_i$ (V_i为包含 M 的所有凸集,$i\in I$).

(iv) 为使 V 为凸集, 必须且只需有

$$(\alpha+\beta)V=\alpha V+\beta V\quad(\forall\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0).$$

此外, 在实线性空间中, 为使 V 含有原点 θ、且关于原点 θ “对称” (即: 对任意 $x\in V\Rightarrow -x\in V$) 必须且只需 $-V=V$.

在复线性空间中, 我们称凸集 V 是 (关于 θ) “对称的”, 是指满足

$$x\in V\Rightarrow\lambda x\in V,\quad\forall\,|\lambda|=1.$$

定理 2 设 E 为赋范线性空间, 则对于凸集 V 的任意一点 x 及其任意一内点 y°, 半开线段 $(x, y^\circ]$ 的点均为 V 的内点 (即有: $(x, y] \subset V^\circ$).

证明 对任意 $z^\circ \in (x, y^\circ)$, 由定义可知, 存在 $1 \geqslant \lambda_0 > 0$, 使得

$$z^\circ = \lambda_0 x + (1-\lambda_0) y^\circ.$$

由假设 $y^\circ \in V^\circ$, 故知存在 $\delta > 0$, 使得 E 中以 y° 为中心、以 δ 为半径的开球 $O(y^\circ, \delta) \subset V$ (参看图 3.10).

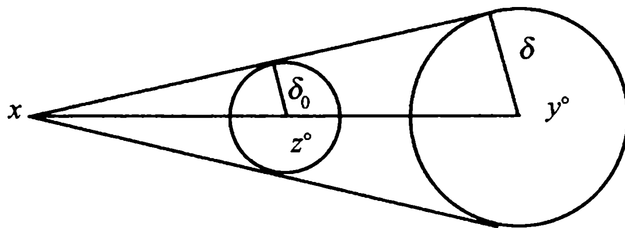


图 3.10

令 $\delta_0 = (1-\lambda_0)\delta$, 则对任意 $z' \in E$, 只要 $||z' - z^\circ|| < \delta_0$, 当取元

$$y' = z' + \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}(z' - x) \tag{3.7.3}$$

时, 由

$$\begin{aligned}
||y' - y^\circ|| &= \left|\left|z' + \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}(z'-x) - y^\circ\right|\right| \\
&= \frac{1}{1-\lambda_0}||(1-\lambda_0)z' + \lambda_0(z'-x) - (1-\lambda_0)y^\circ|| \\
&= \frac{1}{1-\lambda_0}||[(1-\lambda_0)z' + \lambda_0 z'] - [\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y^\circ]|| \\
&= \frac{1}{1-\lambda_0}||z' - z^\circ|| \\
&< \frac{\delta_0}{1-\lambda_0} = \delta,
\end{aligned}$$

知 $y' \in S(y^\circ, \delta) \subset V$. 而由前面式 (3.7.3) 中 y' 的取法, 则可将 z' 解出来, 即 $z' = \lambda_0 x + (1-\lambda_0)y'$. 并从定理假设 $x \in V$ 及 $y' \in V$ 的结果, 注意到 V 是凸集, 便导出 $z' \in V$. 最后, 注意到 z' 的任意性, 我们立即得到开球 $O(z^\circ, \delta_0) \subset V$, 也即 $z^\circ \in V^\circ$. □

注 1 上面定理的证明方法是根据几何直观的启发而得的. 由于这种"思路"在第四章中讲述"共鸣定理"时也用到, 所以提醒读者特别注意.

由上面定理 2, 我们不难直接导出下面的两个推理:

推理 1 如果 V 为赋范线性空间中的一个有内点的凸集, 那么 V 的"开核"(V 的内点的全体)V° 也必为凸集, 并且 V° 的"闭包"有关系式: $\overline{V^\circ} = \overline{V}$.

推理 2　如果 G 为赋范线性空间中的一个开集, 那么 G 的"凸包" $\text{cov}.G$ 亦为开集.

注 2　推理 1 的后一个命题是非常有用的, 它指出对于有内点的凸集 V 而言, 其内点的闭包即为 V 的闭包, 从而可知 V 的"边界点"均为其内点的极限点.

定理 3　设 V_1 和 V_2 为赋范线性空间具有内点的两个凸集, 则当 $V_2\bigcap V_1^\circ=\varnothing$ 时, 也必须有 $V_1\bigcap V_2^\circ=\varnothing$ (此即说明, 两个凸集如果一个不含有另一个的内点, 则它们仅可能在"边界点"相交).

证明　事实上, 如果 $V_1\bigcap V_2^\circ\neq\varnothing$, 那么当设 $x_2^\circ\in V_1\bigcap V_2^\circ$ 时, 由于 x_2° 为 V_2 的内点, 故知必有开球 $O(x_2^\circ,\delta_0)\subset V_2$ (参见图 3.11). 此外, 又由 $x_2^\circ\in V_1$ 且 $V_1^\circ\neq\varnothing$, 当取一元 $x_1^\circ\in V_1^\circ$ 时, 由假设 $V_2\bigcap V_1^\circ=\varnothing$, 知 $x_1^\circ\notin O(x_2^\circ,\delta_0)$, 并且由定理 2 可知, 半开线段 $(x_2^\circ,x_1^\circ]\subset V_1^\circ$. 特别地, 注意 $\|x_1^\circ-x_2^\circ\|\geqslant\delta_0$, 当取元

$$y_1^\circ=\left(1-\frac{\delta_0}{2\|x_1^\circ-x_2^\circ\|}\right)x_2^\circ+\frac{\delta_0}{2\|x_1^\circ-x_2^\circ\|}x_1^\circ$$

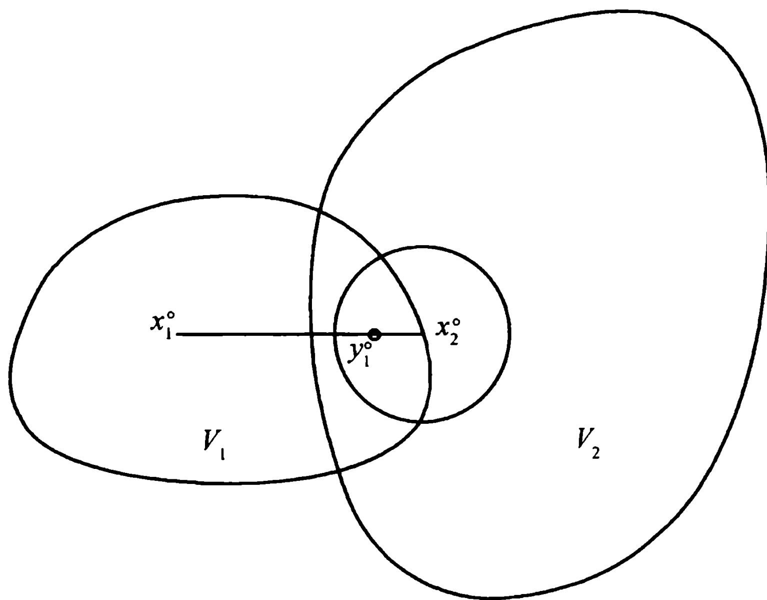


图 3.11

时, 可知 $y_1^\circ\in(x_2^\circ,x_1^\circ]\subset V_2$. 另一方面, 由

$$\|y_1^\circ-x_2^\circ\|=\left\|\frac{\delta_0}{2\|x_1^\circ-x_2^\circ\|}(x_1^\circ-x_2^\circ)\right\|=\frac{\delta_0}{2}$$

又可导出 $y_1^\circ\in O(x_2,\delta_0)\subset V_2$, 从而 $y_1^\circ\in V_2\bigcap V_1^\circ$, 与定理原假设矛盾. □

定理 4　如果 V_1 和 V_2 为赋范线性空间的两个凸集, 并且 $V_2^\circ\neq\varnothing, V_1\bigcap V_2^\circ=\varnothing$, 那么 (凸) 集 $V=V_2-V_1$ 必有 $V^\circ\neq\varnothing$ 及 $\theta\notin V^\circ$.

证明　首先由定理 1 可知, V 显然是一个凸集.

又由开集的性质可知, 当元 $x_2^\circ\in V_2^\circ$ 时, 对任意 $x_1\in V_1$, 元 $x_2^\circ-x_1$ 也必为 (凸)

集 $V_2 - x_1$ 的内点 (即邻域的"平移", 参见图 3.12). 于是由 $V_2^\circ \neq \varnothing$ 的假设, 显然可知 $V^\circ \neq \varnothing$.

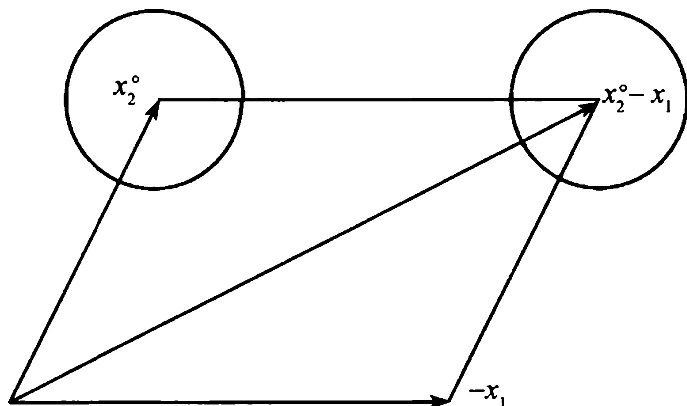


图 3.12

下面证明零元 $\theta \notin V^\circ$. 事实上, 如果 $\theta \in V^\circ$, 则知存在 $\delta_0 > 0$, 使得"原心球" $B(\theta, \delta_0) \subset V$. 此外, 由 $\theta \in V = V_2 - V_1$ 可知: 必存在一元 $\overline{x}$, 使得 $\overline{x} \in V_1, \overline{x} \in V_2$. 这样, 注意到假设 $V_2^\circ \neq \varnothing$, 由定理 2 的推理 1 则可导出: 对 V_2 的元 $\overline{x}$ 必存在 $y_2^\circ \in V_2^\circ$, 使得 $\|y_2^\circ - \overline{x}\| < \delta_0$, 从而导出 $\overline{x} - y_2^\circ \in B(\theta, \delta) \subset V$. 根据 V 的假设, 由以上的讨论知, 存在元 $y_1 \in V_1, y_2 \in V_2$, 使得 $\overline{x} - y_2^\circ = y_2 - y_1$, 即有 $\frac{\overline{x}+y_1}{2} = \frac{y_2^\circ+y_2}{2}$. 最后由 V_1 和 V_2 的凸性的假设及上面的定理 2, 还可以导出

$$\frac{\overline{x} + y_1}{2} \in V_1, \ \frac{y_2 + y_2^\circ}{2} \in V_2^\circ.$$

将上面的两式综合起来则可得到 $V_1 \bigcap V_2^\circ \neq \varnothing$, 这显然与定理假设矛盾. □

注 在上面定理的证明中. 我们不难得到下面的结论: 对于两个凸集 V_1 和 V_2 (至少有一个含有内点) 而言, 为使凸集 $V_2 - V_1$ 以 θ 点为内点, 必须且只需存在 V_1 和 V_2 这样的公共元, 使其为 V_1 或者 V_2 的一个内点.

下面讨论凸泛函. 上节已经介绍过在线性空间上凸泛函的定义, 类似地, 可以在 E 内的一个凸集 V 上定义凸泛函. 更一般地, 我们在 V 上定义一个较广义的"次凸泛函".

定义 在线性空间 E 内凸集 V 上的泛函 $c(x)$ 称为**次凸 (中点凸)**的, 是指

$$c\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}[c(x) + c(y)], \quad \forall x, y \in V.$$

有了上面的定义, 可以指出下面的引理:

引理 1 设 $c(x)$ 为线性空间 E 内凸集 V 上的次凸泛函, 则对于任意 n 个正有理数 $r_1, r_2, \cdots, r_n$, 只要 $\sum_{k=1}^n r_k = 1$, 则有

$$c\Big(\sum_{k=1}^n r_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^n r_k c(x_k), \quad \forall x_1, x_2, \cdots x_n \in V.$$

证明 下面分四步证明:

(1) 从次凸泛函的定义不难看出

$$\begin{aligned}c\Big(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2^2}\Big)&=c\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}\Big)\Big]\\&\leqslant\frac{1}{2}\Big[c\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)+c\Big(\frac{x_3+x_4}{2}\Big)\Big]\\&\leqslant\frac{1}{2^2}[c(x_1)+c(x_2)+c(x_3)+c(x_4)],\quad\forall\, x_1,x_2,x_3,x_4\in V.\end{aligned}$$

因而由归纳法不难推出：对任意 n (自然数), 均有

$$c\Big(\sum_{k=1}^{2^n}\frac{x_k}{2^n}\Big)\leqslant\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}c(x_k),\quad\forall\, x_1,x_2,\cdots x_{2^n}\in V.$$

(2) 当已知 $c(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n})\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c(x_k)$ 时, 有

$$c\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{n-1}\Big)\leqslant\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}c(x_k),\ (n=2,3,\cdots).$$

事实上, 由已知条件可以导出, 对任意自然数 $n\geqslant 2$, 当令 $x_n=(\sum_{k=1}^{n-1}x_k/(n-1))$ 时, 均有

$$\begin{aligned}c(x_n)&=c\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{n-1}\Big)\\&=c\Big[n\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{n-1}\Big)/n\Big]\\&=c\Big[\frac{\sum_{k=1}^{n-1}x_k+(\sum_{k=1}^{n-1}x_k/(n-1))}{n}\Big]\\&=c\Big[\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)\Big]\\&\leqslant\frac{1}{n}\Big[\sum_{k=1}^{n-1}c(x_k)+c(x_n)\Big]\quad(\text{由假设结论对 } n \text{ 项时成立}),\end{aligned}$$

移项则得

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big)c(x_n)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}c(x_k),$$

从而导出

$$c\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{n-1}\Big)\leqslant\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}c(x_k).$$

(3) 综合 (1) 和 (2) 可看出, 对任意的自然数 n 均有

$$c\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\Big)\leqslant\frac{1}{n}[c(x_1)+c(x_2)+\cdots+c(x_n)].$$

(4) 对任意 n 个正有理数 $r_1,r_2,\cdots r_n$ 当 $\sum_{k=1}^n r_k=1$ 时, r_k 可表示为 $r_k=\frac{m_k}{m}$, 其中 $m,m_1,m_2,\cdots,m_n$ 为非负整数, 使得 $\sum_{k=1}^n m_k=m$. 这样由 (3) 立即可以导出

$$\begin{aligned}c\Big(\sum_{k=1}^n r_kx_k\Big)&=c(\overbrace{x_1+\cdots+x_1}^{m_1}+\overbrace{x_2+\cdots+x_2}^{m_2}+\cdots+\overbrace{x_n+\cdots+x_n}^{m_n})\\&\leqslant\frac{1}{m}[m_1c(x_1)+m_2c(x_2)+\cdots+m_nc(x_n)]\\&=\sum_{k=1}^n r_kc(x_k).\end{aligned}$$

□

注 当 $c(x)$ 在 V 上连续时, 次凸泛函即为凸泛函.

事实上, 由引理 1 的结论可知, 当 $c(x)$ 连续时则可导出: 对于任意 n 个正实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 只要 $\sum_{k=1}^n\lambda_k=1$, 则有

$$c\Big(\sum_{k=1}^n\lambda_kx_k\Big)\leqslant\sum_{k=1}^n\lambda_kc(x_k),\quad\forall x_1,x_2,\cdots x_n\in V.$$

为了给出有关次凸泛函的连续性的定理, 我们还需给出下面的引理:

引理 2 设 $c(x)$ 为赋范线性空间 E 内 (具有内点的) 凸集 V 上定义的次凸泛函, 那么, 只要 $c(x)$ 在 V 内的一个闭球 $B(x_0,\delta_0)$ 上 (数值) 有上界, 则 $c(x)$ 在 V 的任意内点之某一闭球也 (数值) 有上界.

证明 假设次凸泛函 $c(x)$ 在 V 内的某一闭球 $B(x_0,\delta_0)$ 上 (数值) 有上界, 且不妨设其一上界为 ρ_0. 则对任意 $x_1\in V^\circ$, 由 x_1 是 V 的内点, 故可找到一自然数 n_0, 使得元 $x_2=x_1+\frac{x_1-x_0}{n_0}\in V$ (注意 $\frac{x_1-x_0}{n}\to\theta$, $n\to\infty$), 因此可得 $x_1=\frac{1}{n_0+1}x_0+\frac{n_0}{n_0+1}x_2$(参看图 3.13).

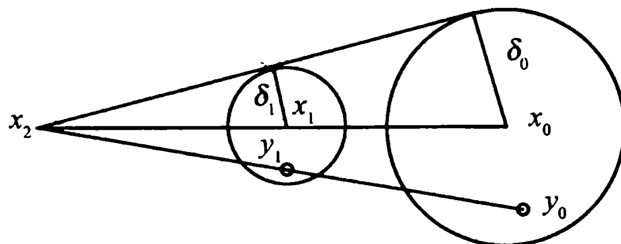


图 3.13

于是当取正数 $\delta_1 = \frac{\delta_0}{n_0+1}$ 时, 对于闭球 $B(x_1, \delta_1)$ 上任一点 y_1, 取元 $y_0 = x_2 + (n_0+1)(y_1 - x_2)$, 由于

$$\begin{aligned} \|y_0 - x_0\| &= \|[x_2 + (n_0+1)(y_1 - x_2)] - x_0\| \\ &= (n_0+1)\left\|y_1 - x_2 + \frac{x_2 - x_0}{n_0+1}\right\| \\ &= (n_0+1)\left\|y_1 - \left(\frac{1}{n_0+1}x_0 + \frac{n_0}{n_0+1}x_2\right)\right\| \\ &= (n_0+1)\|y_1 - x_1\| \\ &\leqslant (n_0+1)\delta_1 = \delta_0, \end{aligned}$$

因而可知 $y_0 \in B(x_0, \delta_0)$, 这样我们由 y_0 的取法解出 y_1 有

$$y_1 = \frac{1}{n_0+1}y_0 + \frac{n_0}{n_0+1}x_0.$$

利用引理 1 的结论, 并注意 $c(x)$ 在 $B(x_0, \delta_0)$ 上数值有上界 ρ_0 的假设, 则可得到

$$\begin{aligned} c(y_1) &= c\left(\frac{1}{n_0+1}y_0 + \frac{n_0}{n_0+1}x_2\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n_0+1}c(y_0) + \frac{n_0}{n_0+1}c(x_2) \\ &< \frac{1}{n_0+1}\rho_0 + \frac{n_0}{n_0+1}c(x_2) \\ &< |\rho_0| + |c(x_2)|. \end{aligned}$$

最后, 注意到 y_1 在 $B(x_1, \delta_1)$ 上的任意取法, 也即导出泛函 $c(x)$ 在 x_1 的闭球 $B(x_1, \delta_1)$ 是数值有上界的. □

有了上面的两个引理, 我们可导出如下关于次凸泛函的一个命题:

定理 5　*设 $c(x)$ 是定义在赋范线性空间 E 内 (具有内点的) 凸集 V 上的次凸泛函, 那么, 只要 $c(x)$ 在 V 内的某一闭球 $B(x_0, \delta_0)$ 是数值有上界的, 则 $c(x)$ 必在 V 的开核 V° 上连续.*

证明　对任意 $x_1 \in V^\circ$, 首先由引理 2 可知, 必存在 V 中的一球 $B(x_1, \delta_1)$, 使得泛函 $c(x)$ 在其上是数值有上界的. 不妨设其一上界为 β_1. 其次, 对任意 $x \in E, \|x\| < \frac{\delta_1}{2}$, 取两个自然数 $m, n(n > m)$, 使得 $x_1 \pm nx \in B(x_1, \delta_1)$ (参见图 3.14). 于是由引理 1 以及 $c(x)$ 的次凸性可导出

$$\begin{aligned} c(x_1 + mx) &= c\left(\frac{m}{n}(x_1 + nx) + \frac{n-m}{n}x_1\right) \\ &\leqslant \frac{m}{n}c(x_1 + nx) + \frac{n-m}{n}c(x_1), \end{aligned}$$

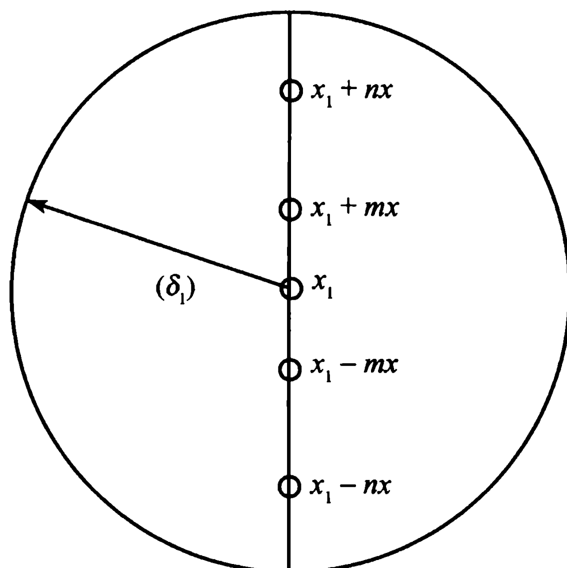


图 3.14

因此有

$$\frac{c(x_1+mx)-c(x_1)}{m}\leqslant\frac{c(x_1+nx)-c(x_1)}{n}. \tag{3.7.4}$$

同样地, 由 $c(x)$ 的次凸性又可导出关系式

$$\begin{aligned}c(x_1)&=c\left[\frac{(x_1+mx)+(x_1-mx)}{2}\right]\\&\leqslant\frac{1}{2}[c(x_1+mx)+c(x_1-mx)],\end{aligned}$$

即

$$c(x_1)-c(x_1-mx)\leqslant c(x_1+mx)-c(x_1). \tag{3.7.5}$$

注意到在式 (3.7.4) 中, 当换 x 为 $-x$ 时仍是成立的, 即有

$$c(x_1-mx)-c(x_1)\leqslant\frac{m}{n}[c(x_1-nx)-c(x_1)],$$

也即

$$\frac{c(x_1)-c(x_1-nx)}{n}\leqslant\frac{c(x_1)-c(x_1-mx)}{m}. \tag{3.7.6}$$

结合式 (3.7.4)~(3.7.6), 我们可导出

$$\frac{c(x_1)-c(x_1-nx)}{n}\leqslant\frac{c(x_1+mx)-c(x_1)}{m}\leqslant\frac{c(x_1+nx)-c(x_1)}{n}.$$

特别地, 令 $m=1$, 并注意到 $c(x)$ 在 $B(x_1,\delta_1)$ 数值有上界 β_1, 由上式便可得到

$$\frac{c(x_1)-\beta_1}{n}\leqslant c(x_1+x)-c(x_1)\leqslant\frac{\beta_1-c(x_1)}{n}.$$

根据 n 的取法, 当 $x\to\theta$ 时有 $n\to\infty$, 因而由上式直接可知, 当 $x\to\theta$ 时, 有 $c(x_1+x)-c(x_1)\to 0$. 也即 $c(x)$ 在 x_1 点是连续的. □

注 1 由定理 5 可知, 如果次凸泛函 $c(x)$ 在 E 的某一内点不连续, 那么 $c(x)$ 必在 E 的任意闭球 $B(x,\delta)$ 上均数值无上界.

由定理 5 不难直接导出下面的推理:

推理 设 V 为赋范线性空间中具有内点的有界闭凸集, $c(x)$ 为 V 上定义的 "凸泛函", 那么, 只要 $c(x)$ 在 V 的 "边界" $V\setminus V^\circ$ 上数值有上界, 则 $c(x)$ 必在 V 的开核 V° 上连续.

证明 事实上, 我们不难证明凸集 V 的闭包 $\overline{V}$ 也是凸集. 此外, 由 V 的有界性可知对任意 $x\in V$ 均存在 V 的 "边界点" y_1 和 y_2, 使得 $x=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2$, 其中 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. 这样, 由 $c(x)$ 在 V 上的凸性可知

$$c(x)=c(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\leqslant\lambda c(y_1)+(1-\lambda)c(y_2).$$

注意到 $c(x)$ 在 V 的边界是数值有上界的, 当设其一上界为 β_0 时, 由上式可导出 $c(x)\leqslant\lambda\beta_0+(1-\lambda)\beta_0=\beta_0$, 即 $c(x)$ 在 V 上也是数值有上界 β_0 的, 因而直接可从定理 5 得出本推理的结论. □

注 2 由上面的推理, 特别可以得到: 如果 $c(x)$ 为实轴内凸集 V 上定义的一个凸函数 (按 $c(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda c(x)+(1-\lambda)c(y)$ 定义), 则其在 V 的任意内点均是连续的.

事实上, 因为对于实轴上的任意一个内点而言, 它的 "球域" 是 "区间" 而 "边界" 为两个端点, 因而其 "边界值" 永远是有上界的.

下面将介绍一个由凸集构成的次加、正齐性泛函 (通常称为 Minkowski 泛函) 的性质.

定理 6 设 V 为实赋范线性空间 E 内的一个 (有内点的) 凸集, 且有 $\theta\in V^\circ$, 则当在 E 上定义泛函 $p(x)$ 为

$$p(x)=\inf\left\{\mu\colon\ \mu>0,\frac{x}{\mu}\in V\right\}$$

时, $p(x)$ 必为 E 上的次加、正齐性连续泛函, 并且有性质

$$\overline{V}=\{x\colon\ p(x)\leqslant 1,x\in E\},\quad V^\circ=\{x\colon\ p(x)<1,x\in E\}.$$

证明 下面逐条验证所需结论:

(1) $p(x)$ 是次加的. 事实上, 对任意 $x,y\in E$, $\varepsilon>0$, 由泛函 $p(x)$ 的定义可知, 存在 $\alpha,\beta>0$, 使得

$$\frac{x}{a}\in V,\quad \alpha-\frac{\varepsilon}{2}<p(x),$$

及

$$\frac{y}{\beta}\in V,\quad \beta-\frac{\varepsilon}{2}<p(y).$$

但由 V 是凸集, 故对数 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\in(0,1)$ 有

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\Big(\frac{y}{\beta}\Big)\in V.$$

于是当注意到泛函 $p(x)$ 的定义以及上面的两个不等式, 便可得到

$$\begin{aligned}p(x+y)&\leqslant\alpha+\beta\\&<\Big(p(x)+\frac{\varepsilon}{2}\Big)+\Big(p(y)+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\\&=p(x)+p(y)+\varepsilon;\quad\forall x,y\in E,\quad\forall\varepsilon>0.\end{aligned}$$

因而当令 $\varepsilon\to0$ 时, 则可导出

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),\quad\forall x,y\in E.$$

(2) $p(x)$ 是正齐性的. 首先当 $\lambda=0$ 时, 易见 $p(\theta)=0$. 而当 $\lambda>0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}p(\lambda x)&=\inf\Big\{\mu\colon\ \mu>0,\frac{\lambda x}{\mu}\in V\Big\}\\&=\inf\Big\{\lambda\Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)\colon\ \Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)>0,\frac{x}{\mu/\lambda}\in V\Big\}\\&=\lambda\inf\Big\{\mu'\colon\ \mu'>0,\frac{x}{\mu'}\in V\Big\}\\&=\lambda p(x),\quad\forall x\in E.\end{aligned}$$

(3) $p(x)$ 是连续的. 首先, 由 $\theta\in V^\circ$ 可以导出 $p(x)$ 是 (强) 有界泛函. 事实上, 由 $\theta\in V^\circ$ 可知: 存在一闭球 $B(\theta,\delta)\subset V$, 注意到当元 $x\in V$ 时, 即 $\frac{x}{1}\in V$, 故由 $p(x)$ 的定义可知必有 $p(x)\leqslant1$. 这样对任意 $x\in E$, 由于 $\frac{\delta x}{\|x\|}\in B(\theta,\delta)$ 及上面 (2) 的结果, 便可得到 $\frac{\delta}{\|x\|}p(x)=p(\frac{\delta x}{\|x\|})\leqslant1$, 也即导出 $p(x)\leqslant\frac{\|x\|}{\delta}$ $(\forall x\in E)$ 从而 $p(x)$ 是强有界的. 其次, 注意到 $p(x)$ 的次加性, 由其强有界性便可导出下面的关系:

$$p(x)-p(x_0)\leqslant p(x-x_0)\leqslant\frac{\|x-x_0\|}{\delta},\quad\forall x,x_0\in E,$$
$$p(x_0)-p(x)\leqslant p(x_0-x)\leqslant\frac{\|x-x_0\|}{\delta},\quad\forall x,x_0\in E.$$

也即 $|p(x)-p(x_0)|\leqslant\frac{1}{\delta}\|x-x_0\|(\forall x,x_0\in E)$, 从而直接导出泛函 $p(x)$ 在 E 上是连续的.

(4) $\overline{V}=\{x\colon p(x)\leqslant1,x\in E\}$. 首先证明 $\overline{V}\subset\{x\colon p(x)\leqslant1,x\in E\}$. 由上面 (3) 的证明已知, 对任意 $x\in V$ 均有 $p(x)\leqslant1$. 对任意 $y\in\overline{V}\setminus V$, 则存在 $\{x_n\}\subset V$, 使得 $x_n\to y(n\to\infty)$. 利用上面 (3) 的结果, 直接就可得出

$$p(y)=\lim_{n\to\infty}p(x_n)\leqslant1.$$

其次证明 $\{x\colon p(x)\leqslant 1, x\in E\}\subset\overline{V}$. 事实上, 如果有元 $y\notin\overline{V}$, 那么, 必存在 y 的球域 $B(y,\delta)$, 使得 $B(y,\delta)\bigcap\overline{V}=\varnothing$. 由元 $v=y-\delta\frac{y}{\|y\|}$ (注意 $y\notin\overline{V}$ 故知 $y\neq\theta$) 满足 $\|v-y\|=\|\delta\frac{y}{\|y\|}\|=\delta$, 即知 $v\in B(y,\delta)$, 从而得到 $v\notin\overline{V}$(如图 3.15 所示), 也即有

$$y\Big/\frac{\|y\|}{\|y\|-\delta}=\left(1-\frac{\delta}{\|y\|}\right)y=v\notin V.$$

如果 $p(v)<1$, 根据 $p(v)$ 的定义, 存在 $0<\mu<1$, 使得 $\frac{x}{\mu}\in V$. 再由 V 的凸性知 $v\in\left[\theta,\frac{v}{\mu}\right]\subset V$, 矛盾! 故 $p(v)\geqslant 1$. 由 $p(\cdot)$ 的正齐性知 $p(y)\geqslant\frac{\|y\|}{\|y\|-\delta}>1$. 此即证得 $\{x\colon p(x)\leqslant 1, x\in E\}\subset\overline{V}$. 综合上述结果, 即导出 (4) 的结论.

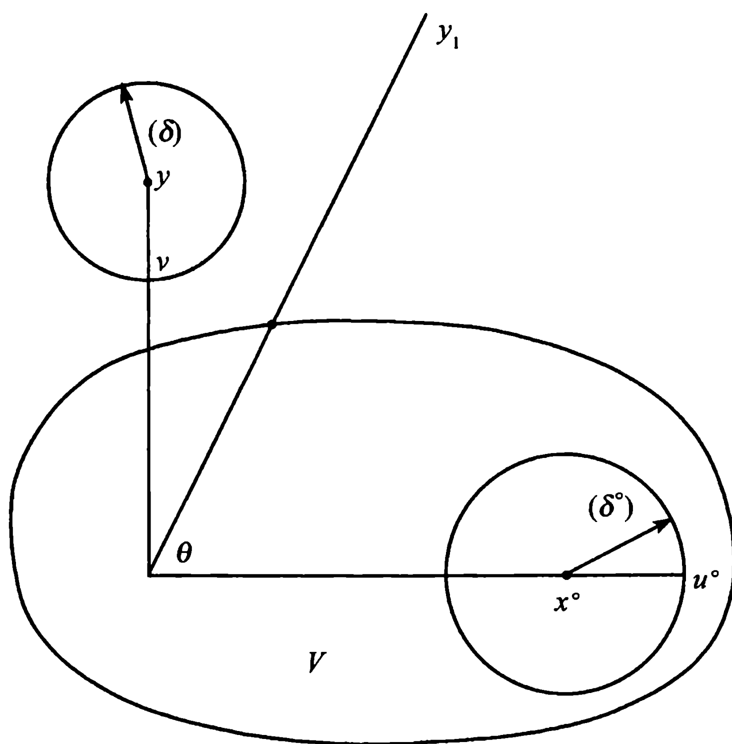


图 3.15

(5) $V^\circ=\{x\colon p(x)<1, x\in E\}$. 首先证明 $V^\circ\subset\{x\colon p(x)<1, x\in E\}$. 当 $x^\circ=\theta$ 时, 显然从上面 (2) 可知: $p(\theta)=0<1$ 成立. 若 $x^\circ\neq\theta$ 且 $x^\circ\in V^\circ$, 必有一闭球 $B(x^\circ,\delta_0)\subset V$. 这样, 对于元 $u^\circ=x^\circ+\delta_0\frac{x^\circ}{\|x^\circ\|}$ 而言, 由于 $\|u^\circ-x^\circ\|=\|\delta_0\frac{x^\circ}{\|x^\circ\|}\|=\delta_0$, 故知 $u^\circ\in B(x^\circ,\delta_0)\subset V$, 也即有 $x_0/\frac{\|x^\circ\|}{\|x^\circ\|+\delta_0}=u^\circ\in V$(如图 3.15 所示). 故注意到 $p(x)$ 的定义则可导出

$$p(x^\circ)\leqslant\frac{\|x^\circ\|}{\|x^\circ\|+\delta_0}<1.$$

其次证明 $\{x\colon p(x)<1, x\in E\}\subset V^\circ$. 由 (4) 中证明可知, 如果存在元 $x'\in E$, 使得 $p(x')<1$, 则必有 $x'\in V$. 由 (3) 的结论 (即 $p(x)$ 的连续性) 可知, 必有 x' 的球 $B(x',\delta')$, 使得 $p(x)<1$ $(\forall x\in B(x',\delta'))$. 同样由 (4) 中证明可知, $B(x',\delta')\subset V$, 也即 $x'\in V^\circ$. 综合以上论述, 即导出了 (5) 的结论. □

从上面定理的证明, 启发我们引出两个以后需要用到的结论:

推理 1 设 E 为一赋范线性空间, 则对于 E 上的"次加"泛函而言, 由其"强有界性"可以导出其连续性. 对于 E 上"正齐性"泛函而言, 由其在"原点" θ 的连续性可以导出其强有界性.

证明 (1) 设 $p(x)$ 在 E 上是"强有界"泛函 (§2.1 定义 2), 即有 $|p(x)| \leqslant \beta\|x\|$ $(\forall x \in E)$, 其中 β 为一固定正数, 则用上面定理 6 中证明 (3) 的方法, 我们不难由 $p(x)$ 的次加性及以上条件导出其连续性.

(2) 设正齐性泛函 $p(x)$ 在 E 上 θ 点是连续的, 则对正数 1 而言, 必存在 E 内的闭球 $B(\theta, \delta)$, 使得 $|p(x)| < 1$ $(\forall x \in B(\theta, \delta))$ (注意 $p(\theta) = 0$). 由上面定理 6 证明 (3) 的方法, 我们不难由 $p(x)$ 的正齐性及上面的结果导出 $p(x)$ 在 E 上的强有界性. □

推理 2 设 $p(x)$ 为赋范线性空间 E 上定义的"次加、正齐性"泛函, 则为使 $p(x)$ 在 E 上是强有界的, 必须且只需 $p(x)$ 在 E 中某一点 x_0 是连续的.

证明 定理的必要性显然可由推理 1 直接得出. 下面证明其充分性. 事实上, 如果 $p(x)$ 在 x_0 点是连续的, 注意到 $p(x)$ 必在 E 中的某一闭球是数值有上界的. 此外由假设可知 $p(x)$ 亦是凸泛函, 因此直接利用定理 5 便可得到 $p(x)$ 在 E 上是连续的. 最后, 再由上面的推理 1 便可导出本命题的结论. □

注 对于上面 E 上的次加泛函, 由于

$$p(x) - p(x_0) \leqslant p(x - x_0),$$
$$p(x_0) - p(x) \leqslant p(x_0 - x), \quad \forall\, x, x_0, \in E,$$

因此, 当 $\limsup\limits_{x \to \theta} p(x) = 0$ 时, $p(x)$ 必为 E 上的连续泛函. 故当 $p(x)$ 还具有正齐性时, 此条件也是 $p(x)$ 强有界的充要条件.

关于次加性泛函的结果及凸性泛函的其他结果可见文献 [26, 27].

习 题 三

3.1 试证明: 定义在线性空间 E 的一个线性子空间 E_0 上的线性泛函 $f_0(x)$ 必可线性延拓于全空间 E.

3.2 设 E 为一赋范线性空间, E_0 为 E 的任意闭线性子空间, T_0 为由 E_0 到"任意"赋范线性空间 E_1 内的任意连续线性算子. 试证明: 为使 T_0 均可"保范延拓"于 E, 必须且只需存在由 E 到 E_0 上的"投影算子" P (即 $P^2 = P, \|P\| = 1$).

3.3 利用 $E \subset E^{**}$, 试证明: 为使 Banach 空间 E 是自反的必须且只需 E^* 是自反的.

3.4 已知 $E \subset E^{**}$, 试证明: 如果 Banach 空间 E 不是自反的, 则空间 E, $E^{**}, \cdots, E^{(2n)*}, \cdots$, 同样的 $E^*, E^{***}, \cdots, E^{(2n-1)*}, \cdots$, 均为在"典则映射"下不等价的空间 (这里 E^{n*} 表示 E 取 n 次共轭后所成的空间).

3.5 设 E 为赋范线性空间, E_0 为其一线性子空间, 并设元 $x_0 \in E_0$, 试证明:

1) 对任意的 $f \in E^*$, 如果令 E_0 上的泛函 f_0 为

$$f_0(x) = f(x), \quad \forall x \in E_0,$$

则必有 $f_0 \in E_0^*$.

2) 如果又设 $\widetilde{x}_0 \in E_0^{**}$, 且有

$$\widetilde{x}_0(f_0) = f(x_0), \quad \forall f \in E^*$$

(其中 f_0 定义同 1)), 那么, 必有 $\widetilde{x}_0(g_0) = g_0(x_0)(\forall g_0 \in E_0^*)$.

3.6 设 x_0 为赋范线性空间 E 中的任意元, α_0 为一正数. 试证明: 存在 $f_1 \in E^*$, 使得

$$||f_1|| = \alpha_0, \quad f_1(x_0) = ||f_1|| \cdot ||x_0||.$$

3.7 试证明: 赋范线性空间中弱收敛元列的极限是唯一确定的.

3.8 试证明: 为使仿射平面 $M_0 = E_0 + x_0$ 是闭集, 必须且只需 E_0 是 E 的闭线性子空间 (E 为任意赋准范空间).

3.9 试证明: 如果线性赋范空间 E 中有一线段 $[x_1, x_2] \subset S_1$(E 内的单位原心球面 $S_1 \triangleq \{x: ||x|| = 1, x \in E\}$), 则必有

$$||\alpha x_1 + \beta x_2|| \geqslant |\alpha + \beta|, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3.10 设 E 为一实线性空间, x_0 为 E 内任意给定点, $c(x)$ 为 E 上定义的泛函. 试证明:

1) 如果 $c(x)$ 是次凸泛函, 那么, 对任意 $y \in E$ 单边部分极限

$$\lim_{r \to 0+} \frac{c(x_0 + ry) - c(x_0)}{r}$$

(其中 r 为有理数) 必存在.

2) 如果 $c(x)$ 是凸泛函, 那么对任意 $y \in E$, 单边极限

$$\lim_{\lambda \to 0+} \frac{c(x_0 + \lambda y) - c(x_0)}{\lambda}$$

必存在 (通常记为 $dc(x_0, y)$, 称为**单边 Gateaux 微分**).

3.11 设 V 是赋范线性空间内的一个有界闭凸集, 并设 $d = \sup_{y_1, y_2 \in V} ||y_1 - y_2||$, 则对任意 $x_0 \in V^\circ$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得对于 V 的任意经过 x_0 的两边界点 y_1 和 y_2, 如果 $x_0 = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$, 则一致的有 $\lambda \geqslant \frac{\delta_0}{d}, (1-\lambda) \geqslant \frac{\delta_0}{d}$.

3.12 利用赋准范线性空间 E 上的连续线性泛函 f, 必使 $V = \{x: |f(x)| < 1, x \in E\}$ 映为一个含有 θ 点的开凸集的性质, 试证明: 在空间 $S[0,1]$ 上, 非零连续线性泛函是不存在的.

3.13 设 M 为实赋范线性空间 E 内的非空子集, 则 M 的闭凸包 $\overline{\text{cov}.M}$ 必为含 M 的所有闭的"半空间"的交 (也即应有

$$\overline{\text{cov}.M} = \bigcap_{f \in E^*} \{x: \ f(x) \leqslant \sup_{y \in M} f(y)\}).$$

3.14 首先，我们把 E^* 中的集 $\mathcal{F}$ 称为"正则闭"的是指：对任意 $f_1 \notin \mathcal{F}$ $(f_1 \in E^*)$，存在 $x_1 \in E$，使得

$$f(x_1)=\begin{cases}1, & \text{当 } f=f_1 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } f\in\mathcal{F} \text{ 时}.\end{cases}$$

试证明：

1) 如果 $\mathcal{F}(\subset E^*)$ 为正则闭的，则它也必为 E^* 中的闭集.

2) 如果设 M 为 E 中的任一子集，又 $\mathcal{F}_0=\{f\colon f(x)\equiv 0\,(\forall x\in M), f\in E^*\}$(后者常记为 $M^{\perp}$)，则 $\mathcal{F}_0$ 是正则闭的.

3.15 设 E 为自反空间，试证明：如果 $\mathcal{F}\subset E^*$ 是 E^* 中的一闭线性子空间，则它必为正则闭的.

3.16 试举一反例说明当习题 3.15 中的 $\mathcal{F}$ 不是"闭"的时，结论未必成立.

3.17 设 $x_0\in E, f_1\in E^*, \mathcal{F}(\subset E^*)$ 是正则闭的；且设集 $M_0=\{x\colon f(x)\equiv f(x_0), (\forall f\in \mathcal{F}), x\in E\}$(在 $\mathcal{F}$ 上与 x_0 "弱相等"之元的全体)，超平面 $H_1=\{x\colon f_1(x)=f_1(x_0), x\in E\}$ (在 f_1 上与 x_0 "弱相等"之元的全体). 试证明：如果有 $M_0\subset H_1$，则有 $f_1\in\mathcal{F}$.

3.18 回答 §3.7.2 的注中关于 Fourier 展开系数的问题.

3.19 试证明：对任意的元 $\widetilde{x}_0\in E^{**}$，泛函 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in E^*$ 及任意的正数 ε，必存在一元 $x_\varepsilon\in E$，使得其满足条件

$$||x_\varepsilon||\leqslant||\widetilde{x}_0||+\varepsilon$$

及

$$f_k(x_\varepsilon)=\widetilde{x}_0(f_k)\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

3.20 试证明：可分赋范线性空间的共轭空间必是"弱*"可分空间.

3.21 试证明：当 E 是自反空间时，其上任意泛函 $f\in E^*$ 均在 E 的单位原心闭球 B_1 上取到值 $||f||$.

3.22 试验证：空间 (c) 与 $C[a,b]$ 都不是一致凸的.

3.23 试证明：如果 E 为一致凸空间，ε 为任意给定正数 $(0<\varepsilon\leqslant 2)$，那么对于在 E 内的单位原心球面 S_1 上满足 $||x-y||\geqslant\varepsilon$ 的那些点 x 和 y，必有

$$\inf_{x,y}(2-||x+y||)\overset{\triangle}{=}2\delta(\varepsilon)>0$$

($\delta(\varepsilon)$ 称为"**凸性模**").

3.24 试证明：为使 E 是一致凸的，必须且只需：对任意 ε $(0<\varepsilon\leqslant 2)$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得只要"球面"S_1 上的元 x 和 y 满足条件 $||x-y||\geqslant\varepsilon$，就一致的有 $||x+y||\leqslant 2(1-\delta(\varepsilon))$.

3.25 试证明：为使 E 是一致凸的，必须且只需：对任意 $\varepsilon(0<\varepsilon\leqslant 2)$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得只要"球"B_1 中的元 x 和 y 满足条件 $||x-y||\geqslant\varepsilon$，就一致的有 $||x+y||\leqslant 2(1-\delta(\varepsilon))$ (提示：必存在一数 $\lambda\in[0,1)$，使得 $||x-\lambda y||=||y-\lambda y||$).

3.26 试证明：为了 E 是一致凸的，必须且只需：对任意 $\varepsilon_0>0$，有

$$\inf_{\substack{x,y\in B_1\\ ||x-y||\geqslant\varepsilon_0}}(2-||x+y||)>0.$$

3.27 设 E 为一致凸空间, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及 $\sum_{k=1}^n x_k$ 均为 E 内的非零元, 并设函数

$$\alpha[x,y] = \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|, \quad \forall x, y \in E$$

("向量" x 和 y 之间的 "广义角"). 试证明:

$$\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^n (1 - 2\delta(\alpha_k))\|x_k\|,$$

其中, $\alpha_k = \alpha[x_k, \sum_{k=1}^n x_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$; δ 即前所确定的 (空间的) 凸性模函数.

3.28 按下面的步骤证明: 空间 (ℓ^p) 和 $L^p[0,1]$ $(p > 1)$ 均是一致凸空间 (Clarkson 定理):

1) 对于复 "单位圆" 内的任一数 $\xi = \rho e^{i\varphi}(0 \leqslant \rho \leqslant 1)$, 当 $q > 2$ 时, 函数 $|1+\xi|^q + |1-\xi|^q$ 当 $\varphi = 0$ 时取到最大值.

2) 当 $1 < p < 2$ 时, 对于任意复数 η_1 和 η_2, 不等式

$$|\eta_1 + \eta_2|^q + |\eta_1 - \eta_2|^q \leqslant 2(|\eta_1|^p + |\eta_2|^p)^{q-1}$$

成立 (这里及以下均有: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

3) 当 $p \geqslant 2$ 时, 对于数 $\alpha, \beta \geqslant 0$, 以下不等式成立:

$$2(\alpha^q + \beta^q)^{p-1} \leqslant 2^{p-1}(\alpha^p + \beta^p).$$

4) 在 (ℓ^p) 及 $L^p[0,1]$ 空间中, 当 $p > 2$ 时, 以下不等式成立:

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leqslant 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p).$$

5) 当 $0 < s < 1$ 时, 对任意数 $\alpha_k, \beta_k \geqslant 0 (1 \leqslant k \leqslant n)$, 以下不等式成立:

$$\left[\sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k)^s\right]^{\frac{1}{s}} > \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^s\right)^{\frac{1}{s}} + \left(\sum_{k=1}^n \beta_k^s\right)^{\frac{1}{s}},$$

其中 $0 < s < 1$.

6) ** 在 (ℓ^p) 和 $L^p[0,1]$ 空间中, 当 $1 < p \leqslant 2$ 时, 关系式

$$\|x+y\|^q + \|x-y\|^q \leqslant 2(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1}$$

成立.

7) 由上面的 4) 和 6) 证明 (ℓ^p) 和 $L^p[0,1]$ 当 $p > 1$ 时是一致凸的.

第四章　开映像与闭图像定理

作为线性泛函分析三大原理之一的开映像与闭图像定理, 不仅仅在泛函分析的各个分支中起着重大的作用, 而且在微分方程和应用数学的一些分支中也有着极其广泛的应用, 例如它可以解决一般的算子方程的求解问题等.

§4.1　线性开算子与闭算子

为了更一般起见, 这里所讨论的算子均是赋准范空间中的算子.

定义 1　设 E 和 E_1 为赋准范空间, T 是从 E"内" 到 E_1(内) 的算子, 如果对于 E 中的任意原心球 B_δ, 存在 E_1 中的原心球 $B_\varepsilon^{(1)}$, 使得 $B_\varepsilon^{(1)} \subset T\,[B_\delta \cap \mathcal{D}(T)]$, 则称 T 为**开算子**.

下面介绍有关可加算子为开算子的等价命题:

命题 0　当 T 为可加算子时, T 为开算子的充要条件是: T 将 $\mathcal{D}(T)$ 中的开集映为 E_1 中的开集.

证明　事实上, 充分性是显然的. 只要注意到: 从 T 的可加性可知 $T(\theta) = \theta_1$ (其中 θ_1 是 E_1 中的零元), 以及赋准范空间中的原心开球 $O(\varepsilon) = \{x\colon \|x\|^* < \varepsilon\}$ ($\forall\, \varepsilon > 0$) 族, 构成零点的一个邻域基, 由此就可以导出充分性.

为证明必要性, 仅需证明 T 将任意开集的内点映为此集的"像集"中的一个内点即可. 今设 G 为 E 中的任一开集, 且有 $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ 是 $G \bigcap \mathcal{D}(T)$ 中的任意一个内点. 由于 x_0 为 G 的内点, 故必存在 $\alpha > 0$, 使得球 $O(x_0, \alpha) \subset G$. 这样, 对于原心开球 $O(\alpha)$ 而言, 由 T 为开算子的假设可知, 必存在 E_1 中的某一原心球 $O^{(1)}(\beta)$ ($\beta > 0$), 使得

$$T\,[O(\alpha) \cap \mathcal{D}(T)\,] \supset O^{(1)}(\beta).$$

由此, 对任意的 $y \in O^{(1)}(T(x_0), \beta)$, 由于 $\|y - T(x_0)\| < \beta$, 则有 $y - T(x_0) \in O^{(1)}(\beta)$. 故存在 $x \in O(\alpha) \cap \mathcal{D}(T)$, 使得 $T(x) = y - T(x_0)$, 即

$$y = T(x) + T(x_0) = T(x + x_0).$$

而由 $x + x_0 \in O(x_0, \alpha) \cap \mathcal{D}(T)$ 可知 $y \in T[O(x_0, \alpha) \cap \mathcal{D}(T)]$, 此即导出

$$O^{(1)}(T(x_0), \beta) \subset T[O(x_0, \alpha) \cap \mathcal{D}(T)] \subset T[G \cap \mathcal{D}(T)],$$

也即 $T(x_0)$ 为 $T(G \cap \mathcal{D}(T))$ 在空间 E_1 中的一个内点. □

注 1 当 T 为正齐性算子时, 若 T 为开算子, 则必为满算子.

事实上, 由 T 为开算子可知, 对于 E 中的原心球 B_δ, 必有 E_1 中的原心球 $B_\varepsilon^{(1)}$, 使得 $B_\varepsilon^{(1)} \subset T[B_\delta \cap \mathcal{D}(T)]$, 则对任意的 $y \in E_1$, 由 E_1 为赋准范空间可知: 必存在数 $\lambda > 0$, 使得 $y = \lambda y_1$, 其中 $y_1 \in B_\delta^{(1)}$, 从而存在 $x_1 \in B_\delta \cap \mathcal{D}(T)$, 使得 $y_1 = T(x_1)$. 最后, 由 T 的正齐性可知: $y = \lambda y_1 = \lambda T(x_1) = T(\lambda x_1)$, 且 $\lambda x_1 \in \mathcal{D}(T)$. 此即说明 T 为满算子.

注 2 当 T 为 "1-1" 对应的可加算子时, 若 T 为开算子, 则 T^{-1} 必为从 T 的值域 (所成的空间) $\mathcal{W}(T)$ 到其定义域 (所成的子空间) $\mathcal{D}(T)$ 上的连续算子.

事实上, 由 T 为 "1-1" 的, 故 T^{-1} 是存在的, 从而由命题 0 可知: T 将 $\mathcal{D}(T)$ 中的开集映为 $\mathcal{W}(T)$ 中的开集, 即 $\mathcal{W}(T)$ 中的开集在 T^{-1} 下的原像为 $\mathcal{D}(T)$ 中的开集, 从而由点集拓扑的知识可知 T^{-1} 是从 $\mathcal{W}(T)$ 到 $\mathcal{D}(T)$ 上的连续算子.

下面介绍几个关于开算子的例子:

例 1 设 E 为赋拟准范空间,E_0 为 E 的一个线性子空间. 从 E 到商空间 E/E_0 的商映像 π 即为一个线性开算子.

验证 首先, π 的线性是显然的. 其次, 对于 E 中的任一开集 G, 由于

$$\pi(G) = \{[x]: x \in G\} = G + E_0$$

(这里, $[x]$ 表示 x 对应的 "商元"). 从而由商拓扑的定义可知 $\pi(G)$ 亦为 E/E_0 的开集, 也即 π 是开算子. □

为了得到另外的一些开算子, 我们用命题的形式给出下面的三个例子:

命题 1 设 E 为赋拟准范空间, 则其上任意非零的线性泛函 f 均为 (从 E 到数域 $\mathbb{K}$ 上的) 线性开算子.

证明 由于 f 为 E 上的非零线性泛函, 故必存在一元 $x_0 \in E$, 使得 $f_1(x_0) \neq 0$. 特别地, 当令 $x_1 = \frac{x_0}{f_1(x_0)}$ 时, 有 $f_1(x_1) = 1$.

由此, 对于 E 中的任一开集 $G \neq \varnothing$, 任取一元 $y_0 \in G$, 由于 $G - y_0$ 为 E 中零点的一个 (开) 邻域, 从准范对数乘的连续性可知其必为 "吸收集" (即: 对上述任意元 x_1, 必存在数 $\delta > 0$, 使得当 $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leqslant \delta$ 时, 有 $\lambda x_1 \in G - y_0$). 这样, 由 $\lambda x_1 + y_0 \in G$ 以及 f 的线性性, 并注意到上段结果立即导出

$$f(y_0) + \lambda \in f(G), \quad \forall |\lambda| \leqslant \delta \ (\lambda \in \mathbb{K}),$$

从而 $f(y_0)$ 为 $f(G) \subset \mathbb{K}$ 的一个内点.

最后注意到 $y_0 \in G$ 的任意性, 从上也即得出 $f(G)$ 为 $\mathbb{K}$ 中的一个开集. 由此可知 f 为从 E 到 $\mathbb{K}$ 内的开映射. □

命题 1 可以推广成下面的命题:

命题 2 设 E 是赋拟准范空间, $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 为 E 上 n 个线性无关的线性泛函, 则算子

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)), \qquad \forall x \in E$$

必为从 E 到 $\mathbb{K}^n$ 的满线性开算子.

证明 首先, T 的线性性是显然的. 并且, T 必为从 E 到 $\mathbb{K}^n$ 的满算子. 事实上, 如果 T 的值域 $\mathcal{W}(T)$ 构成了 $\mathbb{K}^n$ 的一个 m 维 $(m < n)$ 子空间, 那么, 类似前面 §3.5 中引理的证法 2, 由线性代数的知识 (即：取 $\mathcal{W}(T)$ 在空间 $\mathbb{K}^n$ 中的"正交元" $y_0 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 从 y_0 与 $\mathcal{W}(T)$ 中所有的元的"内积"均为 0 可得)：必存在 n 个不同时为零的数 $\alpha_k\,(k = 1, 2, \cdots, n)$, 使得其均有

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k\Big)(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) = 0, \quad \forall x \in E,$$

从而导出

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = \theta.$$

这就与 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是线性无关的假设矛盾.

其次, 我们只需证明当 ε 为任意正数时, 对于 E 中的原心球 $B_\varepsilon \triangleq B(\theta, \varepsilon)$ 而言, $T(B_\varepsilon)$ 必包含 $\mathbb{K}^n$ 中的一个原心球. 事实上, 从 $T(E) = \mathbb{K}^n$ 可知, 我们能取出 E 中的 n 个非零元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使得其满足

$$T(x_k) = e_k \in \mathbb{K}^n \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

(其中：$e_k = (0, \cdots, 0, 1, \cdots, 0)$(第 k 个坐标为 1, 其余为 0 的元)). 由准范数之数乘的连续性则知, 存在数 $\delta > 0$, 当 $|\lambda_k| < \delta$ 时, 有 $\|\lambda_k x_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}(1 \leqslant k \leqslant n)$, 由于

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|\lambda_k x_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,$$

故知元 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in B_\varepsilon$, 从而可知

$$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T(x_k) = T\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \in T(B_\varepsilon).$$

此即说明 $T(B_\varepsilon)$ 包含 $\mathbb{K}^n$ 内以原点为中心, 以 $\frac{2\varepsilon}{n}$ 为长的"n 维 (开) 方体", 从而也必含有 n 维欧式空间 $\mathbb{K}^n$ 的一个原心球. □

更一般地, 我们可以得到下面的命题：

命题 3 设 E 为任意的赋拟准范空间, $E_{(n)}$ 为 n 维的赋准范空间. 如果从 E 到 $E_{(n)}$ 的线性算子 T 是满算子, 则其必为开算子.

证明 首先, 设 $E_{(n)}$ 的基为 $e_1, \cdots, e_n$, 并设 E 中的相应元 $x_1, \cdots, x_n$ 满足条件 $T(x_k) = e_k (1 \leqslant k \leqslant n)$. 然后令

$$X_0^{(n)} = \mathrm{span}\{x_k\colon 1 \leqslant k \leqslant n\} \ \ (\text{或记为: } [x_k\colon 1 \leqslant k \leqslant n]),$$

则 $X_0^{(n)}$ 为 E 的线性子空间, 且从 T 的线性性假设可知: 当令 T_0 为 T 在 $X_0^{(n)}$ 上的限制时, 显然 T_0 为 $X_0^{(n)}$ 到 $E_{(n)}$ 上的线性同构映像. 并当注意到 $E_{(n)}$ 是有限维赋准范空间时, 从 §2.1 最后的例 1 可知: T_0^{-1} 必为 $E_{(n)}$ 到 $X_0^{(n)}$ 上的连续线性算子.

其次, 为了证明 T 是开算子, 需要证明 T 将 E 中的任意开集 G 映为 $E_{(n)}$ 中的开集 $T(G)$, 即只要证明 T 将 G 中任一内点 x_1 映为 $T(G)$ 中的内点 $T(x_1)$. 为此, 我们作“平移”. 当令 $G_1 = G - x_1$ 时 (此时 G_1 显然亦为开集, 且含有 θ 点), 注意到 T 线性的假设, 只要证明: $E_{(n)}$ 中的原点 $T(\theta)$ 必为集合 $T(G_1)$ 的内点即可. 下面就来证明此结论.

事实上, 由点集拓扑的知识, 从前段所得 T_0^{-1} 的连续性立即导得: 在其作用下 $X_0^{(n)}$ 中的开集之原像必为 $E_{(n)}$ 中的开集, 即对于 $X_0^{(n)}$ 中的开集 $G_0 \triangleq G_1 \cap X_0^{(n)}$, 必可导出 $T_0(G_0)$ 是 $E_{(n)}$ 中的开集. 而当注意到 $\theta \in G_1$, 即 θ 为的 G_0 的内点, 故知 $T(\theta)$ 必为 $T_0(G_0)$ 的内点.

最后, 注意到关系式

$$T(G_1) = T(G_1 \cap X_0^{(n)}) = T(G_0) = T_0(G_0),$$

立刻导出: $T(\theta)$ 亦为 $T(G_1)$ 的内点. 由此本命题得证. □

定义 2 设 E 和 E_1 均为赋准范空间, $E \times E_1$ 为它们的积空间. 如果 T 为从 E 内到 E_1 的算子, 其定义域为 $\mathcal{D}(T) \subset E$, 值域为 $\mathcal{W}(T) \subset E_1$, 则称积空间 $E \times E_1$ 内的集

$$\begin{aligned} G(T) &= \{(x, y)\colon x \in \mathcal{D}(T), y = T(x) \in \mathcal{W}(T)\} \\ &= \{(x, T(x))\colon x \in \mathcal{D}(T)\} \end{aligned}$$

为算子 T 的**图像**. 而算子 T 称为是**闭**的, 是指其图像 $G(T)$ 是 $E \times E_1$ 内的闭集.

注 1 为了从 E 内到 E_1 的算子 T 是闭算子, 必须且只需其满足条件: 对任意 $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$, 只要 $x_n \to x\,(\in E)$ 及 $T(x_n) \to y(\in E)(n \to \infty)$, 则必有 $x \in \mathcal{D}(T)$ 和 $T(x) = y$.

事实上, 如果 $x_n \to x_0, T(x_n) \to y_0$, 即 $(x_n, T(x_n)) \to (x_0, y_0)$, 那么由 T 为闭算子知 $(x_0, y_0) \in G(T)$, 因此, 由 $G(T)$ 的定义可以得到 $x_0 \in \mathcal{D}(T), y_0 = Tx_0$.

另一方面, 对 $G(T)$ 中的任意收敛列 $\{(x_n, y_n)\}$, 当设其极限为 (x_0, y_0) 时. 则有 $x_n \to x_0, y_n \to y_0$. 又由于 $y_n = Tx_n$, 从而由假设条件可知 $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ 及 $y_0 = Tx_0$, 这样就得到了 $(x_0, y_0) = (x_0, Tx_0) \in G(T)$.

注 2 当上面的算子 T 是"1-1"对应时, 则有: T 为闭算子当且仅当 T^{-1} 为闭算子.

命题 4 设 E 和 E_1 均为赋准范空间, T 为从 E 内到 E_1(内) 的任意算子. 如果 $\mathcal{D}(T)$ 是闭的且 T 是连续的, 那么 T 必为闭算子.

证明 对任意的 $\{x_n\} \in \mathcal{D}(T)$, 如果 $x_n \to x_0\,(n \to \infty)$ 及 $T(x_n) \to y_0\,(n \to \infty)$, 则由假设可知 $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ 及 $T(x_n) \to T(x_0)\,(n \to \infty)$, 从而由极限的唯一性立即得到 $y_0 = T(x_0)$. 由此证得 T 为闭算子. □

注 3 在上面的命题中, 如果 $\mathcal{D}(T)$ 是不闭的, 即使 T 为线性算子且是强有界的 (从而也是连续的), 也未必能导出 T 为闭算子. 因为有以下反例:

反例 考虑 $C[a,b]$ 内的多项式全体 $P[a,b]$ 上定义的恒等算子 I.

命题 5 设 E 和 E_1 为赋准范空间且 E_1 是"完备"的, T 为从 E 内到 E_1 内的可加算子. 那么, 如果 T 是连续的且 T 为闭算子, 则有 $\mathcal{D}(T)$ 是闭的.

证明 对任意的 $\{x_n\} \in \mathcal{D}(T)$, 若有 $x_n \to x_0\,(n \to \infty)$, 则 $\|x_n - x_m\| \to 0\,(m, n \to \infty)$. 由于 T 是连续且可加的, 故有

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \to 0\ (n, m \to \infty).$$

因而从 E_1 的完备性可知, 必存在 $y_0 \in E_1$, 使得 $T(x_n) \to y_0(n \to \infty)$. 最后注意到 T 是闭算子, 立即可以得到 $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ (且有 $T(x_0) = y_0$). □

推理 若 E 和 E_1 为赋准范空间且 E 是"完备"的, T 为"1-1"对应的可加算子, 则当 T 和 T^{-1} 均连续时, 由 $\mathcal{D}(T)$ 是闭的可以得到 $\mathcal{W}(T)$ 是闭的.

证明 由命题 4 可知, 此时 T 为闭算子. 而由定义 2 后的注 2 还知 T^{-1} 亦为闭算子. 最后对于 T^{-1} 应用命题 5 则得结论. □

注 4 值得注意的是, 从上面的命题 4 和 5 我们自然会提出问题: 在什么样的条件下会有"由 $\mathcal{D}(T)$ 闭及 T 为闭算子, 可以推出 T 为连续算子"的结论成立呢? 要解决这个问题是不容易的, 这就是下一节将要讲的著名的闭图像定理. 特别应该指出的是: 即使对于一般的赋范空间, 其内所定义的线性闭算子也未必是连续的. 我们可以参看下面的反例:

反例 设 $T = \frac{d}{dt}$ (微分算子) 是从 $C[a,b]$ 中子空间 $C^1[a,b]$(即 $C[a,b]$ 中具有"连续导函数"的函数 $y(t)$ 的全体) 到 $C[a,b]$ 的算子, 则 T 必为从 $C[a,b]$ 内到 $C[a,b]$(内) 的闭而不连续的线性算子.

证明 T 的线性性是显然的. 下面先来验证 T 是闭算子. 设 $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T) =$

$C^1[a,b]$ 且有

$$x_n \to x_0, \quad T(x_n) = x_n'(t) \to y_0(t) \quad (n \to \infty).$$

由于空间 $C[a,b]$ 中元的范数收敛即是相应元 (函数) 的一致收敛, 故可得到

$$x_n(t) \xrightarrow{(一致)} x_0(t), \quad x_n'(t) \xrightarrow{(一致)} y_0(t).$$

从而由数学分析的知识我们可知, $x_0(t)$ 亦是具有连续导函数的, 并且有 $x_0'(t) = y_0(t)$ $(t \in [0,1])$. 此即导出 $x \in \mathcal{D}(T), T(x_0) = y_0$, 因而 T 是一个闭线性算子.

命题 6　设 T 为赋范空间 E 内到 E_1 的稠定线性算子 (即: $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$), 则 T 的共轭算子 T^* 必为从其定义域 $\mathcal{D}(T^*) \subset E_1^*$ 到 E^* 的闭线性算子.

证明　由 §2.3 可知, T^* 必为 $\mathcal{D}(T)$ 上的一任意确定的线性算子. 下面我们来证明 T^* 为闭算子. 事实上, 对任意的 $\{g_n\} \subset \mathcal{D}(T^*)\,(\subset E_1^*)$, 若有

$$g_n \to g_0 \in E_1^*, \quad T^*(g_n) = f_n \to f_0 \in E^* \quad (n \to \infty),$$

则直接从 T^* 的定义有

$$g_n[T(x)] = [T^*(g_n)](x) = f_n(x), \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(T).$$

因此, 从上面的假设, 当令 $n \to \infty$ 时便可得到

$$g_0[T(x)] = f_0(x), \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T),$$

也即导出: $g_0 \in \mathcal{D}(T^*)$ 且 $T^*(g_0) = f_0$, 从而 T^* 为闭算子. □

命题 7　设 E 和 E_1 均为赋范空间, T 为从 E 到 E_1 的线性算子. 如果对于任意元列 $\{x_n\} \subset E, g \in E_1^*$, 由 $x_n \to \theta\,(n \to \infty)$ 均可得到 $g[T(x_n)] \to 0\,(n \to \infty)$, 那么, T 必为闭算子.

证明　如果对于任意的元列 $\{x_n\} \subset E$, 存在 $x_0 \in E, y_0 \in E_1$, 使得

$$x_n \to x_0, \quad T(x_n) \to y_0 \quad (n \to \infty).$$

则从 $x_n - x_0 \to \theta\,(n \to \infty)$ 及命题假设, 对于任意 $g \in E_1^*$ 有

$$g[T(x_n)] - g[T(x_0)] = g[T(x_n - x_0)] \to 0 \quad (n \to \infty).$$

又由于 $g[T(x_n)] \to g(y_0)\,(n \to \infty)$, 从上式便立即得到

$$g[T(x_0)] = g(y_0), \quad \forall\, g \in E_1^*.$$

因而由 Hahn-Banach 定理的推理可知: $T(x_0) = y_0$, 故 T 为闭算子. □

§4.2 开映像定理与闭图像定理

为了讲述著名的开映像与闭图像定理, 我们首先回忆一下在 §1.9 中曾经讲过的有关赋准范空间中的疏集和第二纲集 (空间) 的定义. 这里特别要用到的是以下三点:

1) 如果 E 是完备的赋准范空间, 那么, 其必为第二纲集 (反之未必).

2) 如果 B 是赋准范空间 E 中的第二纲集, 则当 B 可以表为

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$$

时, 其中必有一个集 M_{n_0} 不是疏集.

3) 如果 M 是疏集, 则其闭包 $\overline{M}$ 不含内点; 即: 对 E 中任意球 $B(x,\delta)$, 其内必含一球 $B(x_1,\delta_1)$, 使得 $B(x_1,\delta_1)$ 内无 M 的点. 故当 M 不是疏集时, 必存在一球 $B(x_0,\delta_0)$, 使得

$$\overline{M}\supset B(x_0,\delta_0).$$

定理 1 (Banach 开映像定理) *设 T 是从完备的赋准范空间 E 内到第二纲赋准范空间 E_1 内的线性算子, 且满足*

(i) $\mathcal{W}(T)$ (T 的值域) 为第二纲的,

(ii) T 是闭算子,

则 T 必为开算子 (从而 T 是满的, 即 $\mathcal{W}(T)=E_1$).

证明 下面分三步来证明本定理:

(1) 由于线性算子 T 的值域 $\mathcal{W}(T)$ 是 E_1 中的第二纲集, 故对 E 中的任意原心球 $B(\varepsilon)\triangleq B(\theta,\varepsilon)$, 必存在 E_1 中的原心球 $B^{(1)}(\delta)\triangleq B^{(1)}(\theta,\delta)$, 使得

$$\overline{T[B(\varepsilon)\cap\mathcal{D}(T)]}\supset B^{(1)}(\delta).$$

事实上, 由假设 T 的值域 (注意 T 的齐性),

$$\mathcal{W}(T)=\bigcup_{n=1}^{\infty}T\Big[n\,B\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\cap\mathcal{D}(T)\Big]$$

为 E_1 中的第二纲集, 则必存在某集 $T[n_0\,B(\frac{\varepsilon}{2})\cap\mathcal{D}(T)]$ 不是疏集. 而由疏集的定义可知, 存在某球 $B^{(1)}(y_0,\delta_0)\subset E_1$, 使得

$$\overline{T\Big[n_0B\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\cap\mathcal{D}(T)\Big]}\supset B^{(1)}(y_0,\delta_0).$$

由 E_1 为赋准范空间, 关系式

$$B^{(1)}(y_0,\delta_0)\supset n_0\cdot B^{(1)}\Big(\frac{y_0}{n_0},\frac{\delta_0}{n_0}\Big)$$

成立 (事实上, 对任意的 $y\in B^{(1)}(\frac{y_0}{n_0},\frac{\delta_0}{n_0})$, 由准范数的三角不等式导出

$$\begin{aligned}\|n_0y-y_0\|&=\Big\|n_0\Big(y-\frac{y_0}{n_0}\Big)\Big\|\\&\leqslant n_0\cdot\Big\|y-\frac{y_0}{n_0}\Big\|\\&\leqslant n_0\,\frac{\delta_0}{n_0}=\delta_0,\end{aligned}$$

因而有 $n_0y\in B^{(1)}(y_0,\delta_0)$). 这样一来, 由 T 的线性又可得到

$$n_0\overline{T\Big[B\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\cap\mathcal{D}(T)\Big]}\supset n_0\,B^{(1)}\Big(\frac{y_0}{n_0},\frac{\delta_0}{n_0}\Big),$$

当记 $y_1=\frac{y_0}{n_0},\delta=\frac{\delta_0}{n_0}$ 时, 由上式导出

$$\overline{T\Big[B\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\cap\mathcal{D}(T)\Big]}\supset B^{(1)}(y_1,\delta).$$

最后, 由于对任意的 $y\in B^{(1)}(\delta)$, 有 $y_1+y\in B^{(1)}(y_1,\delta)$, 故从上式可知, 对任意的 $\sigma>0$, 存在 $x'\in B(\frac{\varepsilon}{2})\cap\mathcal{D}(T)$, 使得

$$\|T(x')-(y_1+y)\|\leqslant\frac{\sigma}{2};$$

另外, 又由 $y_1\in B^{(1)}(y_1,\delta)$, 类似上面可知, 存在 $x''\in B(\frac{\varepsilon}{2})\cap\mathcal{D}(T)$, 使得

$$\|T(x'')-y_1\|\leqslant\frac{\sigma}{2}.$$

于是, 注意到 $\mathcal{D}(T)$ 为 E 中的线性子空间, 故有 $x'-x''\in\mathcal{D}(T)$, 且有

$$\|x'-x''\|\leqslant\|x'\|+\|x''\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即导出

$$x'-x''\in B(\varepsilon)\cap\mathcal{D}(T).$$

由前两关系式还可得到

$$\begin{aligned}\|T(x'-x'')-y\|&=\|T(x')-T(x'')-y\|\\&\leqslant\|T(x')-(y_1+y)\|+\|T(x'')-y_1\|\\&\leqslant\frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2}=\sigma.\end{aligned}$$

至此, 我们得到了所需的关系式 $\overline{T[B(\varepsilon)\cap\mathcal{D}(T)]}\supset B^{(1)}(\delta)$.

(2) 在 (1) 的证明结果中, 当空间 E "完备" 时, 根据 T 的 "闭" 算子性质可将结论中的 "稠" 的关系加强为 "包含" 关系.

首先, 由 (1) 的结论可知, 对于正数列 $\{\varepsilon_k\}=\{\frac{\varepsilon}{2^k}\}$, 必有正数列 $\{\delta_k\}$ 与之对应, 使得一致地有

$$\overline{T[B(\varepsilon_k)\cap\mathcal{D}(T)]}\supset B^{(1)}(\delta_k),\quad \forall\, k\in\mathbb{N}; \tag{4.2.1}$$

并且不妨设 $\delta_k\searrow 0(\,k\to\infty)$. 下面将证明关系式:

$$T[\,B(\varepsilon)\cap\mathcal{D}(T)]\supset B^{(1)}(\delta_1).$$

事实上, 由式 (4.2.1) 可知集 $T[\,B(\varepsilon_1)\cap\mathcal{D}(T)]$ 是稠于球 $B^{(1)}(\delta_1)$ 的; 因此对上面的正数 δ_2, 存在 $x_1\in B(\varepsilon_1)\cap\mathcal{D}(T)$, 使得

$$\|y-T(x_1)\|\leqslant\delta_2.$$

同样, 由于这里的元 $y-T(x_1)\in B^{(1)}(\delta_2)$, 故由式 (4.2.1) 知集 $T[\,B(\varepsilon_2)\cap\mathcal{D}(T)]$ 是稠于球 $B^{(1)}(\delta_2)$ 的, 因而存在 $x_2\in B(\varepsilon_2)\cap\mathcal{D}(T)$, 使得

$$\|\,[y-T(x_1)]-T(x_2)\|\leqslant\delta_3.$$

一般地, 对于元

$$y-[T(x_1)+T(x_2)+\cdots+T(x_{n-1})]=y-\sum_{k=1}^{n-1}T(x_k)\in B^{(1)}(\delta_n),$$

由式 (4.2.1) 可知, 对上面的正数 δ_{n+1} 而言, 存在 $x_n\in B(\varepsilon_n)\cap\mathcal{D}(T)$, 使得

$$\Big\|\Big[y-\sum_{k=1}^{n-1}T(x_k)\Big]-T(x_n)\Big\|\leqslant\delta_{n+1}.$$

这样, 从 T 的线性以及 $\delta_n\searrow 0\,(n\to\infty)$ 的假设可以导出

$$T\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)\to y\quad(n\to\infty). \tag{4.2.2}$$

另一方面, 由 $\{x_k\}$ 的取法又可导出

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon,$$

因此, 从空间 E 的完备性可知 (参看 §1.9), 元 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 是收敛的, 即存在 $x \in E$, 使得

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \to x \quad (n \to \infty). \tag{4.2.3}$$

最后, 注意到 T 是闭算子的假设, 由式 (4.2.2) 及 (4.2.3) 则可导出

$$x \in \mathcal{D}(T), \quad T(x) = y.$$

同样由

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leqslant \varepsilon,$$

我们还知道 $x \in B(\varepsilon) \cap \mathcal{D}(T)$. 至此就得到了本段所需要的关系式.

(3) 由上面证明的 (2) 可以知道 T 是开算子. 同样, 由于得到 $B^{(1)}(\delta_1) \subset \mathcal{W}(T)$, 故由 T 的线性便可得到 $\mathcal{W}(T) = E_1$, 此即说明 T 是满的. □

下面讨论闭线性算子的连续性问题, 也就是著名的闭图像定理. 这里用定理 1 的"证明方法"给出结果 (注意: 不能直接用该结论导出这里的结果. 因为 T 的"逆算子" T^{-1} 仅在 T 为 "1-1" 对应时, 才有意义).

定理 2 (闭图像定理) *设 T 是从第二纲的赋准范空间 E 到完备的赋准范空间 E_1 内的线性算子, 则当 T 是闭算子时, 它必是连续线性算子.*

证明 首先用 $T^{-1}(M_1)\,(M_1 \subset E_1)$ 表示集 M_1 对于 T 的"原像".

与定理 1 的证明类似, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}\Big[n B^{(1)}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big) \cap \mathcal{W}(T)\Big],$$

从而由 E 是第二纲的假设知, 存在一足够大的正整数 n_0 及 E 中的某一闭球 $B(x_0, \delta_0)$, 使得

$$\overline{T^{-1}\Big[n_0 B^{(1)}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big) \cap \mathcal{W}(T)\Big]} \supset B(x_0, \delta_0).$$

同样由 E 的赋准范性以及线性算子原像的性质, 可以得到

$$\overline{T^{-1}\Big[B^{(1)}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big) \cap \mathcal{W}(T)\Big]} \supset B\Big(\frac{x_0}{n_0}, \frac{\delta_0}{n_0}\Big).$$

但 $\mathcal{W}(T)$ 为 E_1 中的线性子空间, 从上可知: 对任意 $x \in B(\frac{\delta_0}{n_0})$, 由于 $x + \frac{x_0}{n_0} \in B(\frac{x_0}{n_0}, \frac{\delta_0}{n_0})$ 以及 $\frac{x_0}{n_0} \in B(\frac{x_0}{n_0}, \frac{\delta_0}{n_0})$, 故可得到

$$x = \Big(x + \frac{x_0}{n_0}\Big) - \frac{x_0}{n_0} \in \overline{T^{-1}[B^{(1)}(\varepsilon) \cap \mathcal{W}(T)]},$$

即

$$\overline{T^{-1}[B^{(1)}(\varepsilon)\cap \mathcal{W}(T)]}\supset B\Big(\frac{\delta_0}{n_0}\Big).$$

其次, 也可由 T 是闭线性算子的假设以及空间 E_1 的完备性的假设导出：上面关于“稠”的关系式可以加强为包含关系式.

仍然与定理 1 的证明类似, 由上式可以导出, 对正数列 $\{\frac{\varepsilon}{2^k}\}$, 必存在正数列 $\{\delta_k\}, \delta_k\searrow 0\,(k\to\infty)$, 使得

$$\overline{T^{-1}[B^{(1)}(\varepsilon_k)\cap \mathcal{W}(T)]}\supset B(\delta_k)\quad (k=1,2,\cdots),$$

从而与定理 1 证明的 (2) 相类似, 由归纳法可导出：对任意的 $x\in B(\delta_1)(n\in\mathbb{N})$, 存在 $x_n\in T^{-1}[B^{(1)}(\varepsilon_k)\cap\mathcal{W}(T)]$, 使得

$$\Big\|\Big[x-\sum_{k=1}^{n-1}x_k\Big]-x_n\Big\|\leqslant\delta_{n+1},$$

因此得到

$$\sum_{k=1}^{n}x_k\to x\quad(n\to\infty).\tag{4.2.4}$$

另一方面, 由 $\{x_k\}$ 的取法还可知 $T(x_n)\in B^{(1)}(\varepsilon_k)$, 因而由

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|T(x_k)\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon$$

及空间 E_1 的完备性, 可知：存在 $y\in B^{(1)}(\varepsilon)\subset E_1$, 使得

$$T\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}T(x_k)\to y\quad(n\to\infty).\tag{4.2.5}$$

这样一来, 由式 (4.2.4) 和 (4.2.5) 以及 T 为闭线性算子的假设, 可得到 $y=T(x)$, 从而导出了关系式 $T[B(\delta_1)]\subset B^{(1)}(\varepsilon)$. 也即线性算子 T 在 E 的原点 θ 是连续的, 从而 T 在整个 E 上是连续的. □

注 运用闭图像定理, 回顾上面 §4.1 中后面的命题 6 和 7, 立即可以导出：在命题 6 中, 当 $\mathcal{D}(T^*)$ 是 E_1^* 内的“闭集”时, T^* 必为连续算子. 类似地, 在命题 7 中, 如果 E 是“第二纲”的且 E_1 是“完备”的赋范空间 (特别地, 当 E 和 E_1 均是 Banach空间) 时, 那里的 T 必为连续线性算子. 也即, 此时对于任意线性算子 T, 只要有：$x_n\to\theta\Rightarrow Tx_n\underset{(弱)}{\rightharpoonup}\theta\ (\forall\{x_n\}\subset E)$, 则 T 必为连续算子.

定理 3* 如果 E 和 E_1 均是完备的赋准范空间, 并且闭线性算子 T 定义在整个空间 E 上, 则此时开映像定理与闭图像定理是等价的.

证明 (1) (开映像定理 $\Longrightarrow$ 闭图像定理)：事实上，由 T 是闭线性算子的假设可知，图像 $G(T)$ 为乘积空间 $E \times E_1$(此时亦为完备的) 内的闭线性子空间，从而知其也构成一个完备的赋准范线性空间. 下面在 $G(T)$ 上定义一个算子 A：

$$A[(x, T(x))] = x, \quad \forall\, (x, T(x)) \in G(T).$$

显然可以看出：A 是从 $G(T)$ 到 E 上的 "1-1" 对应的线性算子 (从而 A 的逆算子 A^{-1} 存在). 并且由乘积空间的范数的定义可知：对任意的 $(x, T(x)) \in G(T)$,

$$\|A[(x, T(x))]\| = \|x\| \leqslant \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|.$$

由此导出 A 为定义在整个空间 $G(T)$ 上的连续线性算子，于是 A 也是一个闭线性算子. 又注意到 A 的值域 $\mathcal{W}(T) = E$ 是第二纲的 (因 E 是完备空间)，所以由定理 1(开映像定理) 可知 A 必为开算子. 这样，A^{-1} 就是一个连续线性算子.

此外，在 $G(T)$ 上定义的算子 B,

$$B[(x, T(x))] = T(x), \quad \forall\, (x, T(x)) \in G(T).$$

同样可以看出：B 也是一个从 $G(T)$ 到 E_1 内的有界线性算子，于是由明显的关系式 $T = B \circ A^{-1}$ 可导出：T 也是 E 上定义的连续线性算子，这样也就得到了闭图像定理.

(2) (闭图像定理 $\Longrightarrow$ 开映像定理)：首先，由 T 是闭线性算子的假设，由闭算子定义不难看出，E_1 中零元的原像 $T^{-1}(\{\theta\}) = N(T)$ 必为 (完备空间)E 中的一闭线性子空间. 从而商空间 E/N 也必为一完备的赋准范空间，于是，由 T 可得到定义在 E/N 上的线性算子 $\widetilde{T}$：

$$\widetilde{T}(\widetilde{x}) = T(x), \quad \forall\, \widetilde{x} \in E/N.$$

容易看出,$\widetilde{T}$ 是空间 E/N 到 $\mathcal{W}(T)$ 上的 "1-1" 对应的线性算子. 下面，我们来验证它是闭算子. 事实上，如果元列 $\{\widetilde{x}_n\} \subset E/N$ 满足条件

$$\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}, \quad \widetilde{T}(\widetilde{x}_n) \to y \in E_1 \quad (n \to \infty),$$

则由上面第一式及商空间准范数的定义，我们有

$$\|\,(x_n - x)\widetilde{}\,\| = \inf_{u_n \in (x_n - x)\widetilde{}} \|\,u_n\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

因此，存在一列元 $u_{n_k}^0 \in (x_{n_k} - x)\widetilde{}\ \ (k = 1, 2, \cdots)$，使得

$$\|u_{n_k}^0\| < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

于是, 可以得到一元列 $x_{n_k} \in \widetilde{x}_{n_k} \quad (k=1,2,\cdots)$ 及元 $x \in \widetilde{x}$, 使得

$$u^0_{n_k} = x_{n_k} - x \quad (k=1,2,\cdots).$$

这样便得到

$$x_{n_k} \to x \ \text{ 及 } T(x_{n_k}) = \widetilde{T}(\widetilde{x}_{n_k}) \to y \ \ (k \to \infty).$$

且由 T 的闭性, 便可得到 $T(x)=y$. 由此导出即

$$\widetilde{T}(\widetilde{x}) = T(x) = y,$$

故算子 $\widetilde{T}$ 亦是闭的线性算子, 因而其逆算子 $\widetilde{T}^{-1}$ 也是从 $\mathcal{W}(T)$ 到完备的赋准范线性空间 E/N 上的闭线性算子; 且由这时的假设 ($\mathcal{W}(T)$ 是第二纲的), 从闭图像定理, 便可导出 $\widetilde{T}^{-1}$ 是连续线性算子, 因此 $\widetilde{T}$ 是一个开算子.

最后, 由 $\widetilde{T}$ 的开算子性质导出 T 也是一个开算子. 事实上, 当用 π 表示从 E 到 E/N 的典则映像时, 易知 π 必为 E 上的开线性算子, 所以由于算子

$$T = \widetilde{T} \circ \pi$$

容易导出 T 也是 E 上的开算子. 此即得出了开映像定理. □

在本节的最后, 我们给出一个应用十分广泛的重要定理.

定理 4 (**Banach 逆算子定理**) *设 T 为从完备的赋准范空间 E 到第二纲的赋准范空间 E_1 上的 "$1-1$" 对应的连续线性满算子, 则 T^{-1} 一定是连续的.*

证明 由 T 的连续性及 T 是定义在整个 E 上的, 故知 T 是闭算子. 进而由开映像定理知 T 是开算子: 由 §4.1 定义 1 的注 2, 此即得到 T^{-1} 是连续的. □

§4.3 闭图像定理与开映像定理的应用

下面介绍两个有关闭图像定理的应用例子:

定理 1 (**Hörmander**)[16] *设 E, E_1 和 E_2 均为 Banach 空间; T_1 与 T_2 分别是从 E 内到 E_1 与 E_2(内) 的闭线性算子, 且有 $\mathcal{D}(T_1) \subset \mathcal{D}(T_2)$. 则必存在一个正常数 ρ, 使得*

$$\|T_2(x)\| \leqslant \rho(\|T_1(x)\| + \|x\|), \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T_1).$$

证明 首先, 由 T_1 为闭线性算子的假设可知, 其图像 $G(T_1)$ 必为乘积空间 $E \times E_1$ 内的一个闭集, 从而由假设及乘积空间的性质可知, $G(T_1)$ 亦为一个 Banach 空间.

其次, 作一个从空间 $G(T_1)$ 到 E_2(内) 的算子 A,

$$A[(x, T_1(x))] = T_2(x), \qquad \forall\, (x, T_1(x)) \in G(T_1).$$

由 T_1 和 T_2 是线性的, 显然可知 A 也是一个线性算子. 下面证明 A 是一个闭算子. 事实上, 如果存在元列 $\{(x_n, T_1(x_n))\} \subset G(T_1)$, 使得

$$(x_n, T_1(x_n)) \to (x, T_1(x)), \quad T_2(x_n) \to y \quad (n \to \infty),$$

则由假设 $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T_1) \subset \mathcal{D}(T_2)$, 并由乘积空间中元的范数定义可得

$$x_n \to x, \ \ T_2(x_n) \to y \quad (n \to \infty),$$

从而, 注意到算子 T_2 的闭性便可导出 $x \in \mathcal{D}(T_2)$ 及 $T_2(x) = y$, 即有

$$A[(x, T_1(x))] = T_2(x) = y.$$

此即证得 A 亦为一个闭线性算子.

最后, 由于 $\mathcal{D}(A) = G(T_1)$ 和 E_2 均是 Banach 空间, 因此根据闭图像定理便可导出: A 为从 $G(T_1)$ 到 E_2(内) 的连续线性算子, 故 A 是一个强有界线性算子. 于是根据空间 $G(T_1) \subset E \times E_1$ 内范数的定义便可直接得到本定理的结论. □

定理 2　*设 E 是自反的Banach空间, $x(t)$ 是从 $[0,1]$ 到 E(内) 的抽象函数 (即向量值函数). 如果对于任意的 $f \in E^*$, Lebesgue积分 $\int_0^1 f[x(t)]\,dt$ 均存在, 那么必存在元 $x_0 \in E$, 使得*

$$\int_0^1 f[x(t)]\,dt = f(x_0), \quad \forall\, f \in E^*.$$

证明　首先令

$$F(f) = \int_0^1 f[x(t)]\,dt, \qquad \forall\, f \in E^*.$$

由定理假设可知, F 是 E^* 上的一个线性泛函 (为证 F 是连续的, 下面我们构造一个线性算子, 并利用闭图像定理).

由假设定义一个由 E^* 到 $L^1[0,1]$ 空间 (内) 的线性算子 T:

$$T(f)(t) = f(x(t)) \ \ (t \in [0,1]), \ \ \forall f \in E^*.$$

T 显然是线性的, 下面验证它是闭算子. 事实上, 当设 $f_n \to f_0$ 和 $T(f_n) \to y$ 时, 显然有 $f_0 \in \mathcal{D}(T) = E^*$, 并且有

$$\begin{aligned} |T(f_n)(t) - T(f_0)(t)| &= |\, f_n[x(t)] - f_0[x(t)]| \\ &= |\,(f_n - f_0)[\,x(t)]\,| \\ &\leqslant \|\, f_n - f_0\| \,\|\, x(t)\| \\ &\to 0(n \to \infty), \quad \text{a.e. } \ t \in [0,1], \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

即

$$f_n[x(t)] \xrightarrow{\text{a.e.}} f_0[x(t)], \quad t \in [0,1]. \tag{4.3.2}$$

此外, 由假设条件

$$\|T(f_n) - y\|_{L^1} = \|f_n[x(t)] - y(t)\|_{L^1} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

因此由“实变函数论”的知识可知：存在 $\{f_n[x(t)]\}$ 的子列 $\{f_{n_k}[x(t)]\}$, 使得

$$f_{n_k}[x(t)] \to y(t) \ (n \to \infty), \quad \text{a.e. } t \in [0,1]. \tag{4.3.3}$$

从而由式 (4.3.2) 和 (4.3.3) 导出 $f_0[x(t)] \overset{\text{a.e.}}{=} y(t),\ t \in [0,1]$. 即：在空间 $L^1[0,1]$ 中有 $T(f_0) = y$, 此即证得 T 为在 (Banach 空间)E^* 上定义的闭线性算子. 进而由闭图像定理可知：T 必为连续线性算子.

最后, 回到最初在 E^* 上定义的泛函 F, 利用上面的结果可以得到

$$|F(f)| \leqslant \int_0^1 |f[x(t)]|\,dt = \|T(f)\| \leqslant \|T\| \cdot \|f\|, \quad \forall f \in E^*.$$

此即 F 是 E^* 上的强有界线性泛函, 也即有 $F \in E^{**}$. 而当注意到 E 的自反性, 则可唯一确定一元 $x_0 \in E$, 使得 $F(f) = f(x_0)(\forall f \in E^*)$, 由此导出

$$\int_0^1 f[x(t)]\,dt = f(x_0).$$

□

为了介绍下面的定理, 我们先给出一个定义.

定义 1 设 E 和 E_1 均为赋范空间. 我们称 E 到 E_1(内) 的线性算子 T 是**弱-弱连续**的, 是指对于任意的广义元列 $\{x_\lambda\} \subset E$, 有

$$x_\lambda \underset{(弱)}{\rightharpoonup} x_0 \quad \Longrightarrow \quad T(x_\lambda) \underset{(弱)}{\rightharpoonup} T(x_0).$$

即

$$f(x_\lambda) \to f(x_0) \quad (\forall f \in E^*) \Rightarrow g[T(x_\lambda)] \to g[T(x_0)] \ (\forall g \in E_1^*).$$

定理 3 设 E 与 E_1 均为Banach空间, 则 $T \in \mathcal{B}(E \to E_1)$ 的充要条件是 T 为弱 - 弱连续算子 (此即：若 T 为 E 到 E_1 的线性算子, 则 T 为 (强 - 强) 连续 $\Leftrightarrow$ T 为弱 - 弱连续).

证明 必要性：设 $T \in \mathcal{B}(E \to E_1)$. 对于任意广义元列 $\{x_\lambda\} \subset E$, 当 $x_\lambda \underset{(弱)}{\xrightarrow{w}} x_0$ 时, 即有

$$f(x_\lambda) \overset{(\lambda)}{\to} f(x_0), \qquad \forall f \in E^*.$$

注意到对于任意的 $g \in E_1^*$, 由 T 的假设必有 $T^*(g) \in E^*$, 故从上式立即得到

$$g[T(x_\lambda)] = [T^*(g)](x_\lambda) \overset{(\lambda)}{\to} [T^*(g)](x_0) = g[T(x_0)].$$

也即有 $T(x_\lambda) \underset{(弱)}{\rightharpoonup} T(x_0)$. 这样就知道了 T 是"弱 - 弱连续"算子.

充分性: 设 T 是"弱 - 弱连续"的线性算子, 下面将要证明 T 对于 E 和 E_1 的范数拓扑是连续的, 即有 $T \in \mathcal{B}(E \to E_1)$. 首先, 我们注意到, 由于 E 和 E_1 均是 Banach 空间, 故从闭图像定理可知, 只要验证 T(在范数拓扑下) 是闭算子就可以了. 下面我们就来验证这一事实:

假设 $\{x_n\} \subset E$, 满足条件

$$x_n \to x_0, \quad T(x_n) \to y_0 \quad (n \to \infty). \tag{4.3.4}$$

那么, 显然有

$$x_n \underset{(弱)}{\rightharpoonup} x_0, \quad T(x_n) \underset{(弱)}{\rightharpoonup} y_0 \quad (n \to \infty). \tag{4.3.5}$$

另一方面, 由 T 的假设, 从式 (4.3.5) 中第一式又可得到

$$T(x_n) \underset{(弱)}{\rightharpoonup} T(x_0) \quad (n \to \infty). \tag{4.3.6}$$

这样一来, 将式 (4.3.5) 中的第 2 式与式 (4.3.6) 结合, 并注意到 Hahn-Banach 定理的推理 (弱收敛的极限是唯一的), 立即得到 $T(x_0) = y_0$. 由此及式 (4.3.4) 我们导出了 T 在 (范数拓扑下) 为闭线性算子. □

注 *在上面的必要性中, E 和 E_1 的完备性都可以去掉.*

作为本节的最后, 再来介绍有关开映像定理的应用.

定理 4 *(无穷元一次联立方程组求解) *设 E 是某些"数列"所组成的Fréchet空间 (完备的赋准范空间), 其具有下列性质:*

(i) E 中元列均有关系: 按范收敛 $\Longrightarrow$ 坐标收敛;

(ii) 对任意的 $y = \{\eta_i\} \in E$, 无穷元一次联立方程组

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

均有唯一解 $x = \{\xi_k\}$.

那么, 必存在 E 上的一列连续线性泛函 $\{f_k\}$, 使得对任意 $y = \{\eta_i\} \in E$, 上面的方程组的解 $x = \{\xi_k\}$ 均可由此列泛函给出; 即有

$$\xi_k = f_k(y) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

证明 首先, 设 $E_1 = \{\{\xi_k\}$: $x = \{\xi_k\}$ 是上方程组对某一元 $y = \{\eta_i\} \in E$ 的解 $\}$, 则由于方程组是一次的, 因而可知 E_1 为一线性空间. 此外, 由那里的假设条件 (ii) 可知, 如果以方程组的对应关系作 E_1 上的一算子 T,

$$T(x) = y = \{\eta_i\}, \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in E_1,$$

则 T 为从 E_1 到 E 上的 "1-1" 对应的满线性算子.

其次, 我们在 E_1 上定义一准范数

$$\|x\|^* = \|x\|_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\|x\|_i}{1 + \|x\|_i}, \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in E_1$$

(其中

$$\|x\|_0 = \|T(x)\|_E, \quad \|\, x\|_i = \sup_{n \geqslant 1} \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_k \right|; \quad \forall\, i \in \mathbb{N}).$$

可以证明, 空间 E_1 中的元列按上面的准范数 $\|\cdot\|^*$ 亦有关系: 按准范收敛 $\Longrightarrow$ 坐标收敛; 并且 E_1 按该准范数还构成一个 Fréchet 空间.

然后, 由 E_1 中的准范数的假设条件, 容易看出

$$\|T(x)\|_E = \|x\|_0 \leqslant \|x\|^*, \qquad \forall\, x \in E_1.$$

故综合上面的结果可知, T 是由 Fréchet 空间 E_1 到 Fréchet 空间 E 上的 "1-1" 对应的连续线性算子. 这样, 由 Banach 逆算子定理则可导出, T 的逆算子 T^{-1} 必为从 E 到 E_1 上的连续线性算子, 且有

$$\{\xi_k\} = x = T^{-1}(y), \qquad \forall\, y = \{\eta_i\} \in E.$$

最后, 令

$$\xi_k = f_k(y), \qquad \forall\, y \in E \quad (\forall\, k \in \mathbb{N}).$$

由 T^{-1} 是线性的, 显然可以得到 $f_k\,(k = 1, 2, \cdots)$ 的线性. 而由 T^{-1} 的连续性又知: 在空间 E 中如果 $y \to y_0$, 那么在空间 E_1 中 (按准范数 $\|\cdot\|^*$) 必有

$$x = T^{-1}(y) \to T^{-1}(y_0) = x_0. \quad \text{按准范收敛}$$

而由准范数 $\|\cdot\|^*$ 的性质便可导出, 当设 $x = \{\xi_k\}, x_0 = \{\xi_k^{(0)}\}$ 时, 由上式便可得到

$$\xi_k \to \xi_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \cdots). \ (\text{坐标收敛})$$

即: 当 $y \to y_0$ 时, 必有

$$f_k(y) \to f_k(y_0) \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

从而证得上面所定义的 $\{f_k\}$ 均为定义在 E 上的一列连续线性泛函. □

定理 5 设 E 为一Banach空间, 则非零元列 $\{e_n\}$ 构成 E 的一个 (Schauder) 基的充分必要条件是

(i) $\mathrm{span}\{e_n\}$(即 $[\{e_n\}]$, 也即 $\{e_n\}$ 的线性组合) 稠于 E;

(ii) 在 E 中存在一与原范数"等价"的新范数 $\|\cdot\|_1$, 使得对任意数列 $\{\xi_k\}\in\mathbb{K}$, 均有以下关系式成立:

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k e_k\Big\|_1\leqslant\Big\|\sum_{n_1}^{n_2}\xi_k e_k\Big\|_1$$

对于任意的 $n_1\leqslant n_2(n_1,n_2=1,2,\cdots)$ 是成立的.

证明 必要性: 当 $\{e_n\}$ 是 E 的可数基时. 首先, 由定义显然可知, 这时定理的条件 (i) 是成立的. 由于 $\{e_n\}$ 是基, 因而对于任意的 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n$, $\{\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\|\}$ 均必为一有界数列, 从而当在 E 中定义一个新范数

$$\|x\|_1=\sup_n\Big\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\Big\|,\quad\forall x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n\in E$$

时, 显然可以看出: 该范数是满足定理条件 (ii) 的, 并且还有

$$\|x\|\leqslant\|x\|_1,\quad\forall x\in E.$$

其次, 我们证明: E 在范数 $\|\cdot\|_1$ 下也构成一个 Banach 空间. 事实上, 对于任意的 $\{x_n\}\subset E$, 如果有 $\|x_{m_1}-x_{m_2}\|_1\to 0(m_1,m_2\to\infty)$, 那么, 当设 $x_m=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(m)}e_k(m\in\mathbb{N})$ 时, 便可导出: 对任意 $n\in\mathbb{N}$,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{(m_1)}e_k-\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{(m_2)}e_k\Big\|\leqslant\|x_{m_1}-x_{m_2}\|_1\to 0\ (m_1,m_2\to\infty).\tag{4.3.7}$$

故

$$\begin{aligned}|\xi_k^{(m_1)}-\xi_k^{(m_2)}|\|e_k\|&=\Big\|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i^{(m_1)}-\xi_i^{(m_2)})e_i-\sum_{i=1}^{k-1}(\xi_i^{(m_1)}-\xi_i^{(m_2)})e_i\Big\|\\&\leqslant\Big\|\sum_{i=1}^{k-1}(\xi_i^{(m_1)}-\xi_i^{(m_2)})e_i\Big\|+\Big\|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i^{(m_1)}-\xi_i^{(m_2)})e_i\Big\|\\&\leqslant 2\|x_{m_1}-x_{m_2}\|_1\to 0\quad(m_1,m_2\to\infty),\quad\forall_k\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

从而看出: 对任意的 $k\in\mathbb{N}$, 坐标 $\{\xi_k^{(m)}\}_m$ 均为一 Cauchy 数列, 故其必存在极限 ξ_k^0. 将关系式 (4.3.7) 两边取极限 $m_2\to\infty$, 我们则可导出: 对于任意的 $n\in\mathbb{N}$, 一致地有

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{(m_1)}e_k-\sum_{k=1}^{n}\xi_k^0 e_k\Big\|\to 0\quad(m_1\to\infty).$$

这样, 当令 $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^0 e_k$ 时, 由上式可知 $x_0 \in E$, 且有

$$\|x_m - x_0\|_1 = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(m_1)} e_n - \sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 e_n \right\| \to 0 \quad (m \to \infty).$$

也即证得 E 在范数 $\|\cdot\|_1$ 下亦是完备的.

最后, 由上面的结果, 直接应用 Banach 逆算子定理可导出: 以上使 E 均成为 Banach 空间的两个范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 是等价的. 因而, 本定理中条件 (ii) 的所有结果都得到了验证.

充分性: 首先, 我们证明在空间 E 中, 凡能表为 $\{e_n\}$ 的无穷级数形式之元, 其表示法必是唯一的. 事实上, 如果有 E 中一元

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k' e_k,$$

那么, 有

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \xi_k') e_k \right\|_1 = \|\theta\|_1 = 0,$$

从而由定理的条件 (ii) 可得到

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \xi_k') e_k \right\|_1 \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \xi_k') e_k \right\|_1 = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由此, 从归纳法显然可以得出 $\xi_k = \xi_k' (k = 1, 2, \cdots)$.

其次, 我们证明 E 中的元均可表为 $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ 的形式. 为此, 从定理的条件 (i), 由 $\{e_n\}$ 的线性组合在 E 中是稠的, 因而, 从条件 (ii), 只要证明在范数 $\|\cdot\|_1$ 下, 上面的形式的元所组成的线性空间是完备的就可以了. 然而, 这一事实在上面定理的必要性证明中已经证得. 综合以上结果, 我们已导出了空间 E 是以 $\{e_n\}$ 为一可数基的. □

习 题 四

4.1 用闭图像定理证明: 从 Banach 空间 E(分别) 到 $E_l\,(l \in I)$(内) 的连续线性算子族 $\{T_l\colon l \in I\}$ 的 "共鸣定理" (即: 当 $\sup_l \|T_l(x)\| < \infty\ (\forall x \in E)$ 时, 必有 $\sup_l \|T_l\| < \infty$).

4.2 设 E 为 Banach 空间, E_1 和 E_2 为其内的两闭线性子空间, 且对任意的元 $x \in E$, 均有唯一的分解式

$$x = x_1 + x_2 \quad (x_1 \in E_1, x_2 \in E_2).$$

试证明: 存在常数 ρ, 使得对任意的 $x \in E$, x 的唯一分解元 x_1 和 x_2, 均有

$$\|x_1\| \leqslant \rho\|x\|, \quad \|x_2\| \leqslant \rho\|x\|; \quad \forall x \in E.$$

4.3　如果 $\{f_n\}$ 为定义在第二纲赋准范线性空间 E 上的一列连续线性泛函, 并且极限

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \forall\, x \in E$$

均存在. 试用闭图像定理证明: 此时 f 必亦为 E 上的连续线性泛函.

4.4　设 T 为从赋范线性空间 E 内到 E_1 内的线性算子, 且有 $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$. 试证明: 当 $(T^*)^{-1}$ 是连续算子时, 其值域 $\mathcal{W}(T^*)$ 必为 E^* 中的闭集.

第五章　共鸣定理 (一致有界原理)

共鸣定理是泛函分析中最重要, 最基本的定理, 它和 Hahn-Banach 定理以及开映像定理 (闭图像定理) 被誉为线性分析的三大基本原理. 由于它在理论上 (如：求和法理论、插值理论、偏微分方程的定性理论、非线性分析理论以及抽象函数理论等) 与应用上 (计算方法、凸分析与优化等) 的重要性, 因此, 从 19 世纪到如今, 它一直被人们所注意. 在 19 世纪, 当时人们从 Fourier 级数的研究中提出了这样的一个问题：能否构造一个周期为 2π 的连续函数, 使得它的 Fourier 级数在一预先给定的点是发散的? 对于这个著名的问题, 1876 年, P. du Bois Reymond 举出了第一个例子. 后来, 在 1909 年, H. Lebesgue 也证明了这种函数的存在性. 此外, 在 1911 年, O. Toeplitz 和 H. Steinhaus 对于级数求和的研究, 1918 年, H. Hahn 关于插值的研究, 1920 年, I. Schur 和 1922 年 H. Hahn 关于求和法与奇异积分的研究, 直至 1927 年, S. Banach 与 H. Steinhaus 借助于 1897 年 W. F. Osgood 定理的类似方法, 分析上述大量成果, 终于总结出了一个一般性的定理, 此即 "共鸣定理" 或 "一致有界原理" (也称为 Banach-Steinhaus 定理).

在本章我们将介绍共鸣定理 (它的原始形式及我们的推广工作), 以及由它的结果和证明方法所涉及到的一些其他内容.

§5.1　完备及第二纲赋 β^* 范空间 $(0 < \beta^* \leqslant 1)$ 中的共鸣定理

在本节开始, 首先利用 §1.9 中有关完备空间的 "纲推理" 方法来给出有关的共鸣定理. 而当注意到赋 β 范空间 $(0 < \beta < 1)$ 虽然是 (非赋范空间的) 赋准范空间, 但其 (拓扑) 有界性与 (β) 范有界性相同, 且其上的线性算子同样有如下命题："有界性 $\Longleftrightarrow$ 连续性 $\Longleftrightarrow$ 强有界性", 因此, 我们将一般书上有关赋范空间上的共鸣定理推广到赋 β^* 范空间 $(0 < \beta^* \leqslant 1)$ 来统一处理. 首先, 我们给出完备空间中的共鸣定理：

定理 1 (Banach-Steinhaus 定理)　*设 E 和 E_1 均是赋 β^* 范空间 $(0 < \beta^* \leqslant 1)$ 且 E 是 "完备" 空间, $\{T_n\}$ 为从 E 到 E_1 内的连续线性算子, 那么, 只要 $\{T_n\}$ 是 "逐点有界" 的, 即有*

$$\sup_n \|T_n(x)\| < \infty, \quad \forall x \in E,$$

则 $\{T_n\}$ 必是“一致有界”的, 即有

$$\sup_n \|T_n\| < \infty \ (\text{也即}\ \sup_n \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T_n(x)\| < \infty).$$

证明　首先证明: 存在 E 内某一闭球 $B(x_0, \delta_0)$ 及一正数 ρ_0, 使得

$$\sup_n \sup_{x\in B(x_0,\delta_0)} \|T_n(x)\| \leqslant \rho_0. \tag{5.1.1}$$

事实上, 假如式 (5.1.1) 不成立, 则对 E 内任意闭球 B_0, 必有数 $n_1 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sup_{x\in B_0} \|T_{n_1}(x)\| > 1.$$

这样由 T_{n_1} 的连续性假设可知, 必存在某闭球 $B_1 \subset B_0$, 使得 $\|T_{n_1}(x)\|$ 在 B_1 的“下确界”满足条件

$$\inf_{x\in B_1} \|T_{n_1}(x)\| > 1.$$

同样地, 由归谬假设, 对于球 B_1, 必有数 $n_2 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sup_{x\in B_1} \|T_{n_2}(x)\| > 2.$$

这样由 T_{n_2} 的连续性假设类似可知, 必存在闭球 $B_2 \subset B_1$ (不妨设 $d(B_2) < \frac{1}{2}d(B_1)$, 这里 $d(B)$ 表示 B 的直径), 使得

$$\inf_{x\in B_2} \|T_{n_2}(x)\| > 2.$$

如此做下去, 则可归纳得到一闭球套 $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset B_{n+1} \supset \cdots$, $d(B_k) \to 0\,(k \to \infty)$, 以及一自然数列 $\{n_k\}$, 使得均有

$$\inf_{x\in B_k} \| T_{n_k}(x)\| > k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{5.1.2}$$

但注意到空间 E 是完备的赋准范空间, 故由 §1.9 可知

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \{x_0\}.$$

这样, 由式 (5.1.2) 便可得到

$$\sup_k \| T_{n_k}(x_0)\| = \infty,$$

而此显然与定理的假设矛盾.

其次, 由式 (5.1.1) 成立, 故对任意元 $\theta\neq x\in E$ (注意到 E 是赋 β^* 范空间), 由 $\|\delta_0^{\frac{1}{\beta^*}}x/\|x\|^{\frac{1}{\beta^*}}\|=\delta_0$, 即知 $x_0-(\delta_0/\|x\|)^{\frac{1}{\beta^*}}x\in B(x_0,\delta_0)$, 故有

$$\left\|T_n\left[x_0-\left(\frac{\delta_0}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{\beta^*}}x\right]\right\|\leqslant\rho_0,\quad\forall n\in\mathbb{N};$$

从而有 (注意 E_1 亦为赋 β^* 范空间)

$$\begin{aligned}\frac{\delta_0}{\|x\|}\|T_n(x)\|-\|T_n(x_0)\|&=\left\|\left(\frac{\delta_0}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{\beta^*}}T_n(x)\right\|-\|T_n(x_0)\|\\&=\left\|T_n\left[\left(\frac{\delta_0}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{\beta^*}}x\right]\right\|-\|T_n(x_0)\|\\&\leqslant\rho_0,\qquad\forall n\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

即得到

$$\begin{aligned}\|T_n(x)\|&\leqslant(\rho_0+\|T_n(x_0)\|)\frac{\|x\|}{\delta_0}\\&\leqslant\frac{1}{\delta_0}(\rho_0+\sup_n\|T_n(x_0)\|)\|x\|,\quad\forall n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

令: $\rho_1=\frac{1}{\delta_0}(\rho_0+\sup_n\|T_n(x_0)\|)$(有限数), 其显然与 x 的选择无关, 并且从上式导出

$$\|T_n(x)\|\leqslant\rho_1\|x\|,\quad\forall x\in E,\ n\in\mathbb{N},$$

也即证得

$$\sup_n\|T_n\|\leqslant\rho_1.$$

□

其实, 在定理 1 中, 定义域的完备性并不是实质性的要求, 而真正实质性的要求是 "第二纲" (回忆 §1.9 中的定义); 此外算子列的 "线性" 要求也不是本质的. 下面, 我们可以得到定理 1 的推广定理. 为此, 先给出一个定义.

定义 设 E 和 E_1 为赋准范空间, 从 E 到 E_1(内) 的算子 A 称为**按范次加**的, 是指其满足条件

$$\|A(x+y)\|\leqslant\|A(x)\|+\|A(y)\|,\quad\forall x,y\in E;$$

称为**正齐性**的, 是指其满足条件

$$A(\lambda x)=\lambda A(x),\quad\forall\lambda\geqslant 0,x\in E.$$

称其在 x_0 点是**下半连续**的, 是指其满足条件: 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时, 有

$$\|A(x_0)\|-\varepsilon<\|A(x)\|\quad(\forall x\in E).$$

定理 2 设 E 和 E_1 均是赋 β^* 范空间 $(0<\beta^*\leqslant 1)$, 且 E 是"第二纲"空间; $\{A_n\}$ 为从 E 到 E_1 内的按范次加、正齐性的、下半连续的算子列. 那么, 只要

$$\sup_n \|A_n(x)\|<\infty, \qquad \forall x\in E,$$

则有

$$\sup_n \|A_n\| \triangleq \sup_n \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|A_n(x)\|<\infty.$$

证明 与证明定理 1 一样, 我们首先证明式 (5.1.1) 是成立的.

事实上, 在 E 中作以下集列 $\{M_n\}$:

$$M_n \triangleq \Big\{x\colon\ p(x)\leqslant n,\ x\in E\Big\},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

(这里, $p(x)=\sup_n\|A_n(x)\|$).

那么, 由定理的假设 ($\{A_n\}$"逐点有界"), 显然有 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$. 并且从每一个 T_n 均为下半连续的 $(\forall n\in\mathbb{N})$, 从数学分析的知识可知: 其上确界 $p(x)$ 亦为下半连续的, 从而上面每一个 M_n 均是闭集 $(\forall n\in\mathbb{N})$. 这样, 由 E 是第二纲空间的假设则知: 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得集 M_{n_0} 含有 E 中某一个球 $B(x_0,\delta_0)$, 此即导出

$$\sup_n \sup_{x\in B(x_0,\delta_0)} \|A_n(x)\| = \sup_{x\in B(x_0,\delta_0)} p(x)\leqslant n_0. \tag{5.1.3}$$

其次, 对于任意元 $\theta\neq x\in E$, 同样由于 $x_0\pm(\delta_0/\|x\|)^{\frac{1}{\beta^*}}x\in B(x_0,\delta_0)$(如图 5.1 所示), 故当注意到 $\{A_n\}$ 的假设知: $p(x)$ 亦为次加 β^* 正齐性泛函, 因而由式 (5.1.3), 一方面有

$$\begin{aligned}\frac{\delta_0}{\|x\|}p(x) &= p\left[\left(\frac{\delta_0}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{\beta^*}}x\right]\\ &\leqslant p\left[\left(\frac{\delta_0}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{\beta^*}}x+x_0\right]+p(-x_0)\\ &\leqslant n_0+\sup_n\|A_n(-x_0)\| \quad (<\infty),\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

当令 $\rho_1=\frac{1}{\delta_0}(n_0+\sup_n\|A_n(-x_0)\|)$ 时, 此显然为与 x 无关的有限数, 且由式 (5.1.4) 导出:

$$p(x)\leqslant \rho_1\|x\|, \qquad \forall x\in E. \tag{5.1.5}$$

另一方面, 由式 (5.1.3) 又可得到: 当 $x\neq\theta$ 时, 有

$$p(x_0)-p\left[\left(\frac{\delta_0}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{\beta^*}}x\right]\leqslant p\left[x_0-\left(\frac{\delta_0}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{\beta^*}}x\right]\leqslant n_0,$$

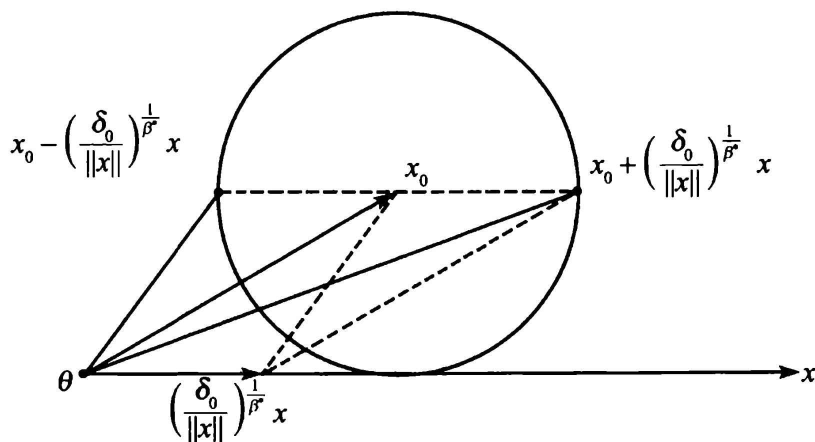


图 5.1

从而

$$\begin{aligned}\frac{\delta_0}{\|x\|}p(x)&\geqslant p(x_0)-n_0\\&=\sup_n\|A_n(x_0)\|-n_0\quad(>-\infty).\end{aligned}\tag{5.1.6}$$

故当令：$\rho_2=\frac{1}{\delta_0}(\sup_n\|A_n(x_0)\|-n_0)$ 时, 此显然亦为与 x 无关的有限数, 且由式 (5.1.6) 导出

$$p(x)\geqslant\rho_2\|x\|,\qquad\forall x\in E.\tag{5.1.7}$$

因此, 总合式 (5.1.5) 和 (5.1.7), 并注意到 $p(x)$ 的定义, 我们立即证得

$$\sup_n\|A_n\|\triangleq\sup_n\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|A_n(x)\|\leqslant\max\{\rho_1,|\rho_2|\}.$$ □

对于上面的定理, 我们给出几个注记：

注 1 如果注意到式 (5.1.1), 那么, 当用逆否命题的形式来叙述上面的共鸣定理时, 我们便可得到下面的结果：

在上面的定理的假设条件下, 如果

$$\sup_n\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T_n(x)\|=\infty,$$

那么, 对于 E 内任一闭球 $B(x,\delta)$, 必存在一元 x_0, 使得

$$\sup_n\|T_n(x_0)\|=\infty.$$

此即表明：由某一序列的无界性 (与 n 有关的元列 $\{x_n\}$, 其使数列 $\{\|T_n(x_n)\|\}$ 无界), 可以推出另一序列的无界性 (即“常元列” $\{x_n\equiv x_0:n\in\mathbb{N}\}$, 使得 $\{\|T_n(x_0)\|\}$ 无界). 这就是共鸣定理的“共鸣”一词的来源, 并且由上面的关系式可知, 这样的点 x_0 的集合在 E 内是“稠”的 (从后面的 §5.2 便可导出, 此点集不但是稠的, 而且还是“第二纲”的, 此外, 此集的余集必为“第一纲”的).

注 2 上面的定理也可称为“异点凝聚原理”. 因为由注 1, 可把点列 $\{x_n\}$(其使得 $\{\|T_n(x_n)\|\}$ 发散) 视为某种“奇异”点列, 而那里的结论却告诉我们: 这种变动的奇异点列都可以换成一个固定的点 x_0(也即凝聚成了一个奇异点 x_0).

从上面的共鸣定理, 我们不难得到下面的几个十分有用的推论:

推理 1 设 E 和 E_1 均是赋 β^* 范空间 $(0<\beta^*\leqslant 1)$, $\{T_n\}$ 为 E 到 E_1(内) 的一列连续线性算子; 如果对任意的 $x\in E$, $\lim_{n\to\infty}T_n(x)$ 均存在, 那么, 当 E 为“第二纲”空间时, 如令

$$T(x)=\lim_{n\to\infty}T_n(x),\qquad \forall\, x\in E,$$

则 T 必亦为 E 到 E_1(内) 的连续线性算子.

证明 由假设, 对任意的 $x\in E$, $\lim_{n\to\infty}T_n(x)$ 均存在, 故知 $\lim_{n\to\infty}\|T_n(x)\|$ 亦存在. 从而对于收敛数列 $\{\|T_n(x)\|\}$, 必有

$$\sup_n\|T_n(x)\|<\infty,\qquad \forall\, x\in E.$$

再注意到 $\{T_n\}$ 是连续线性算子列, 且 E 是第二纲 (赋 β^* 范) 空间, 因此, 直接利用定理 2 立即得到

$$\sup_n\|T_n\|<\rho,$$

其中 ρ 为某一常数.

这样, 注意到 T 的假设, 其显然是线性算子, 且从上面结果可以导出

$$\|T(x)\|=\lim_{n\to\infty}\|T_n(x)\|\leqslant\limsup_{n\to\infty}\|T_n\|\cdot\|x\|\leqslant\rho\,\|x\|,\quad \forall\, x\in E,$$

也即 T 是强有界的线性算子, 故必为连续线性算子. □

注 3 从推论 1 我们直接得到, 如果 E 为Banach空间, E_1 为赋范空间, $\mathcal{B}(E\to E_1)$ 为 E 到 E_1 内的所有连续线性算子组成赋范空间, 那么, $\mathcal{B}(E\to E_1)$ 对于“逐点收敛”(强收敛) 也是封闭的. 此即: 对于任意的 $\{T_n\}\subset\mathcal{B}(E\to E_1)$ 如有: $T_n(x)\to T(x)$ $(\forall\, x\in E)$, 则必有 $T\in\mathcal{B}(E\to E_1)$(回忆到“数学分析”中连续函数列的“逐点收敛”极限未必仍是连续的, 由此可知, 这里“线性”这一代数性质却带来了很好的拓扑性质). 此外, 值得注意的是, 当赋范空间 E 不是完备的时候, 如果赋范空间 E_1 也不是完备 (否则由 §2.2 可知 $\mathcal{B}(E\to E_1)$ 必完备) 的时候. 则当 $\{T_n\}$ 依算子范数是一个Cauchy列时, 也并不能保证 $\{T_n\}$ 在 $\mathcal{B}(E\to E_1)$ 内有极限.

推理 2 当 E 为“第二纲”赋 β^* 范空间 $(0<\beta^*\leqslant 1)$ 时, 为了在其上定义而在一“完备”赋 β^* 范空间上取值的连续线性算子列 $\{T_n\}$ 是强收敛的, 其充分必要条件是:

(i) $\{\|T_n\|\}$ 是有界数列;

(ii) 存在 E 中某一子集 D, 使得对任意的 $x\in D$, $\{T_n(x)\}$ 均收敛, 且 $\overline{\mathrm{span}}\{D\}=E$(即 D 的线性组合稠于 E).

证明 必要性由共鸣定理即可得到. 下面就来证明定理的充分性.

对任意 $x\in E$, 如果 $x\in\mathrm{span}\{D\}$, 那么由算子列 $\{T_n\}$ 的线性, 根据假设条件 (ii) 便可得到 $\{T_n(x)\}$ 是收敛的. 而当 $x\in E\backslash\mathrm{span}\{D\}$ 时, 对任意 $\varepsilon>0$, 由设 $\overline{\mathrm{span}}\{D\}=E$, 因而存在 $y\in\mathrm{span}\{D\}$, 使得 $\|y-x\|<\frac{\varepsilon}{4\rho}$ (其中 $\rho>\sup_n\|T_n\|$, 由假设条件 (i) 可知其为有限正数). 这样便有

$$\begin{aligned}\|T_n(x)-T_m(x)\|&\leqslant\|T_n(x)-T_n(y)\|+\|T_n(y)-T_m(y)\|+\|T_m(y)-T_m(x)\|\\&\leqslant(\|T_n\|+\|T_m\|)\|y-x\|+\|T_n(y)-T_m(y)\|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\|T_n(y)-T_m(y)\|\quad(n,m=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

注意到前段结论可知：对上述正数 ε, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n,m\geqslant N$ 时, 有

$$\|T_n(y)-T_m(y)\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

代入上式则有

$$\lim_{n,m\to\infty}\|T_n(x)-T_m(x)\|=0,$$

即 $\{T_n(x)\}$ 为 E_1 中的 Cauchy 列. 最后, 当注意到 E_1 的完备性时, 则可导出 $\{T_n(x)\}$ 是收敛的. 总上, 我们便证得 $\{T_n\}$ 在 E 上是强收敛的. □

当再次注意到 §2.2 中的定理, 从一个赋范空间 E 的共轭空间 E^*(即$\mathcal{B}(E\to\mathbb{K})$) 必为 Banach 空间, 我们亦可得到下面有关共鸣定理的另一个常用的推论：

推理 3 设 E 为赋范空间, 元列 $\{x_n\}\subset E$, 若：

$$x_n\underset{(弱)}{\rightharpoonup}x_0\in E\ (n\to\infty)$$

(即

$$f(x_n)\to f(x_0)\quad(n\to\infty),\qquad\forall f\in E^*),$$

则有

$$\sup_n\|x_n\|<\infty.$$

证明 回忆 §2.3, 我们考虑元列 $\{x_n\}$ 在 E^{**} 中的典则映像列 $\{Jx_n\}$. 显然, 其为 Banach 空间 E^* 上的一列连续线性泛函. 注意到典则映像 J 的定义, 有

$$(Jx_n)(f)=f(x_n)\to f(x_0)=(Jx_0)(f)\quad(n\to\infty),\ \ \forall f\in E^*,$$

故知

$$\sup_n |(Jx_n)(f)| < \infty, \qquad \forall f \in E^*.$$

这样, 从定理 1 立即得到

$$\sup_n \|Jx_n\| < \infty.$$

最后, 注意到典则映像 J 是 E 到 E^{**} 内的线性等距 (保范) 算子, 从而立即导出

$$\sup_n \|x_n\| < \infty. \qquad \square$$

注 4 从上面的证明中可以看到, 其实 $\{x_n\}$ 的弱收敛假设可以减弱为:“对于任意的 $f \in E^*$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 均存在, 更一般地, 只要 $\sup_n |f(x_n)| < \infty$”, 则上述推论的结论亦成立. 也即, 此时该推论可变成下面命题:

命题 设 E 为赋范空间, $\{x_n\} \subset E$, 则 $\{x_n\}$“弱有界” $\Longleftrightarrow \{x_n\}$ 按范有界.

此外, 利用前面的共鸣定理, 我们还可以给出下面的有关向量值函数的一个推论:

推理 4 设 $x(t)$ 是从实区间 (a, b) 到赋范空间 E(内) 的向量值函数, $t_0 \in (a, b)$. 如果对于每一个 $f \in E^*$, 数值函数 $f[x(t)]$ 在点 t_0 均可导, 那么 $x(t)$ 必在 t_0 点连续 (即有 $t \to t_0 \Longrightarrow \|x(t) - x(t_0)\| \to 0$).

证明 对于任意的 $\{t_n\} \subset (a, b)$, 若有 $t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$ 且 $t_n \neq t_0 (\forall n \in \mathbb{N})$, 则在 E 中取相应的点列 $\{x_n\}$:

$$x_n = \frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由假设知: 对每一个 $f \in E^*$, 均有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} f\left[\frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{f[x(t_n)] - f[x(t_0)]}{t_n - t_0} \\ &= f'[x(t)]\,|_{t=t_0}\end{aligned}$$

存在, 因此有

$$\sup_n |f(x_n)| < \infty, \quad \forall f \in E^*.$$

这样, 从前面的命题可知必存在正数 ρ, 使得

$$\sup_n \|x_n\| < \rho,$$

此即

$$\sup_n \left\| \frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0} \right\| < \rho,$$

即有

$$\|x(t_n) - x(t_0)\| < \rho\,|t_n - t_0| \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

由此立即导出

$$\lim_{n\to\infty} \|x(t_n) - x(t_0)\| = 0,$$

从而证得 $x(t)$ 在点 t_0 的连续性. □

§5.2 广义拟次加泛函族的共鸣定理

本节将把共鸣定理推广到更加广泛的一类非线性泛函族中. 为此, 我们先来介绍拟次加泛函.

定义 1 设 $p(x)$ 为定义在线性空间 E 上的泛函. 称 $p(x)$ 为γ **次加** 的, 如果存在正数 γ, 使得

$$p\,(x+y) \leqslant \gamma[p\,(x) + p\,(y)], \qquad \forall\, x, y \in E.$$

称 $p(x)$ 为**拟次加**的, 如果存在 $\gamma > 0$, 使得其为 γ 次加的.

注 1 从上面的定义中, 可以得到关于 γ 次加泛函的以下几个常用性质:

1) $p(x-y) \geqslant \frac{p(x)}{\gamma} - p(y)$;

2) 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$,

$$p\,(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \leqslant \gamma\, p(x_1) + \gamma^2\, p(x_2) + \cdots + \gamma^{n-1}\, p(x_{n-1}) + \gamma^{n-1}\, p(x_n);$$

特别地,

3) $p(n\,x) \leqslant (\sum_{k=1}^{n-2} \gamma^k + 2\gamma^{n-1})\, p(\,x)$;

4) $p(2^n\,x) \leqslant (2\gamma)^n\, p(x)$; $\forall\, x, y, x_1, x_2, \cdots, x_n \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

为了对 γ 次加泛函有直观的了解, 我们介绍以下几个例子:

例 1 赋范空间 E 上的泛函

$$p_\alpha(x) = \|x\|^\alpha, \qquad \forall\, x \in E$$

(这里 α 为固定正常数), 必为 $2^{[\alpha]}$ 次加泛函 (这里 $[\alpha]$ 表示 α 的整数部分), 特别地, 当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时, $p(x)$ 为次加泛函, 并且还是连续泛函.

例 2 设在赋范线性空间 E 上定义的泛函

$$p(x)=\begin{cases}\|x\|, & 当\ \|x\|\leqslant \dfrac{1}{2}\ 时,\\ 2\|x\|, & 当\ \|x\|>\dfrac{1}{2}\ 时,\end{cases}\qquad \forall x\in E,$$

则 $p(x)$ 是 E 上的 2 次加泛函, 而且均有 $|p(x)|\leqslant 2\|x\|(\forall x\in E)$. 然而在 $\|x\|=\frac{1}{2}$ 的球面上, $p(x)$ 都是不连续的, 因而 $p(x)$ 不是 E 上的连续泛函.

例 3 在 $\mathbb{R}$ 上, 令

$$p(x)=\begin{cases}x, & 当\ x\in\mathbb{Q}\ 时;\\ x+1, & 当\ x\notin\mathbb{Q}\ 时\end{cases}$$

(其中 $\mathbb{Q}$ 表示 $\mathbb{R}$ 中的有理数的集合), 则 $p(x)$ 为其上的处处不连续的次加泛函.

例 4 设线性空间 E 上定义的泛函 $p(x)$ 满足条件

$$0<\inf_{x\in E}p(x)<\sup_{x\in E}p(x)\leqslant \alpha\cdot\inf_{x\in E}p(x),$$

则其必为 $\frac{\alpha}{2}$ 次加泛函 (显然 $\frac{\alpha}{2}>\frac{1}{2}$). 而若满足条件

$$\inf_{x\in E}p(x)<\sup_{x\in E}p(x)\leqslant \beta\cdot\inf_{x\in E}p(x)<0,$$

则其必为 $\frac{\beta}{2}$ 次加泛函 (显然 $0<\beta<1$).

为了利用共鸣定理的逆否命题来研究我们熟知的 Banach 空间 (或 Fréchet 空间) 按 (代数) 包含关系, 作为线性子空间改范后是否均为第一纲空间的问题, 在研究到 $M[a,b]$ 空间的元改为 $L^{p^*}[a,b]\,(p^*>0)$ 范数或准范数后必构成一个第一纲赋范或赋准范空间时, 我们必须将共鸣定理推广到更一般的所谓的“广义 γ 次加泛函族”来讨论.

定义 2 设 $0<\beta^*\leqslant 1$. 从赋 β^* 范空间 E 到赋 β^* 范空间 E_1 内的算子 A 称为**按范 γ 次加**的, 是指 $\|A(x)\|$ 是 E 上的 γ 次加泛函.

从赋 β^* 范空间 E 分别到赋 β^* 范空间 $\{E_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ 的算子族 $\{A_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ 称为是**广义按范 γ 次加** 的, 是指: 存在正常数 γ, 使得对于任意的指标 $\lambda\in\Lambda$, 均对应有指标 $\lambda'\in\Lambda$, 使得一致地有关系式

$$\|A_\lambda(x+y)\|\leqslant\gamma(\|A_{\lambda'}(x)\|+\|A_{\lambda'}(y)\|),\qquad \forall x,y\in E$$

成立, 并且称 λ' 为 λ 的**对应 γ 次加指标** .

例 5 在空间 $L^{p^*}(\Omega,\Sigma,\mu)\,(p^*>0)$ 上定义一个泛函族 $\{g_\lambda\colon \lambda>0\}$:

$$g_\lambda(x)=\lambda^{2p^*+1}\cdot\mu\{t\colon |x(t)|\geqslant\lambda, t\in\Omega\},\quad \forall\, x\in L^{p^*}(\Omega),$$

则 $\{g_\lambda\}$ 是一个广义 2^{2p^*+1} 次加、非负的泛函族, 并且满足条件: 存在常数 $\rho_0>0$, 使得对于每一个指标 $\lambda>0$, 存在常数 $\delta_\lambda>0$, 使得均有 $g_\lambda(x)\leqslant\rho_0$, $\forall x\in B(\theta,\delta_\lambda)$.

证明 显然, 集合 Ω 内有以下子集间的关系式:

$$\{t\colon |x(t)+y(t)|\geqslant\lambda, t\in\Omega\}\subset\{t\colon |x(t)|\geqslant\frac{\lambda}{2}, t\in\Omega\}\cup\{t\colon |x(t)|\geqslant\frac{\lambda}{2}, t\in\Omega\}.$$

故知

$$\begin{aligned}
g_\lambda(x+y)&=\lambda^{2p^*+1}\cdot\mu\{t\colon |x(t)+y(t)|\geqslant\lambda, t\in\Omega\}\\
&\leqslant\lambda^{2p^*+1}\left[\mu\left\{t\colon |x(t)|\geqslant\frac{\lambda}{2}, t\in\Omega\right\}+\mu\left\{t\colon |y(t)|\geqslant\frac{\lambda}{2}, t\in\Omega\right\}\right]\\
&=2^{2p^*+1}\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2p^*+1}\mu\{t\in\Omega\colon |x(t)|\geqslant\frac{\lambda}{2}\}+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2p^*+1}\mu\left\{t\in\Omega\colon |y(t)|\geqslant\frac{\lambda}{2}\right\}\right]\\
&=2^{2p^*+1}[g_{\frac{\lambda}{2}}(x)+g_{\frac{\lambda}{2}}(y)],\ \forall\, x,y\in L^{p^*}(\Omega,\Sigma,\mu)\quad(\forall\lambda>0).
\end{aligned}$$

也即: $\{g_\lambda\colon \lambda>0\}$ 为一非负的 "广义 2^{2p^*+1} 次加" 泛函族. 并且, 当设

$$E_\lambda(x)=\{t\colon |x(t)|\geqslant\lambda\},\quad \forall x\in L^{p^*}(\Omega)\quad(\forall\lambda>0)$$

时, 还可得到

$$\begin{aligned}
|g_\lambda(x)|&=\lambda^{2p^*+1}\mu[E_\lambda(x)]=\lambda^{p^*+1}[\lambda^{p^*}\mu(E_\lambda(x))]\\
&\leqslant\lambda^{p^*+1}\int_{E_\lambda(x)}|x(t)|^{p^*}\mu(dt)\\
&\leqslant\begin{cases}\lambda^{p^*+1}\|x\|^{p^*}, & \text{当 } p^*\geqslant 1 \text{ 时},\\ \lambda^{p^*+1}\|x\|_{(p^*)}, & \text{当 } p^*<1 \text{ 时},\end{cases}\\
&\qquad\forall\, x\in L^{p^*}(\Omega,\Sigma,\mu)\quad(\forall\lambda>0);
\end{aligned}$$

其中: $\|\cdot\|$ 表示空间 $L^{p^*}(\mu)(p^*\geqslant 1)$ 的范数, $\|\cdot\|_{(p^*)}$ 表示空间 $L^{p^*}(\mu)(p^*<1)$ 的准范数.

由此我们立即可知: 存在常数 $\rho_0>0$, 对于每一个指标 $\lambda>0$, 存在 $\delta_\lambda>0$, 使得均有 $g_\lambda(x)\leqslant\rho_0$, $\forall x\in B(\theta,\delta_\lambda)$. □

为了推广共鸣定理, 我们需要下面的一个引理. 在此之前, 先要将泛函 $p(x)$ 的值扩充为可取 $\pm\infty$. 此时, 依通常的惯例, 我们将视 $\infty-\infty$ 为不定. 特别地, 当 $p(x)$ 为 γ 次加泛函时, 若 $p(x)=p(y)=\infty$, 则总认为关系式 $p(x-y)\geqslant\frac{p(x)}{\gamma}-p(y)$ 无

论 $p(x-y)$ 取什么样的值, 其均是成立的. 下面就给出在后面证明中起着重要作用的引理:

引理　设 E 是赋 β^* 范空间 $(0<\beta^*\leqslant 1)$, $p(x)$ 为 E 上的 γ 次加泛函. 如果 $p(x)$ 在某球 $B(x_0,\delta_0)$ 是 (数值) 有上界, 并且相应存在数 $\xi_0>0$, 使得 $p(-\xi_0 x_0)<\infty$, 那么, 或者 $p(x)\equiv -\infty \quad (\forall x\in E)$, 或者 $p(x)$ 在任意原心球 B_r 上 (数值) 有界.

证明　如果 $p(x)$ 在 E 上不恒取 $-\infty$, 则必有一元 x_1, 使得 $p(x_1)\neq -\infty$.

对任意的 $r>0$, 令 $r_1=\|x_1\|+r$. 下面先来证明 $p(x)$ 在原心球 B_{r_1} 上是 (数值) 有上界的 (注意: 这里的方法可以参看图 5.2 来理解).

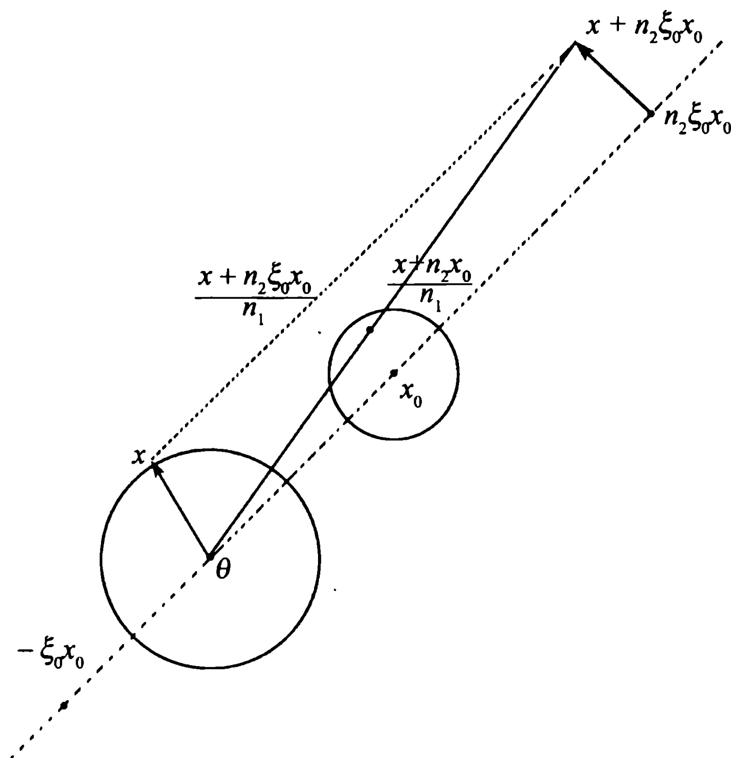


图 5.2

事实上, 对上面的元 x_0 及数 δ_0, 可找到一自然数 n_0, 使得当 $n\geqslant n_0$ 时, 就有 $(\|x_0\|+r_1)<n\,\delta_0$. 此外, 还可找到两个自然数 n_1 和 n_2, 使得

$$n_0<n_1^{\beta^*},\quad n_1\leqslant n_2\,\xi_0<n_1+1.$$

这样, 对任意元 $x\in B_{r_1}$ 有

$$p(x)\leqslant \gamma\,[p(x+n_2\,\xi_0\,x_0)+p\,(-n_2\,\xi_0\,x_0)]. \tag{5.2.1}$$

由于

$$\begin{aligned}p(x+n_2\,\xi_0\,x_0)&=p\Big[n_1\cdot\frac{1}{n_1}(x+n_2\xi_0x_0)\Big]\\&\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n_1-2}\gamma^k+2\gamma^{n_1-1}\Big)\,p\Big(\frac{x+n_2\xi_0x_0}{n_1}\Big);\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

而注意到 n_1, n_2 和 n_0 的取法, 又有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x+n_2\xi_0x_0}{n_1}-x_0\right\| &= \left(\frac{1}{n_1}\right)^{\beta^*}\|x+n_2\xi_0x_0-n_1x_0\| \\ &\leqslant \left(\frac{1}{n_1}\right)^{\beta^*}\left[\,\|x\|+(n_2\xi_0-n_1)^{\beta^*}\|x_0\|\,\right] \\ &\leqslant \left(\frac{1}{n_1}\right)^{\beta^*}(r_1+\|x_0\|) \\ &< \frac{1}{n_0}(r_1+\|x_0\|)<\delta_0,\end{aligned}$$

此即

$$\frac{x+n_2\xi_0x_0}{n_1}\in B(x_0,\delta_0);$$

因而, 从式 (5.2.2) 及引理假设有

$$p\,(x+n_2\xi_0x_0)\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n_1-2}\gamma^k+2\gamma^{n_1-1}\Big)\rho_0 \tag{5.2.3}$$

(这里 ρ_0 为 $p\,(x)$ 在球 $B(x_0,\delta_0)$ 上的某一 (数值) 上界).

此外, 从引理假设还可得到

$$p\,(-n_2\xi_0x_0)\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n_2-2}\gamma^k+2\gamma^{n_2-1}\Big)p(-\xi_0x_0)<\infty, \tag{5.2.4}$$

因此, 当将式 (5.2.3) 和 (5.2.4) 代入式 (5.2.1) 时, 我们则可导出

$$\begin{aligned}p(x)&\leqslant\gamma\left[\Big(\sum_{k=1}^{n_1-2}\gamma^k+2\gamma^{n_1-1}\Big)\rho_0+\Big(\sum_{k=1}^{n_2-2}\gamma^k+2\gamma^{n_2-1}\Big)p(-\xi_0x_0)\right]\\ &\triangleq\rho_1\,(<\infty),\quad\forall\,x\in B_{r_1}.\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

然后, 我们证明 $p(x)$ 在原心球 B_r 上是 (数值) 有下界的.

其实, 对于任意元 $x\in B_r$, 由于

$$\|x_1-x\|\leqslant\|x_1\|+\|x\|\leqslant\|x_1\|+r,$$

故知 $x_1-x\in B_{r_1}$, 从式 (5.2.5) 有

$$p(x_1-x)\leqslant\rho_1.$$

因而从 $p(x)$ 的 γ 次加性以及点 x_1 的取法, 立即导出

$$\begin{aligned}p(x)=p(x_1-x_1+x)&\geqslant\frac{p(x_1)}{\gamma}-p(x_1-x)\\ &\geqslant\frac{p(x_1)}{\gamma}-\rho_1\triangleq\rho_2\,(>-\infty),\qquad\forall\,x\in B_r.\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

最后, 综合式 (5.2.5) 和 (5.2.6), 立即导得: 对任意的 $r>0$, 均有

$$\sup_{\|x\|\leqslant r}|p(x)|<\infty. \qquad \square$$

有了上面的引理, 我们不难导出下面更一般的推广了的共鸣定理 (这里, 部分取材于我们 2000 年最新的结果, 可参阅文献 [28]).

定理 1　设 E 是一个第二纲的赋 β^* 范空间 $(0<\beta^*\leqslant 1)$, A_λ 为从 E 到赋准范空间 E_λ(内) 的算子 $(\lambda\in\Lambda)$. 如果 $\{A_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ 是"广义按范 γ 次加算子族"(即 $\{\|A_\lambda(x)\|\colon \lambda\in\Lambda\}$ 是广义 γ 次加泛函族), 其满足以下条件:

(i) 在 E 中存在一族球 $\{B(x_\lambda,\delta_\lambda)\colon \lambda\in\Lambda\}$ 和一常数 $\rho_0>0$, 使得均有

$$\|A_\lambda(x)\|<\rho_0,\qquad \forall\, x\in B(x_\lambda,\delta_\lambda)\quad (\forall\lambda\in\Lambda).$$

并且有

$$\sup_\lambda\|A_\lambda(-x_\lambda)\|<\infty.$$

(ii) 在 E 中某球 $B(x_1,\delta_1)$ 内的一个第二纲集 Q 上, 以及相应的反对称某球 $-\xi_1B(x_1,\delta_1)$ (ξ_1 为某一正数) 内的一个稠集 D 上, 均有

$$\sup_\lambda\|A_\lambda(x)\|<\infty\qquad \forall\, x\in Q\cup D,$$

则对于任意的 $r>0$, 一致地有

$$\sup_\lambda\sup_{\|x\|\leqslant r}\|A_\lambda(x)\|<\infty.$$

证明　首先, 令

$$p(x)=\sup_\lambda\|A_\lambda(x)\|,\qquad \forall\, x\in E,$$

显然, 从假设可知 $p(x)$ 为空间 E 上的 γ 次加泛函. 因而, 当设集列 $\{M_k\}$ 为

$$M_k=\{x\colon p(x)<k,\ x\in Q\},\quad \forall\, k\in\mathbb{N}$$

时, 则由定理的假设有

$$Q=\bigcup_{k=1}^\infty M_k,$$

故从 Q 的第二纲假设可知: 存在集 M_{k_0} 和 E 中的一个球 $B(x_0,\delta_0)$, 使得

$$B(x_0,\delta_0)\subset\overline{M_{k_0}}. \tag{5.2.7}$$

并且注意到 $Q \subset B(x_1, \delta_1)$ 的假设, 有 $B(x_0, \delta_0) \subset B(x_1, \delta_1)$.

其次, 我们将要证明: 泛函 $p(x)$ 在球 $B(x_0, \delta_0)$ 上是 (数值) 有上界的.

事实上, 对于任意元 $x \in B(x_0, \delta_0)$ 及任意指标 $\lambda \in \Lambda$, 当设 λ 的对应 γ 次加指标是 λ_1, λ_1 的对应 γ 次加指标是 λ_2 时, 从式 (5.2.7) 可知: 存在元 $y_0 \in M_{k_0}$, 使得 $\|x - y_0\| < \delta_{\lambda_2}$. 这样, 由于 $x_{\lambda_2} + x - y_0 \in B(x_{\lambda_2}, \delta_{\lambda_2})$, 从 $p(x)$ 的 γ 次加性及定理的假设条件 (i), 我们得到

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda(x)\| &\leqslant \gamma\,[\,\|A_{\lambda_1}(y_0)\| + \|A_{\lambda_1}(x - y_0)\|\,] \\
&\leqslant \gamma\,\|A_{\lambda_1}(y_0)\| + \gamma^2\,(\,\|A_{\lambda_2}(-x_{\lambda_2})\| + \|A_{\lambda_2}(x_{\lambda_2} + x - y_0)\|\,) \\
&\leqslant \gamma\,p(y_0) + \gamma^2 \sup_\lambda \|A_\lambda(-x_\lambda)\| + \gamma^2\,\rho_0 \\
&\leqslant \gamma\,k_0 + \gamma^2 \sup_\lambda \|A_\lambda(-x_\lambda)\| + \gamma^2\,\rho_0 \\
&\triangleq \rho_1\,(< \infty).
\end{aligned}$$

而当注意到上面的非负数 ρ_1 与球 $B(x_0, \delta_0)$ 中元 x 和指标 $\lambda \in \Lambda$ 的选择性均无关时, 我们立即导出

$$p(x) = \sup_\lambda \|A_\lambda(x)\| \leqslant \rho_1, \quad \forall\, x \in B(x_0, \delta_0), \tag{5.2.8}$$

即 $p(x)$ 在球 $B(x_0, \delta_0)$ 上是 (数值) 有上界的.

最后, 注意到前面已知 $B(x_0, \delta_0) \subset B(x_1, \delta_1)$, 因此有

$$-\xi_1 B(x_0, \delta_0) \subset -\xi_1 B(x_1, \delta_1).$$

并且从集 D 稠于 $-\xi_1 B(x_1, \delta_1)$ 的假设可以得到: $-\xi_1 B(x_0, \delta_0)$ 内必含有 D 中的点 (注意定理假设条件 (ii) 中 D 中点的性质). 这样一来, 结合式 (5.2.8), 我们不难从前面引理直接导出本定理的结论. □

从上面的定理, 我们容易直接得到:

定理 2 如果空间 E 和算子族 $\{A_\lambda\colon \lambda \in \Lambda\}$ 如上面的定理所设, 且满足那里的条件(i)和下面的(ii)$'$:

(ii)$'$ $\sup_\lambda \|A_\lambda(x)\| < \infty \Leftrightarrow \sup_\lambda \|A_\lambda(-x)\| < \infty, \ \ \forall\, x \in E$;

那么, 只要 E 中存在一个第二纲集 Q, 使得

$$\sup_\lambda \|A_\lambda(x)\| < \infty, \qquad \forall\, x \in Q,$$

则对于任意的 $r > 0$, 一致地有

$$\sup_\lambda \sup_{\|x\| \leqslant r} \|A_\lambda(x)\| < \infty.$$

作为对上面定理 1 和定理 2 条件 (i) 的推论, 我们可以得到:

定理 3 如果空间 E 和算子族 $\{A_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 如上面的定理所设, 其满足以下条件:

(i)′ 在 E 中存在一族球 $\{B(x_\lambda, \delta_\lambda): \lambda \in \Lambda\}$, 使得对于任意的 $\lambda \in \Lambda$, 泛函 $\|A_\lambda(x)\|$ 在对应的球 $B(x_\lambda, \delta_\lambda)$ 内均是"下半连续"的, 并且有

$$\sup_\lambda \|A_{\sigma(\lambda)}(x_\lambda)\| < \infty$$

(这里, $\sigma(\lambda)$ 为泛函 $\|A_\lambda(x)\|$ 对于 λ 的 γ 拟次加"指标"),

$$\sup_\lambda \|A_\lambda(-x_\lambda)\| < \infty.$$

(ii)′ $\sup_\lambda \|A_\lambda(x)\| < \infty \Leftrightarrow \sup_\lambda \|A_\lambda(-x)\| < \infty$, $\forall x \in E$.

那么, 只要 E 中存在一个第二纲集 Q, 使得

$$\sup_\lambda \|A_\lambda(x)\| < \infty, \qquad \forall x \in Q,$$

则对于任意的 $r > 0$, 一致地有

$$\sup_\lambda \sup_{\|x\| \leqslant r} \|A_\lambda(x)\| < \infty.$$

证明 这里只要将前面定理中的条件(i)推导出来, 那么, 由定理 2 就可立即得到本推理的结论. 下面就来验证这一事实.

首先, 与定理 1 的证明中前面的推导一样, 从第二纲集 Q 的存在性和假设, 必可找到一个集 $M_{k_0} \triangleq \{x: p(x) < k_0,\ x \in Q\}$ 和一个球 $B(x_0, \delta_0)$, 使得那里的式 (5.2.7) 成立, 即有

$$B(x_0, \delta_0) \subset \overline{M_{k_0}}.$$

并且, 不妨假设 $x_0 \in M_{k_0}$.

其次, 对任意的 $\lambda \in \Lambda$, 设 $\delta_\lambda^* = \min\{\delta_\lambda, \delta_0\}$. 我们将要证明: 存在正数 ρ_0, 使得每一个泛函 $\|A_\lambda(x)\|$ 在相应球 $B(x_\lambda, \delta_\lambda^*)$ 内均以 ρ_0 为上界 $(\forall \lambda \in \Lambda)$.

事实上, 对于任意的 $\lambda \in \Lambda$ 和 $x \in B(x_\lambda, \delta_\lambda^*)$, 由假设 $\|A_\lambda(x)\|$ 在点 x 是下半连续的, 因此对给定的 $\varepsilon_0 > 0$, 存在 $\sigma_\lambda > 0$, 使得

$$\|y - x\| < \sigma_\lambda \Longrightarrow \|A_\lambda(x)\| - \varepsilon_0 \leqslant \|A_\lambda(y)\|. \tag{5.2.9}$$

由 x 的取法可知 $x_0 + x - x_\lambda \in B(x_0, \delta_0)$, 故从前式稠性关系, 存在元 $b_0 \in M_{k_0}$, 使得 $\|b_0 - (x_0 + x - x_\lambda)\| < \sigma_\lambda$, 也即有

$$\|(b_0 - x_0 + x_\lambda) - x\| < \sigma_\lambda,$$

故从式 (5.2.9)(当 λ 对应的 γ 拟次加指标为 λ_1, λ_1 对应的 γ 拟次加指标为 λ_2 时), 立即得到

$$\begin{aligned}\|A_\lambda(x)\| &\leqslant \varepsilon_0 + \|A_\lambda(b_0 - x_0 + x_\lambda)\| \\ &\leqslant \varepsilon_0 + \gamma\|A_{\lambda_1}(x_\lambda)\| + \gamma^2[\,\|A_{\lambda_2}(b_0)\| + \|A_{\lambda_2}(-x_0)\|] \\ &\leqslant \varepsilon_0 + \gamma \sup_\lambda \|A_{\sigma(\lambda)}(x_\lambda)\| + \gamma^2[p(b_0) + p(-x_0)] \\ &\leqslant \varepsilon_0 + \gamma \sup_\lambda \|A_{\sigma(\lambda)}(x_\lambda)\| + \gamma^2[k_0 + p(-x_0)] \\ &\triangleq \rho_0,\end{aligned}$$

(那里 $\sigma(\lambda)$ 是 λ 对应的 γ 拟次加指标 $(\forall\lambda \in \Lambda)$). 注意到本定理的假设条件(i)$'$可知: $\sup_\lambda \|A_{\sigma(\lambda)}(x_\lambda)\| < \infty$; 又从本推理中的假设条件(ii)$'$, 由于 $\sup_\lambda \|A_\lambda(x_0)\| = p(x_0) < k_0(< \infty)$ (因已设 $x_0 \in M_{k_0}$), 故知 $p(-x_0) = \sup_\lambda \|A_\lambda(-x_0)\| < \infty$. 因此, 上式中的 ρ_0 必为一有限数, 并且与 x 在球 $B(x_\lambda, \delta_\lambda^*)$ 内的取法以及 $\lambda \in \Lambda$ 的选择无关.

这样一来, 我们已经导出: 存在常数 $\rho_0 > 0$, 使得均有

$$\|A_\lambda(x)\| \leqslant \rho_0, \quad \forall x \in B(x_\lambda, \delta_\lambda^*); \quad (\forall\lambda \in \Lambda). \tag{5.2.10}$$

此即导出了定理 1 中的条件(i), 从而本推论得证. □

注 1 *在定理 3 中, 如果我们将那里的条件 (i$'$) 中的球族加强为"同心球"族 $\{B(x_0, \delta_\lambda): \lambda \in \Lambda\}$, 则相应条件"$\sup_\lambda \|A_{\sigma(\lambda)}(x_\lambda)\| < \infty$"便可简化为"$\sup_\lambda \|A_\lambda(x_0)\| < \infty$".*

作为上面定理的应用, 可以得到下面有关第一纲空间的几个命题. 我们知道, 对于一个线性空间而言, 当范数 (准范数) 的定义不同时, 其不但能在"质"上使空间的"完备"性起相反的变化, 而且在"量"上也能使空间起着极大的变化 (由第二纲变为第一纲, 或者相反). 利用共鸣定理的逆否命题, 我们可以由"定性"地了解空间之间的包含关系 (在"代数同构"意义下) 深入到"定量"地了解这些空间. 例如: 从代数同构意义下, 我们知道: 对任意 $0 < p_1^* < p_2^*$, 有

$$(\ell^{p_1^*}) \subset (\ell^{p_2^*}) \subset (c_0) \subset (c) \subset (m),$$

$$M[a,b] \subset L^{p_2^*}[a,b] \subset L^{p_1^*}[a,b].$$

而从"定量"来看, 对于"被包含"的空间, 当改其范或准范为"包含"它的空间的范或准范数时, 其所占的"数量"是"很少很少"的. 精确地说, 此时它仅仅是包含它的空间内的第一纲集!

下面仅给出两个推论作为范例. 而从第二个推论, 读者便可明白, 我们当初为什么要定义"广义拟次加泛函族", 并将共鸣定理推广到此类泛函族上.

推理 1　任意赋 (准) 范空间 (ℓ^{p^*}) $(0 < p^* < \infty)$ 的元之全体在空间 (c_0) 内必组成一个第一纲线性子空间. 因而, 在空间 (c_0) 的范数下其自身必构成一个第一纲的赋 (准) 范空间.

证明　在空间 (c_0) 中, 我们定义一列 "2^{p^*} 次加 (非负)" 泛函列 $\{g_n\}$:

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^{p^*}, \qquad \forall x = \{\xi_k\} \in (c_0) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

注意到

$$\begin{aligned} |g_n(x)| &\leqslant n \left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| \right)^{p^*} \\ &\leqslant n \cdot \|x\|_{c_0}^{p^*}, \quad \forall x = \{\xi_k\} \in (c_0) \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(这里, $\|\cdot\|_{c_0}$ 代表 (c_0) 空间的范数), 故知每一个 $g_n(x)(n \in \mathbb{N})$ 均是连续的泛函. 并且满足

$$\sup_n |g_n(\theta)| = 0 \, (< \infty)$$

和

$$\sup_n |g_n(x)| < \infty \iff \sup_n |g_n(-x)| < \infty, \quad \forall x \in (c_0).$$

注意到对任意 $0 < p^* < \infty$, 有

$$\sup_n |g_n(y)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^{p^*} < \infty, \quad \forall y = \{\eta_k\} \in (\ell^{p^*}),$$

故反之, 如果 (ℓ^{p^*}) 中的元之全体在 (c_0) 内是一个第二纲集, 则从前面定理 3 后的注有

$$\sup_n \sup_{\|x\|_{c_0} \leqslant r} |g_n(x)| < \infty, \quad \forall r > 0. \tag{5.2.11}$$

但式 (5.2.11) 在 (c_0) 中是不成立的. 事实上, 特取元 $x_0 = \{(\frac{1}{k})^{\frac{1}{p^*}}\} \in B_1(c_0)$, 则有

$$\sup_n |g_n(x_0)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

而此显然与式 (5.2.11) 矛盾! 此即得到: 对于任意的 $p^* > 0$, 空间 (ℓ^{p^*}) 在 (c_0) 的范数下构成 (c_0) 内的第一纲集.

为了说明对于任意的数 $p^* > 0, (\ell^{p^*})$ 在 (c_0) 的范数下, 自己构成一个第一纲空间, 只要注意到 (ℓ^{p^*}) 中的元的全体在 (c_0) 范数下是稠于 (c_0) 的, 就可直接导出结论. □

在上面推论 1 的证明的最后, 我们用了下面的一个事实:

命题 设 M 是一个距离空间, $M_0 \subset M$, 如果 M_0 自己也构成第一纲空间, 则 M_0 在 M 内是第一纲集; 如果 M_0 在 M 内是第一纲集, 且 M_0 稠于 M, 则 M_0 自己也构成第一纲空间.

证明 如果 M_0 本身是第一纲的空间, 则 $M_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, 其中 B_n 是 M_0 中的稀疏集. 对于任意 M 中开集 U, $U \bigcap M_0$ 是 M_0 相对开集, 从 B_n 是 M_0 中的稀疏集知, 存在 M_0 中相对开集 $M_0 \bigcap V \neq \varnothing$ (其中 V 是 M 中的开集), 使得 $M_0 \bigcap V \subset M_0 \bigcap U$, 并且 $(M_0 \bigcap V) \bigcap B_n = \varnothing$, 从而可以导出 $U \bigcap V \neq \varnothing$ 且 $(U \bigcap V) \bigcap B_n = \varnothing$. 此说明了每个集 B_n 是 M 的稀疏集, 故 M_0 是空间 M 中的第一纲子集. 也即第一个结论是成立的.

至于第二个结论, 事实上, 由假设存在 M 中稀疏集 B_n, 使得 $M_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. 反之, 如果 M_0 自己不能构成第一纲空间, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 B_{n_0} 在 M_0 内的闭包 $\overline{B_{n_0}}^{\triangle}$ 含有 M_0 内某一闭球 $B^{\triangle}(x_0, \delta_0)$. 也即有

$$B^{\triangle}(x_0, \delta_0) \subset \overline{B_{n_0}}^{\triangle},$$

则由于 M_0 是稠于 M 的, 故从上可以导出 B_{n_0} 在 M 内的闭包亦必包含 M 内的相应闭球 $B(x_0, \delta_0)$, 也即有

$$B(x_0, \delta_0) \subset \overline{B_{n_0}},$$

因而与 M_0 在 M 中是第一纲集的假设矛盾! □

推理 2 概有界复值可测函数空间 $M[0,1]$ 的元之全体在任意赋 (准) 范空间 $L^{p^*}[0,1]$ $(p^* > 0)$ 内均构成一个第一纲的线性子空间; 从而, 它在 $L^{p^*}[0,1]\,(p^* > 0)$ 的 (准) 范数下自己成为一个第一纲的赋 (准) 范空间.

证明 对于任意的数 $p^* > 0$, 在空间 $L^{p^*}[0,1]$ 上定义泛函族 $\{g_\lambda\colon \lambda > 0\}$ 如下:

$$g_\lambda(x) = \lambda^{2p^*+1} \cdot \mu\{t\colon |x(t)| \geqslant \lambda,\, t \in [0,1]\}, \quad \forall x = x(t) \in L^{p^*}[0,1],$$

则从本节例 5 可知: $\{g_\lambda\colon \lambda > 0\}$ 是 $L^{p^*}[0,1]$ 上的一个 (非负) "广义 2^{2p^*+1}- 次加" 泛函族, 并且满足下面条件: 存在常数 $\rho_0 > 0$, 对于每一个指标 $\lambda > 0$, 存在 $\delta_\lambda > 0$, 使得均有 $g_\lambda(x) \leqslant \rho_0$, $\forall x \in B(\theta, \delta_\lambda)$.

注意到 $M[0,1]$ 中元的特性 (当 λ 足够大时, $\mu\{t\colon |x(t)| \geqslant \lambda,\, t \in \Omega\} = 0$), 不难得到

$$\sup_{\lambda>0} |g_\lambda(y)| < \infty, \quad \forall y \in M[0,1] (\subset L^{p^*}[0,1]).$$

因此, 反之, 如果 $M[0,1]$ 元的全体 (在 $L^{p^*}[0,1]$ 的准范数下) 是 $L^{p^*}[0,1]$ 中的第二

纲集, 则从前面的定理 2 有

$$\sup_{\lambda>0}\sup_{\|x\|_{p^*}\leqslant r}|g_\lambda(x)|<\infty,\quad \forall r>0\quad (\forall x\in L^{p^*}[0,1]). \tag{5.2.12}$$

但式 (5.2.12) 在 $L^{p^*}[0,1]$ 中是不成立的. 事实上, 当特取元

$$x_0=x_0(t)=t^{-\frac{1}{2p^*}}$$

时, 由于

$$\int_0^1|x_0(t)|^{p^*}dt=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2,$$

故知 $x_0\in L^{p^*}[0,1]$. 但是, 对任意的 $\lambda>0$, 均有关系式

$$\begin{aligned}|x_0(t)|\geqslant\lambda &\Longleftrightarrow t^{-\frac{1}{2p^*}}\geqslant\lambda\\ &\Longleftrightarrow t^{\frac{1}{2p^*}}\leqslant\frac{1}{\lambda}\\ &\Longleftrightarrow t\leqslant\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2p^*},\end{aligned}$$

因此有

$$\mu\{t\colon |x_0(t)|\geqslant\lambda,\ t\in[0,1]\}=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2p^*},$$

从而得到

$$\begin{aligned}g_\lambda(x_0)&=\lambda^{2p^*+1}\cdot\mu\{t\colon |x_0(t)|\geqslant\lambda,\ t\in[0,1]\}\\ &=\lambda\to\infty\quad(\lambda\to\infty).\end{aligned}$$

而此显然与式 (5.2.12) 矛盾! 此即证得命题中前半部分结论. 类似地, 由于 $M[0,1]$ 中的元之全体在 $L^{p^*}[0,1]$ 的 (准) 范数下是稠于 $L^{p^*}[0,1]$ 的 ($p^*>0$). 因而同样利用前面的命题, 可得命题的后半部分结论. □

注 2　上面的证明主要思路是对空间 $L^{p*}[0,1]$ 使用定理 2. 为了保证 $L^{p*}[0,1]$ 是第二纲的, 使用了此空间的完备性. 也有另外的证明思路, 即对 $L^{p*}[0,1]$ 的子空间 $M[0,1]$(其中用 $L^{p*}[0,1]$ 的范数) 用定理 2, 因此不用 $L^{p*}[0,1]$ 完备. 下面简述其证明:

假设 $M[0,1]$ 是第二纲的空间, 类似于上面证明, 可知式 (5.2.12) 在空间 $M[0,1]$(其中 (准) 范数依 $L^{p^*}[0,1]$ 取) 中成立.

但式 (5.2.12) 在 $M[0,1]$ 中是不成立的. 事实上, 当特取元

$$x_\lambda=x_\lambda(t)=\min\{t^{-\frac{1}{2p^*}},\lambda\}$$

时, 显然有 $x_\lambda \in M[0,1]$. 由于

$$\int_0^1 |x_\lambda(t)|^{p^*} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2,$$

故知 $\|x_\lambda\| \leqslant 2 (\forall \lambda > 0)$. 但是, 由于对任意的 $\lambda > 0$, 均有关系式

$$\begin{aligned} |x_\lambda(t)| \geqslant \lambda &\Longleftrightarrow t^{-\frac{1}{2p^*}} \geqslant \lambda \\ &\Longleftrightarrow t^{\frac{1}{2p^*}} \leqslant \frac{1}{\lambda} \\ &\Longleftrightarrow t \leqslant \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2p^*}, \end{aligned}$$

因此有

$$\mu\{t\colon |x_\lambda(t)| \geqslant \lambda,\, t \in [0,1]\} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2p^*},$$

从而得到

$$\begin{aligned} g_\lambda(x_\lambda) &= \lambda^{2p^*+1} \cdot \mu\{t\colon |x_0(t)| \geqslant \lambda,\, t \in [0,1]\} \\ &= \lambda \to \infty \quad (\lambda \to \infty). \end{aligned}$$

而此显然与式 (5.2.12) 矛盾! 此即证得命题中后半部分结论. 因而同样利用前面的命题, 可得命题的前半部分结论.

推理 3 * *利用上面的证法对于一般"非纯原子"的测度空间 (Ω, Σ, μ), 当 $\mu(\Omega) < \infty$ 时, 同样可以类似地给出 $M(\Omega, \Sigma, \mu)$ 在 $L^{p^*}(\Omega, \Sigma, \mu)\, (p^* > 0)$ 中为第一纲集的结论.*

证明 在归谬证明时, 可以利用在 Ω 的无原子部分 Ω_0 中, 其测度具有"中间值性质" (即: 对于任意数 ξ_0, 只要 $0 < \xi_0 < \mu(\Omega)$, 则必存在 Ω_0 的子集 M_0, 使得 $\mu(M_0) = \xi_0$), 因而我们将 Ω_0 分为可列个不交可测集 $\{M_n\}$, 使得

$$\begin{aligned} \mu(M_1) &= \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2p^*}\right] \mu(\Omega_0), \\ \mu(M_2) &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2p^*} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2p^*}\right] \mu(\Omega_0), \\ \\ \mu(M_n) &= \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{2p^*} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^{2p^*}\right] \mu(\Omega_0), \end{aligned}$$

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

取元 $x_0 = x_0(t)$ 如下:

$$x_0(t)=\begin{cases}2, & \forall\, t\in\Omega\backslash\Omega_0;\\ 1, & \forall\, t\in M_1,\\ \vdots & \\ n, & \forall\, t\in M_n;\\ \vdots & \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x_0(t)|^{p^*}\mu(dt) &= \int_{\Omega\backslash\Omega_0}|x_0(t)|^{p^*}\mu(dt)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{M_n}|x_0(t)|^{p^*}\mu(dt)\\ &= 2^{p^*}\cdot\mu(\Omega\backslash\Omega_0)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{p^*}\mu(M_n)\\ &= 2^{p^*}\cdot\mu(\Omega\backslash\Omega_0)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{p^*}\Big[\Big(\frac{1}{n}\Big)^{2p^*}-\Big(\frac{1}{n+1}\Big)^{2p^*}\Big]\mu(\Omega_0),\end{aligned}$$

而从正项级数的比较判别法, 由于

$$\frac{n^{p^*}[(\frac{1}{n})^{2p^*}-(\frac{1}{n+1})^{2p^*}]}{(\frac{1}{n})^{p^*}-(\frac{1}{n+1})^{p^*}}=n^{p^*}\Big[\Big(\frac{1}{n}\Big)^{p^*}+\Big(\frac{1}{n+1}\Big)^{p^*}\Big]\to 2\quad (n\to\infty),$$

故从

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\frac{1}{n}\Big)^{p^*}-\Big(\frac{1}{n+1}\Big)^{p^*}\Big]$$

是收敛的, 知

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{p^*}\Big[\Big(\frac{1}{n}\Big)^{2p^*}-\Big(\frac{1}{n+1}\Big)^{2p^*}\Big]$$

亦是收敛的. 因此从前式则知 $x_0\in L^{p^*}(\Omega,\Sigma,\mu)$.

但是, 对任意的 $\lambda>2$, 如果 $n-1<\lambda\leqslant n$, 则从 $x_0(t)$ 的取法可知

$$\begin{aligned}\mu\{t\colon |x_0(t)|\geqslant\lambda,\ t\in\Omega\} &= \sum_{k=n}^{\infty}\mu(M_k)\\ &= \sum_{k=n}^{\infty}\Big[\Big(\frac{1}{k}\Big)^{2p^*}-\Big(\frac{1}{k+1}\Big)^{2p^*}\Big]\mu(\Omega_0)\\ &= \Big(\frac{1}{n}\Big)^{2p^*}\mu(\Omega_0),\end{aligned}$$

从而得到

$$
\begin{aligned}
g_\lambda(x_0) &= \lambda^{2p^*+1}\mu\{t\colon |x_0(t)| \geqslant \lambda,\ t\in\Omega\} \\
&= \lambda^{2p^*+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{2p^*}\mu(\Omega_0) \\
&\geqslant (n-1)^{2p^*+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{2p^*}\mu(\Omega_0) \\
&= (n-1)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2p^*}\mu(\Omega_0) \to \infty \quad (\lambda\to\infty).
\end{aligned}
$$

同样可归谬证得上面的相应结论. □

注 3 上面的证明主要思路也是对空间 $L^{p*}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 使用定理 2. 为了保证 $L^{p*}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 是第二纲的, 使用了此空间的完备性. 同样地, 也有另外的证明思路, 即对 $L^{p*}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 的子空间 $M(\Omega,\Sigma,\mu)$(其中赋以 $L^{p*}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 的范数) 同样用定理 2, 只是不用 $L^{p*}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 完备. 下面简述其证明:

若 $M(\Omega,\Sigma,\mu)$ 不是第一纲空间 (其中 (准) 范数依 $L^{p^*}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 联). 类似上面定理的证明, 可知式 (5.2.12) 在 $M(\Omega,\Sigma,\mu)$ 中成立. 但是, 对任意的 $\lambda>2$, 令

$$
x_\lambda = x_\lambda(t) = \min\{\lambda, x_0(t)\},
$$

则 $x_\lambda\in M(\Omega,\Sigma,\mu)$ 且 $\|x_\lambda\|\leqslant r_0 \triangleq \|x_0\|$. 如果 $n-1<\lambda\leqslant n$, 则从 $x_0(t)$ 的取法可知

$$
\begin{aligned}
\mu\{t\colon |x_\lambda(t)|\geqslant\lambda,\ t\in\Omega\} &= \sum_{k=n}^{\infty}\mu(M_k) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{k}\right)^{2p^*}-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{2p^*}\right]\mu(\Omega_0) \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{2p^*}\mu(\Omega_0),
\end{aligned}
$$

从而得到

$$
\begin{aligned}
g_\lambda(x_\lambda) &= \lambda^{2p^*+1}\mu\{t\colon |x_0(t)| \geqslant \lambda,\ t\in\Omega\} \\
&= \lambda^{2p^*+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{2p^*}\mu(\Omega_0) \\
&\geqslant (n-1)^{2p^*+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{2p^*}\mu(\Omega_0) \\
&= (n-1)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2p^*}\mu(\Omega_0) \to \infty \quad (\lambda\to\infty).
\end{aligned}
$$

同样可归谬证得上面的相应结论.

§5.3 T 与 T^* 之逆的关系 (值域定理)

本节在赋范空间中讨论线性算子 T 与 T^* 的有界逆算子的存在定理, 在这里经常涉及到算子 (T^* 或 T) 值域的性质, 因此, 有时人们也将下面的一些定理称之为 "值域定理".

首先, 给出关于逆算子的存在和有界的几个命题.

定理 1 设 T 是从赋范线性空间 E 到 E_1 内的线性算子, 且有 $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$, 那么, 为使 T^{-1} 是存在且连续的, 必须且只需 $\mathcal{W}(T^*) = E^*$.

证明 1) "$\Rightarrow$": 如果 T^{-1} 存在, 并且是连续的线性算子, 那么, 对任意 $f \in E^*$, 由

$$g_0(y) \triangleq f(T^{-1}(y)), \quad \forall\, y \in \mathcal{W}(T),$$

可得到定义在 $\mathcal{W}(T) \subset E_1$ 上的有界线性泛函, 从而由 Hahn-Banach 定理, 便可以得到上述 g_0 的一 "保范延拓" 泛函 $g \in E_1^*$ (g 不必是唯一的). 且由

$$g[T(x)] = g_0[T(x)] = f[T^{-1}(T(x))] = f(x), \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T),$$

还可导出 $g \in \mathcal{D}(T^*)$ 以及 $T^*(g) = f$, 因而从 f 的任意性便导出 $\mathcal{W}(T^*) = E^*$.

2) "$\Leftarrow$": 若 $T(x) = \theta$, 对于任意 $f \in E^*$, 由假设 $\mathcal{W}(T^*) = E^*$, 存在 $g \in \mathcal{D}(T^*)$, 使得 $f = T^*(g)$, 从而

$$f(x) = [T^*g](x) = g(T(x)) = g(\theta) = 0.$$

由 f 的任意性得到 $x = \theta$, 由此得到 T 为 1-1 对应的, 故 T^{-1} 存在.

对于任意 $y \in \mathcal{W}(T), ||y|| \leqslant 1$, 任取 $f \in E^*$, 由假设 $\mathcal{W}(T^*) = E^*$, 存在 $g \in E_1^*$, 使得 $T^*(g) = f$. 注意到

$$\begin{aligned} |f(T^{-1}(y))| &= |[T^*(g)](T^{-1}(y))| \\ &= |g(T(T^{-1}(y)))| \\ &= |g(y)| \leqslant ||g||, \quad \forall\, f \in E^*, \end{aligned}$$

因而由共鸣定理可得到

$$\sup\{||T^{-1}(y)||: ||y|| \leqslant 1, \quad y \in \mathcal{W}(T)\} < \infty,$$

即 T^{-1} 是有界线性算子. □

定理 2 设 T 是从赋范线性空间 E 内到 E_1 内的线性算子, 且有 $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$, 则为使 $(T^*)^{-1}$ 存在, 必须且只需 $\overline{\mathcal{W}(T)} = E_1$.

证明 1) "⇒"：反之，如果存在 $y_1 \in E_1$ 而 $y_1 \notin \overline{\mathcal{W}(T)}$，那么，注意到 $\overline{\mathcal{W}(T)}$ 为 E_1 内的一闭线性子空间，因此从分隔性定理 (§3.2 定理 2) 可知，存在 $g_1 \in E_1^*$，使得

$$g_1(y_1) = 1, \quad g_1(y) = 0, \quad \forall y \in \overline{\mathcal{W}(T)}.$$

由此导出

$$g_1[T(x)] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T),$$

从而由共轭算子的定义即知

$$g_1 \in \mathcal{D}(T^*), \quad T^*(g_1) = 0\,(E \text{ 上之"零泛函"}).$$

由假设，T^* 存在线性逆算子，可知 T^* 为"1-1"对应，由此导出 $g_1 = 0$(零泛函). 此显然与上面的取法矛盾!

2) "⇐"：事实上，如果存在泛函 $g_0 \in E_1^*$，使得

$$T^*(g_0) = 0\,(E\text{上之"零泛函"}),$$

则从共轭算子的定义可导出

$$g_0[T(x)] = [T^*(g_0)](x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T),$$

即 $g_0(y) = 0$, $\forall y \in \mathcal{W}(T)$. 最后，注意到定理的假设条件 $\overline{\mathcal{W}(T)} = E_1$ 以及 g_0 为 E_1 上的连续线性泛函，可导出 $g_0 = 0$(零泛函). 于是，由 T^* 的线性及所得结果便可导出其逆算子 $(T^*)^{-1}$ 是存在的. □

定理 3 *设 T 是从赋范线性空间 E 内到 E_1 内的线性算子，且有 $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$，则当 E_1 为"第二纲"赋范线性空间且有 $\mathcal{W}(T) = E_1$ 时，$(T^*)^{-1}$(存在且) 为连续线性算子.*

证明 首先由定理 2 可知 $(T^*)^{-1}$ 是存在的. 下面就来证明 $(T^*)^{-1}$ 的有界性. 反之，如果此结论不真，那么由算子有界性的定义可知，存在 $\{g_n\} \subset E_1^*$，使得

$$||g_n|| = 1, \quad ||T^*(g_n)|| \to 0 \ \ (n \to \infty), \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

则当我们定义一元列 (注意线性算子 $(T^*)^{-1}$ 的存在性，从而由 $g_n \neq \theta$，可知 $T^*(g_n) \neq \theta$)

$$g_n' = \frac{g_n}{||T^*(g_n)||} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

时，容易看出

$$\lim_{n\to\infty} ||g_n'|| = \lim_{n\to\infty} \frac{||g_n||}{||T^*(g_n)||} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{||T^*(g_n)||} = \infty. \tag{5.3.1}$$

另外, 由定理假设 $E_1=\mathcal{W}(T)$ 可知, 对任意的 $y\in E_1$, 存在 $x\in E$, 使得 $y=T(x)$, 这样又可得到

$$\begin{aligned}|g_n'(y)|=|g_n'(T(x))|&=|[T^*g_n'](x)|\\&\leqslant\|T^*(g_n')\|\,\|x\|=\|x\|\quad(\forall n\in\mathbb{N}),\end{aligned}$$

即导出关系式 $\sup_n|g_n'(y)|<+\infty(\forall y\in E_1)$. 最后, 由空间 E_1 是第二纲的假设及共鸣定理, 可推得 $\{\|g_n'\|\}$ 是一有界的数列, 其显然与式 (5.3.1) 矛盾! □

下面讨论 T^{-1} 与 $(T^*)^{-1}$ 的关系.

定理 4 *设 T 是从赋范线性空间 E 内到 E_1 内的线性算子, 且有 $\overline{\mathcal{D}(T)}=E$ 及 $\overline{\mathcal{W}(T)}=E_1$. 那么, 如果 T^{-1} 存在, 则 $(T^*)^{-1}$ 也存在, 并且 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$, 此外两个逆算子 T^{-1} 与 $(T^*)^{-1}$ 的连续性是等价的.*

证明 先证明定理的前半命题. 首先, 由于 $\mathcal{D}(T^{-1})=\mathcal{W}(T)$ 在 E_1 中稠, 故由共轭算子的定义知 $(T^{-1})^*$ 是存在的, 并且由定理 2 知 $(T^*)^{-1}$ 也是存在的. 下面, 我们指出: 这两算子也是相等的.

事实上, 对任意 $y\in\mathcal{W}(T)$, 有

$$[T^*(g)](T^{-1}(y))=g\{T[T^{-1}(y)]\}=g(y),\quad\forall\,g\in\mathcal{D}(T^*);$$

从而导出

$$T^*(g)\in\mathcal{D}[(T^{-1})^*],\quad(T^{-1})^*[T^*(g)]=g,\quad\forall\,g\in\mathcal{D}(T^*).$$

由此得到

$$\mathcal{D}[(T^*)^{-1}]=\mathcal{W}(T^*)\subset\mathcal{D}[(T^{-1})^*]$$

及

$$(T^{-1})^*[T^*(g)]=g=[(T^*)^{-1}](T^*(g)),\quad\forall\,T^*(g)\in\mathcal{D}[(T^*)^{-1}].$$

由此可知算子 $(T^{-1})^*$ 是 $(T^*)^{-1}$ 的扩张.

另一方面, 对任意 $x\in\mathcal{D}(T)$, 有

$$[(T^{-1})^*(f)](T(x))=f\{T^{-1}[T(x)]\}=f(x),\quad\forall\,f\in\mathcal{D}[(T^{-1})^*],$$

由此可得 $(T^{-1})^*f\in\mathcal{D}(T^*)$, 即导出

$$\mathcal{D}[(T^{-1})^*]\subset\mathcal{W}(T^*)=\mathcal{D}[(T^*)^{-1}]\tag{5.3.2}$$

和

$$f(x)=[(T^{-1})^*(f)](T(x))=\{T^*[(T^{-1})^*(f)]\}(x),\ \forall\,x\in\mathcal{D}(T),f\in\mathcal{D}[(T^{-1})^*].$$

由上面后一式, 注意到 $\mathcal{D}(T)$ 稠于 E 的假设, 又可得到 $f=T^*[(T^{-1})^*(f)],\quad\forall\,f\in\mathcal{D}[(T^{-1})]$, 从而有

$$(T^*)^{-1}(f)=(T^{-1})^*(f),\quad \forall f\in\mathcal{D}[(T^{-1})],\tag{5.3.3}$$

由式 (5.3.2) 及 (5.3.3), 可知算子 $(T^*)^{-1}$ 是 $(T^{-1})^*$ 的扩张. 因此, 将上两结果结合起来, 便证得 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

下面证明定理后半段的结论. 事实上, 如果 T^{-1} 有界, 则由 §2.3 定理 4 的结果知其共轭算子 $(T^{-1})^*$ 是有界的, 由上段结果可知 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$ 亦是有界的. 反过来, 如果已知 $(T^*)^{-1}$ 是有界的, 那么根据上段的结果可知 $(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}$ 是有界的, 从而同样由 §2.3 定理 4 的结果可知 T^{-1} 也是有界的. 最后, 由赋范线性空间中线性算子的有界性与连续性是等价的, 立即得出定理所需的结论. □

§5.4 共鸣定理的一些应用

作为线性 (泛函) 分析的三大原理之一的共鸣定理, 在泛函分析的理论以及古典分析中有着广泛的应用, 本节将列举几个关于共鸣定理的应用的例子.

例 1 (Fourier 级数的发散问题) *存在无穷多个以 2π 为周期的实值连续函数, 使其Fourier级数在任意给定的点上是发散的.*

验证 设以 2π 为周期的实值连续函数的全体所构成的实 Banach 空间, 记为 $C_{2\pi}$, 其中范数 $\|x\|=\sup_t|x(t)|(\forall x\in C_{2\pi})$, 于是, 对任意 $x=x(t)\in C_{2\pi}$, 当将其 Fourier 级数的前 $n+1$ 项之和表示为

$$\begin{aligned}f_n(x,t)&=\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt)\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_n(s,t)x(s)ds,\end{aligned}$$

其中

$$k_n(s,t)=\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(s-t)]}{2\sin[\frac{1}{2}(s-t)]}\quad (\text{Fejer 积分核})$$

时, 易知, 对于任意固定的 t_0 及 n, 上面的 $f_n(x,t_0)$ 乃是空间 $C_{2\pi}$ 上的一个线性泛函. 为讨论简单起见, 不妨设 $t_0=0$, 此时有

$$f_n(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_n(s,0)x(s)ds,\quad \forall x=x(s)\in C_{2\pi},$$

另外, 还可得到

$$\|f_n\|=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|k_n(s,0)|ds.$$

再注意到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|k_n(s,0)|ds &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})s]}{\sin\frac{1}{2}s}\right|ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin[(2n+1)\frac{s}{2}]}{\frac{s}{2}}\right|\cdot\left|\frac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\right|ds \\
&\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin[(2n+1)\frac{s}{2}]}{\frac{s}{2}}\right|ds \\
&\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left|\frac{\sin[(2n+1)\frac{s}{2}]}{\frac{s}{2}}\right|ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{2n+1}{2}\pi}\left|\frac{\sin u}{u}\right|du \to \infty \quad (n\to\infty),
\end{aligned}
$$

我们则可导出 $C_{2\pi}^*$ 中的泛函列 $\{f_n\}$, 有关系式

$$\sup_n \|f_n\| = \lim_{n\to\infty}\|f_n\| = \infty.$$

因而注意到 $C_{2\pi}$ 为 Banach 空间, 由共鸣定理的逆否命题则知: $C_{2\pi}$ 内必有一个第二纲集 Q, 使得 $C_{2\pi}\backslash Q$ 为第一纲集, 且对任意的元 $x\in Q\subset C_{2\pi}$, 均有

$$\sup_n |f_n(x,0)| = \infty.$$

此即说明: 对于空间 $C_{2\pi}$ 中第二纲集 Q 内的任一元 x(连续函数 $x(t)$), 其 Fourier 级数在 $t=0$ 点均是发散的; 且收敛元组成的集仅是第一纲的. □

例 2 (无穷级数求和法) 在这个例子里, 我们给出一个在数学分析中O. Stolz定理之直接推广的定理. 为此, 先给出下面的定义.

定义 1 设 $A=(\alpha_{ij})$ 为一无穷矩阵. 称数列 $x=\{\xi_i\}\in(s)$ 为A **有和的**, 是指

$$A_i(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j \quad (i=1,2,\cdots)$$

存在, 以及

$$A(x)=\lim_{n\to\infty}A_i(x)$$

也存在. 这时, 还称 $A(x)$ 为数列 $x=\{\xi_i\}$ 的A **极限**.

定义 2 一个矩阵 A 称为是**保存**的, 是指对于任意收敛的数列 $\{\xi_i\}\in(c)$, $\{\xi_i\}$ 必是 A 有和的, 并且 $\{\xi_i\}$ 的 A 极限等于 $\{\xi_i\}$ 的极限.

例如, 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & & \frac{1}{n} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

就是“保存”的, 因为对于任意的元 $x=\{\xi_i\}\in(c)$, 如果 $\lim_{i\to\infty}\xi_i=\xi_0$, 则由

$$A_i(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j=\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i}{i}\quad(\text{算术平均值})$$

可知

$$A(x)=\lim_{i\to\infty}A_i(x)=\lim_{i\to\infty}\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i}{i}=\lim_{i\to\infty}\xi_i=\xi_0.$$

又如, 矩阵

$$B=\begin{pmatrix} \frac{y_1}{y_1} & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{y_1}{y_2} & \frac{y_2-y_1}{y_2} & 0 & 0 & & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{y_1}{y_3} & \frac{y_2-y_1}{y_3} & \frac{y_3-y_2}{y_3} & 0 & & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \frac{y_1}{y_n} & \frac{y_2-y_1}{y_n} & \frac{y_3-y_2}{y_n} & \frac{y_4-y_3}{y_n} & & \frac{y_n-y_{n-1}}{y_n} & 0 & \cdots \\ \cdots & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

当设 $y_n\uparrow\infty(n\to\infty)$ 时, 可知也是“保存”的 (后面定理将可证明). 而注意到

$$B\Big(\frac{x_1}{y_1},\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1},\frac{x_3-x_2}{y_3-y_2},\cdots,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}},\cdots\Big)^{\mathrm T}=\Big(\frac{x_1}{y_1},\frac{x_2}{y_2},\frac{x_3}{y_3},\cdots,\frac{x_n}{y_n},\cdots\Big)^{\mathrm T},$$

则知：若有 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\xi_0$, 则必有 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\xi_0$. 此即为“数学分析”中著名的 Stolz 定理.

此外, 无穷单位矩阵 I 显然也是保存矩阵.

关于保存矩阵, 我们有一个极其有用的判别定理.

定理 (Steinhaus-Toeplitz 定理)　为使无穷矩阵是保存的, 其充分必要条件是:

(i) 各行的"绝对和"一致有界, 即

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}| \leqslant \rho\,(<\infty);$$

(ii) 各列之"值"趋于 0, 即

$$\lim_{i\to\infty}\alpha_{ij}=0 \quad (j=1,2,\cdots);$$

(iii) 各行之"和"趋于 1, 即

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}=1.$$

证明　必要性: 首先, 对任意 $x=\{\xi_i\}\in(c)$ 及 $n\in\mathbb{N}$, 当设

$$A_{in}(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j$$

时, 易见 $\{A_{in}\colon n=1,2,\cdots\}\subset(c)^*$; 且由于 A 是保存的, 故

$$A_i(x)=\lim_{n\to\infty}A_{in}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j$$

均是存在的, 从而由 §5.1 定理 2 的推理 1, 对于任意的自然数 i, 应有 $A_i\in(c)^*$; 同样地, 又由 A 的保存性, 我们还知道, 对任意的元 $x\in(c)$, 极限

$$A(x)=\lim_{i\to\infty}A_i(x)$$

也均是存在的, 从而同理可得到 $A\in(c)^*$. 且由共鸣定理可知: 存在一正常数 ρ, 使得一致地有

$$\|A_i\|\leqslant\rho \quad (i=1,2,\cdots).$$

另外, 因为 $(c)^*=(\ell^1)$, 由上面泛函 A_i 的取法可知

$$\|A_i\|=\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|\leqslant\rho \quad (i=1,2,\cdots),$$

从而得到了定理所需之条件 (i).

其次, 当令元 $e_j=(0,0,\cdots,0,\underset{(j)}{1},0,\cdots)$ 时, 可得到

$$A_{in}(e_j)=\alpha_{ij}\qquad(n\geqslant j).$$

并且由于 $\{e_j\}\subset(c)$, 故当设元 $e_j=\{\xi_i^{(j)}\}$ 时, 有

$$\lim_{i\to\infty}\xi_i^{(j)}=0\quad(j=1,2,\cdots),$$

从而由 A 的保存性便可导出 $A(e_j)=0\ (j=1,2,\cdots)$, 即有

$$0=A(e_j)=\lim_{i\to\infty}A_i(e_j)=\lim_{i\to\infty}\lim_{n\to\infty}A_{in}(e_j)=\lim_{i\to\infty}\alpha_{ij}\quad(j=1,2,\cdots).$$

此即得出了定理所需之条件 (ii).

最后, 当令 $e_0=(1,1,\cdots)$ 时, 由于 $e_0\in(c)$, 当设 $e_0=\{\xi_i^{(0)}\}$ 时, 有 $\lim_{i\to\infty}\xi_i^{(0)}=1$. 从而再次利用 A 的保存性便可得到 $A(e_0)=1$, 即

$$1=A(e_0)=\lim_{i\to\infty}A_i(e_0)=\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}.$$

这样就得到了定理所需之条件 (iii).

充分性: 首先, 由定理的假设条件 (i) 可知: 对任意 $i\in\mathbb{N}$, 均有

$$\{\alpha_{ij}\}_j\in(\ell^1),$$

因而有 $A_i\in(c)^*$; 并且还有 $\|A_i\|\leqslant\rho\ (i=1,2,\cdots)$.

其次, 由定理的假设条件 (ii) 和 (iii), 对于上面所设的元 $e_j\ (j=1,2,\cdots),e_0$, 有

$$\lim_{i\to\infty}A_i(e_j)=0\quad(j=1,2,\cdots),$$
$$\lim_{i\to\infty}A_i(e_0')=1,$$

因此, 再由 $e_j=\{\xi_i^{(j)}\},e_0=\{\xi_i^0\}$ 的定义, 可导出

$$\lim_{i\to\infty}A_i(e_j)=I(e_j),\quad\lim_{i\to\infty}A_i(e_0)=I(e_0),$$

(其中, I 代表单位矩阵: 对任意 $x=\{\xi_i\}\in(c)$, 有 $I(x)=\lim_{i\to\infty}\xi_i$).

最后, 对于任意的元 $x=\{\xi_i\}\in(c)$, 由 §1.11 的例 3, 其均有分解式

$$x=\xi_0e_0+\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\xi_0)e_i$$

(即 $\{e_0, e_i\}$ 为空间 (c) 的一组基). 因而, 由元 $\{e_0, e_i\}$ 所张成的线性子空间是空间 (c) 内的稠集. 根据 §5.1 定理 2 的推理 2 之充分性则可导出: 对任意 $x = \{\xi_i\} \in (c)$, 从上面两段结果必可得到

$$\lim_{i\to\infty} A_i(x) = I(x),$$

即有

$$A(x) = I(x) = \lim_{i\to\infty} \xi_i.$$

此即证得 A 是保存的. □

例 3 (机械求积公式的收敛性)　设 $p(t) \geqslant 0, x(t) \in C[0,1]$, 又设机械求积公式

$$\int_0^1 p(t)x(t)dt \simeq \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^n)$$

(其中 $0 \leqslant t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \leqslant 1$), 对于次数 $n_0 \leqslant n$ 的一切多项式 y_{n_0} 是准确的 (即等式是成立的). 那么, 为使上面的近似过程收敛 (即: 对任意 $x(t) \in C[0,1]$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) = \int_0^1 p(t)x(t)dt \tag{5.4.1}$$

成立), 必须且只须存在一个与 n 无关的常数 ρ, 使得

$$\sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| \leqslant \rho \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

验证　此结论可以直接由 §5.1 定理 2 的推论 2 得到. 事实上, 当我们令泛函

$$f(x) = \int_0^1 p(t)x(t)dt,$$

及

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)});\quad \forall x(t) \in C[0,1] \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

时, 易知 $\{f_n\} \subset C[0,1]^*$, 且有

$$\|f_n\| = \sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由设即有: $\sup_n \|f_n\| \leqslant \rho$.

由于假设对任意次数 $n_0 \leqslant n$ 的多项式 $y_{n_0}^0(t)$ 均有

$$\int_0^1 p(t)y_{n_0}^0(t)dt = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} y_{n_0}^0(t_k^{(n)}),$$

所以我们推得, 对于每个多项式 $y(t)$, 均有关系式 (5.4.1) 成立, 即对于 $[0,1]$ 上的多项式全体 $P[0,1](\subset C[0,1])$ 均有

$$f_n(y) \to f(y) \quad (n\to\infty), \quad \forall y\in P[0,1].$$

最后, 注意到所有多项式的全体所成的线性子空间是稠于空间 $C[0,1]$ 的, 因而立即便可得到结论. □

例 4* **(Lagrange 插值公式的发散性, Faber 定理)** 假设在区间 $[0,1]$ 内插入点 $(t_k^{(n)})\,(1\leqslant k\leqslant n,\ n=1,2,\cdots)$, 其构成无穷维三角矩阵

$$T=\begin{pmatrix} t_1^{(1)} & & & & & \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & & & & \\ t_1^{(3)} & t_2^{(3)} & t_3^{(3)} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ t_1^{(n)} & t_2^{(n)} & t_3^{(n)} & & t_n^{(n)} & \cdots \\ \cdots & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

则必存在一连续函数 $x(t)\in C[0,1]$, 使其与插入点 $(t_k^{(n)})$ 相应的Lagrange(n 次) 插值多项式

$$[L_n(x)](t)=\sum_{k=1}^{n} x(t_k^{(n)})\jmath_k^{(n)}(t) \quad (n=1,2,\cdots)$$

(其中:

$$\jmath_k^{(n)}(t)=\frac{\omega_n(t)}{\omega_n'(t_k^{(n)})(t-t_k^{(n)})},$$
$$\omega_n(t)=(t-t_1^{(n)})(t-t_2^{(n)})\cdots(t-t_n^{(n)})),$$

当 $n\to\infty$ 时, 不一致收敛于 $x(t)$.

验证 考察在空间 $C[0,1]$ 上定义的 (上述) 一列算子 L_n:

$$[L_n(x)](t)=\sum_{k=1}^{n} x(t_k^{(n)})\jmath_k^{(n)}(t), \quad \forall x=x(t)\in C[0,1] \quad (n=1,2,\cdots).$$

那么 L_n 显然是线性的, 而且容易证明

$$\|L_n\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\sum_{k=1}^{n}|\jmath_k^{(n)}(t)| \quad (n=1,2,\cdots),$$

从而 $\{L_n\}$ 为 $C[0,1]$ 上的一列连续线性泛函; 此外还可以证明 [29]

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\sum_{k=1}^{n}|\jmath_k^{(n)}(t)|>\frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}} \quad (n=1,2,\cdots),$$

于是有

$$\|L_n\| \to \infty \quad (n \to \infty),$$

因此, 由共鸣定理的逆否命题可知：不可能对任意元 $x \in C[0,1]$, 均有 $L_n(x) \to x \quad (n \to \infty)$ 成立. 也即, 必存在一连续函数 $x(t) \in C[0,1]$, 使得其 Lagrange 内插多项式 $[L_n(x)](t)$ 当 $n \to \infty$ 时是不一致收敛于它的 (其实, 在 $C[0,1]$ 空间中, 上述不收敛的点构成了一个“第二纲”集并且其余集还是“第一纲的”). □

习 题 五

5.1 试证明：如果 $p(x)$ 为 γ 次加有限 (不取 $\pm\infty$) 泛函, 则

1) 当 $\gamma > \frac{1}{2}$ 时, 必有 $p(\theta) \geqslant 0$;

2) 当 $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ 时, 必有 $p(x) \leqslant 0 \ (\forall x \in E)$(负泛函);

3) 如果 $p(\theta) = 0$, 则当 $\gamma > 1$ 时, $p(x) \geqslant 0$(正泛函); 当 $\gamma < 1$ 时, $p(x) \leqslant 0$(负泛函).

5.2 设 $\{A_\lambda\colon \lambda \in \Lambda\}$ 为赋范空间 E 上定义的一族连续可加算子. 试证明：泛函 $p(x) = \sup_\lambda \|A_\lambda(x)\|$ 必为 E 上的次加、正齐性、下半连续的泛函.

(注意：我们称赋范空间 E 上的泛函 $p(x)$ 在点 x_0 是上 (下) 半连续的, 是指：对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\|x - x_0\| \leqslant \delta \Longrightarrow p(x) \leqslant p(x_0) + \varepsilon, (p(x_0) - \varepsilon \leqslant p(x))$ 成立.)

5.3 证明Гельфанд (盖尔芳德) 引理：对于 Banach 空间 E 上的非负、次加、正齐性泛函 $p(x)$, 如果对任意 $x \in E, x_n \to x$, 均有

$$\varliminf_{n\to\infty} p(x_n) \geqslant p(x),$$

那么 $p(x)$ 必 (强) 有界.

5.4 试证明 (异点凝聚原理)：如果 $T_{m,n} \quad (m, n = 1, 2, \cdots)$ 均为在第二纲赋范空间 E 上定义的连续可加算子, 且有

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_{m,n}\| = \infty \quad (m = 1, 2, \cdots),$$

那么, 在 E 中必存在一个第二纲集 Q, 其使 $E \backslash Q$ 是第一纲集, 且有

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_{\mathrm{m,n}}(x)\| = \infty, \quad \forall x \in Q \ \ (m = 1, 2, \cdots);$$

并解释此原理名称的含义.

注意, 关于有界线性算子族更一般的“异点凝聚原理”可以表述如下：

定理 设 $T_n(x, \tau)$ 是定义在 Banach 空间 E 上的一族连续线性算子, 它依赖于参数 $\tau \in [0,1]$, 并设对于任意的元 $x \in E$, $T_n(x, \dot{\tau})$ 是连续依赖于 τ 的, 且对于每个 $\tau \in [0,1]$, 均存在一点 x_τ, 使得

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_n(x_\tau, \tau)\| = \infty,$$

那么, 必存在元 x, 使得

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_n(x, \tau)\| = \infty$$

对 τ 的一个预定的不可数集成立.

5.5 试说明：数学分析中的关于极限的 Stolz 定理是 §5.4 的关于"保存矩阵"的特例.

5.6 设数列 $\{\alpha_n\}$ 满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = 1,\ \alpha_n \geqslant 0\ \ (n=1,2,\cdots),$$

且对任意 $x=\{\xi_n\}\in(m)$, 数列集

$$M_x=\left\{\{\eta_i\}\colon\ \eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_{n_{i+j}}\alpha_j, \{\xi_{n_i}\}\subset\{\xi_n\};\ i\in\mathbb{N}\right\}.$$

试证明：$x=\{\xi_n\}$ 的任意极限点必为集 M_x 中某一数列的极限.

5.7 设数列 $\{\alpha_n\}$ 对于任意元 $x=\{\xi_n\}\in(c)$, 均使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n$ 收敛. 试证明：此时必有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|<\infty.$$

5.8 设积分 $\int_0^1 b(t)x(t)dt$ 对于一切元 $x=x(t)\in L^2[0,1]$ 均存在, 试证明：$b(t)\in L^2[0,1]$.

5.9 设 T 为赋范空间 E 到 E_1 内的线性算子, 并设 E_1^* 内有某一闭线性子空间 G_1^*, 其为 E_1 的"确定集"(即有关系式

$$\|y\|=\sup_{g\in G_1^*,\|g\|=1}|g(y)|,\quad \forall y\in E_1$$

成立), 且有 $G_1^*\subset\mathcal{D}(T^*)$. 试证明：此时 T 必为一连续线性算子.

第六章　Hilbert 空间

Hilbert 空间是有限维的 Euclid 空间的推广, 有着许多与 Euclid 空间相类似的几何性质. 同时 Hilbert 空间作为一个特殊的 Banach 空间, 由于它具有"内积"的概念, 进而可以考虑空间中向量之间的夹角, 这样就表现出了更加丰富的几何性质. 本章所讨论的正是 Hilbert 空间的各种最基本的几何性质. Hilbert 空间在数学物理、量子力学、微分方程理论、最优化理论以及控制论等学科中都有着及其重要而且广泛的应用.

§6.1　Hilbert 空间的定义及例子

下面所考虑的均是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 其中数域 $\mathbb{K}$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

定义 1　设 E 是线性空间, 在积空间 $E\times E$ 上定义"有序"二元泛函 $(\cdot,\cdot)$, 如果对于任意的 $x,y,z\in E$ 和 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 其满足下列条件:

(i) $(x,x)\geqslant 0$, 并且 $(x,x)=0$ 的充要条件是 $x=\theta$;

(ii) $(x,y)=\overline{(y,x)}$;

(iii) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$.

则称 $(\cdot,\cdot)$ 为 E 上的**内积**. 而称定义了内积的线性空间 E 为**内积空间**.

注　由内积的定义可知, 对于任意的 $x,y,z\in E,\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 均有

$$(x,\alpha y+\beta z)=\overline{\alpha}(x,y)+\overline{\beta}(x,z).$$

对于内积空间, 下面的不等式是十分有用的.

定理 1 (Cauchy-Schwarz不等式)　设 E 为内积空间, 则对于任意的 $x,y\in E$, 均有以下不等式成立:

$$|(x,y)|^2\leqslant(x,x)\cdot(y,y),\tag{6.1.1}$$

并且等号成立的充要条件是 x 与 y 线性相关, 即 $y=\alpha x$ (其中 α 为某一常数).

证明　当 $y=\theta$ 时, 式 (6.1.1) 显然是成立的, 故下面设 $y\neq\theta$.

对任意的 $\lambda\in\mathbb{K}$, 由 $(x+\lambda y,x+\lambda y)\geqslant 0$, 即知

$$(x,x)+\lambda(y,x)+\overline{\lambda}(x,y)+\lambda\overline{\lambda}(y,y)\geqslant 0\tag{6.1.2}$$

特取 $\lambda=-\frac{(x,y)}{(y,y)}$, 代入式 (6.1.2) 就可得到

$$(x,x)-2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\geqslant 0.$$

这样就得到式 (6.1.1).

为证定理的后半段结论, 首先注意到, 当 $y=\alpha x$ 时, 式 (6.1.1) 中的等号显然是成立的. 另一方面, 若式 (6.1.1) 中的等号是成立的, 则有 $(x,y)\,(y,x)=(x,x)\,(y,y)$, 因此

$$\begin{aligned}&((y,y)x-(x,y)y,(y,y)x-(x,y)y)\\=&(y,y)^2(x,x)-(y,y)(x,y)(x,y)-(x,y)(y,y)(y,x)+(x,y)(x,y)(y,y)=0,\end{aligned}$$

由此即得 $(y,y)x=(x,y)y$. □

注 1 设 E 是内积空间, 如果令 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, 那么 $\|x\|$ 为 E 上的范数, 因此, 内积空间必为赋范空间.

事实上, 此时Cauchy-Schwarz不等式可以写为 $|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$ 的形式, 由此很容易可以验证出 $\|\cdot\|$ 满足范数的定义.

注 2 内积 (x,y) 是 x 和 y 的二元连续函数. 也就是说, 如果

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=y,$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x,y).$$

事实上, 由 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$|(x_n,y)-(x,y)|=|(x_n-x,y)|\leqslant\|x_n-x\|\cdot\|y\|,$$

因而可以得到

$$(x_n,y)\to(x,y)(\text{类似地可得}(x,y_n)\to(x,y)). \tag{6.1.3}$$

再由 $|(x_n-x,y_n-y)|\leqslant\|x_n-x\|\cdot\|y_n-y\|$ 又可得到

$$(x_n-x,y_n-y)\to 0. \tag{6.1.4}$$

又注意到

$$(x_n,y_n)-(x,y)=(x_n-x,y_n-y)+(x_n,y)+(x,y_n)-2(x,y). \tag{6.1.5}$$

因此, 当 $x_n\to x,y_n\to y$ 时, 由式 (6.1.3) 及 (6.1.4), 可导出

$$(x_n,y_n)\to(x,y)\quad(n\to\infty).$$ □

定义 2 如果内积空间 E 在范数 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ 下是Banach空间, 则称 E 为 **Hilbert 空间**.

下面举几个常见的 Hilbert 空间的例子：

例 1　Euclid空间 $\mathbb{K}^n$ 是Hilbert空间, 其上的内积定义为

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\,\overline{\eta_k},\quad \forall x=\{\xi_k\}、y=\{\eta_k\}\in\mathbb{K}^n,$$

例 2　设 (Ω,Σ,μ) 为测度空间, $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ 是定义在 Ω 上对 μ 平方绝对可积的可测函数之全体所组成的线性空间. 其内定义内积为

$$(x,y)=\int_{\Omega}x(t)\overline{y(t)}\mu(dt),\quad \forall x=x(t)、y=y(t)\in L^2(\Omega,\Sigma,\mu),$$

则 $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ 是一个Hilbert空间.

事实上, 由 $(\cdot,\cdot)$ 诱导的范数为

$$\|x\|=\left(\int_{\Omega}|x(t)|^2\mu(dt)\right)^{\frac{1}{2}},$$

且 $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ 在此范数下显然是Banach空间, 故 $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ 在 (x,y) 下成为一个Hilbert空间.

特别地, 空间 $\ell^2, L^2[0,1]$ 均是Hilbert空间.

例 3　设 E_1 和 E_2 均是Hilbert空间, E 表示其笛卡儿乘积, 即 $E=\{(x_1,x_2):\ x_1\in E_1, x_2\in E_2\}$. 在 E 上定义内积如下：对任意 $x=(x_1,x_2)$、$y=(y_1,y_2)\in E$,

$$(x,y)=((x_1,x_2),(y_1,y_2))=(x_1,y_1)+(x_2,y_2),$$

则 E 在此内积下构成Hilbert空间.

下面再举出一个不完备内积空间的例子：

例 4　在 (c_{00}) 中定义内积如下：对任意 $x=\{\xi_n\}$、$y=\{\eta_n\}\in(c_{00})$,

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\,\overline{\eta_n},$$

则 (c_{00}) 在 $(\cdot,\cdot)$ 下构成一个内积空间, 但不是Hilbert空间.

事实上, 容易验证元列 $\{x_n\}=\{(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,\cdots)\}$ 是 (c_{00}) 中的 Cauchy 列, 但其极限 $x_0=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots)\notin(c_{00})$.

§6.1 附录　赋范空间可以定义 (等价) 内积的特征

由定理 1 后的注 1 可知, 内积空间必为赋范空间, 但反过来却是未必正确的. 这样很自然地就要问, 在赋范空间上, 何时可以定义内积, 使得由“内积”导出的拓扑与“范数”导出的拓扑是相同的 (此即称之“可以” (从范) 定义内积的含义)? 下面的定理就是对此问题的回答.

定理 2 (Fréchet-Jordan-Von Neumann) 为使线性空间 E 成为一个内积空间, 其充要条件是 E 为一个赋范空间, 并且其范数满足"平行四边形法则", 即有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2), \quad \forall x,y\in E.$$

证明 必要性由前面的注已知内积空间必是赋范空间, 故下面只需证明此范数 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形法则 (即: 任意平行四边形, 其对角线长的平方和等于其四边长的平方和).

从内积空间范数的定义, 这是显然的, 因为对任意 $x,y\in E$, 直接可得

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2&=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)\\&=2(x,x)+2(y,y)\\&=2(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

充分性. 由必要性可知, 如果 E 为内积空间, 则必有 $\sqrt{(x,x)}=\|x\|$, 并且

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}(x,y)&=\|x+y\|^2-(\|x\|^2+\|y\|^2),\\-2\mathrm{Re}(x,y)&=2\mathrm{Re}(x,-y)=\|x-y\|-(\|x\|^2+\|y\|^2),\end{aligned}$$

于是有

$$4\mathrm{Re}(x,y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2.$$

我们就按上面的方式在赋范空间内定义内积, 下面将分实空间和复空间两种情形来分别讨论.

(1) 设 E 为实空间. 在 E 中定义内积如下:

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2). \tag{6.1.6}$$

下面就逐条验证其满足内积的定义.

事实上, 由范数的定义, 从式 (6.1.6) 可知: 对任意 $x\in E$, 均有 $(x,x)\geqslant 0$, 且当 $x\neq\theta$ 时, 有 $(x,x)>0$, 此即得到了本节开始内积定义中的 (i). 又由该式定义可知 $(x,y)=(y,x)(\forall x,y\in E)$, 此即得到了内积定义中的 (ii).

再注意到此时 E 中范数的假设条件, 对任意的 $x,y,z\in E$, 有

$$\|(x+z)+y\|^2+\|(x+z)-y\|^2=2(\|x+z\|^2+\|y\|^2),$$

$$\|(x-z)+y\|^2+\|(x-z)-y\|^2=2(\|x-z\|^2+\|y\|^2);$$

以上两式相减可得

$$\begin{aligned}&2(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2)\\&=\|(x+y)+z\|^2-\|(x+y)-z\|^2+\|(x-y)+z\|^2-\|(x-y)-z\|^2.\end{aligned}$$

注意到前面式 (6.1.6), 上式为

$$(x+y,z)+(x-y,z)=2(x,z),\quad \forall x,y,z\in E. \tag{6.1.7}$$

特别地, 由 x,y,z 的任意性, 可将式 (6.1.7) 中的 x 换为 $\frac{x+y}{2}$, y 换为 $\frac{x-y}{2}$, 便可得出

$$(x,z)+(y,z)=2\left(\frac{x+y}{2},z\right),\quad \forall x,y,z\in E. \tag{6.1.8}$$

同样, 由式 (6.1.6) 可知 $(\theta,z)=0$, 当在式 (6.1.7) 中令 $y=x$ 时, 又有

$$(2x,z)=2(x,z),\qquad \forall x,z\in E.$$

由此及式 (6.1.8), 则可导出

$$(x+y,z)=2\left(\frac{x+y}{2},z\right)=(x,z)+(y,z),\quad \forall x,y,z\in E. \tag{6.1.9}$$

从式 (6.1.9) 则知：由式 (6.1.6) 定义的内积 (x,y), 当令 $\varphi(x)=(x,z)(\forall x\in E)$ 时, φ 必为可加连续函数, 故由 §2.1 定理 2 便可导出, 其必为实齐性泛函；因而与式 (6.1.9) 结合便得到了内积定义中的 (iii). 总上即知 E 此时为实内积空间.

(2) 设 E 为复空间. 再次回忆复线性泛函 $\varphi(x)$ 实部与虚部的关系：$\mathrm{Im}\varphi(x)=-\mathrm{Re}\varphi(\mathrm{i}x)$, 我们此时可定义 E 上的内积为

$$\begin{aligned}(x,y)&=\mathrm{Re}(x,y)-\mathrm{i}\mathrm{Re}(\mathrm{i}x,y)\\&=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)-\frac{\mathrm{i}}{4}(\|\mathrm{i}x+y\|^2-\|\mathrm{i}x-y\|^2).\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

下面逐条验证其满足内积的定义：

首先, 对于任意的 $x,y\in E$,

$$\begin{aligned}\overline{(x,y)}&=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+\frac{\mathrm{i}}{4}(\|\mathrm{i}x+y\|^2-\|\mathrm{i}x-y\|^2)\\&=\frac{1}{4}(\|y+x\|^2-\|y-x\|^2)-\frac{\mathrm{i}}{4}(\|\mathrm{i}y+x\|^2+\|\mathrm{i}y-x\|^2)=(y,x),\end{aligned}$$

从而内积中的 (ii) 得证.

其次, 由 $(x,x)=\overline{(x,x)}\quad(\forall x\in E)$ 可知, (x,x) 为实数, 故由定义有 $(x,x)=\mathrm{Re}(x,x)=\|x\|^2$. 由此就导出了内积定义中的 (i).

最后, 由 (1) 已知, $\mathrm{Re}(x,y)$ 对 x 是可加的, 因此, 对于任意的 $x,y,z\in E$,

$$\begin{aligned}
&(x+y,z)=\mathrm{Re}(x+y,z)-\mathrm{iRe}(\mathrm{i}(x+y),z)\\
=&\mathrm{Re}(x,z)+\mathrm{Re}(y,z)-\mathrm{i}[\mathrm{Re}(\mathrm{i}x,z)+\mathrm{Re}(\mathrm{i}y,z)]\\
=&[\mathrm{Re}(x,z)-\mathrm{iRe}(\mathrm{i}x,z)]+[\mathrm{Re}(y,z)-\mathrm{iRe}(\mathrm{i}y,z)]\\
=&(x,z)+(y,z)\quad(\text{即：}(x,z)\text{ 对第一变量是可加的}).
\end{aligned}$$

同样由前面 (1) 已知, $\mathrm{Re}(x,y)$ 是具有实齐性的, 故要证明 (x,y) 的复齐性, 只需证明 $(\mathrm{i}x,y)=\mathrm{i}(x,y)(\forall x,y\in E)$ 即可. 事实上, 由 (x,y) 的定义及 $\mathrm{Re}(x,y)$ 的实齐性容易导出

$$\begin{aligned}
(\mathrm{i}x,y)&=\mathrm{Re}(\mathrm{i}x,y)-\mathrm{iRe}(\mathrm{i}(\mathrm{i}x),y)\\
&=\mathrm{Re}(\mathrm{i}x,y)-\mathrm{iRe}(-x,y)=\mathrm{Re}(\mathrm{i}x,y)+\mathrm{iRe}(x,y)\\
&=\mathrm{i}[\mathrm{Re}(x,y)-\mathrm{iRe}(\mathrm{i}x,y)]=\mathrm{i}(x,y),
\end{aligned}$$

故内积定义中的 (iii) 是成立的, 因此 E 是复内积空间. □

注 *此定理表明：当一个赋范空间的范数满足平行四边形法则时, 空间可以在保持其范数拓扑的情形下定义内积, 并且此内积可以导出原来的范数.*

由上定理立即可以给出不可定义内积的赋范空间的例子.

例 *在二维Euclid空间 $\mathbb{R}^2$ 中, 如果定义范数*

$$\|x\|_p=\|(\xi_1,\xi_2)\|_p=(|\xi_1|^p+|\xi_2|^p)^{\frac{1}{p}}\quad(p\geqslant 1),$$

则在此赋范空间中, 除了 $p=2$ 的情形以外, 均不可定义内积.

验证 显然, 当 $p\geqslant 1$ 时, $\|\cdot\|_p$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的范数. 当 $p=2$ 时, 直接验证即知 $\|\cdot\|_2$ 满足平行四边形法则, 从而可以在其上定义内积.

当 $p\neq 2$ 时, 如果空间可定义内积, 使得 $(x,x)^{\frac{1}{2}}=\|x\|(\forall x\in E)$, 则对任意的 $x=(\xi_1,\xi_2),y=(\eta_1,\eta_2)\in\mathbb{R}^2$, 应有

$$\begin{aligned}
&(|\xi_1+\eta_1|^p+|\xi_2+\eta_2|^p)^{\frac{2}{p}}+(|\xi_1-\eta_1|^p+|\xi_2-\eta_2|^p)^{\frac{2}{p}}\\
=&\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\\
=&2[(|\xi_1|^p+|\xi_2|^p)^{\frac{2}{p}}+(|\eta_1|^p+|\eta_2|^p)^{\frac{2}{p}}].
\end{aligned}$$

特别地, 取 $x=e_1=(1,0),y=e_2=(0,1)$, 则应有 $2(\sqrt[p]{2})^2=4$, 即 $2^{\frac{2}{p}}=2$. 然而, 当 $p\neq 2$ 时, 此式显然是不成立的. □

§6.2 正 交 性

正交性是 Hilbert 空间理论中最基本的概念, 是内积空间特有的性质, 在此类空间中的许多重要研究课题都是离不开“正交”这一特性的.

定义 1 设 E 为内积空间, 元 $x, y \in E$ 称为是**正交** 的 (记为 $x \perp y$), 是指其有 $(x, y) = 0$. E 的两个子集 A 和 B 称为**正交** 的 (记为 $A \perp B$), 是指对于任意的 $x \in A, y \in B$, 均有 $(x, y) = 0$.

下面的命题可由正交的定义直接得到 (如未说明, 空间均为内积空间):

命题 1 若 $x \perp y$, 则 x 与 y 必是线性无关的.

注 利用线性代数中的类似方法可以知道下面的结论:

定理 1 (Gram-Schmit正交化过程) 设 $\{x_n\}$ 为内积空间 E 中的一列线性无关元, 则必存在一个两两正交的元列 $\{e_n\}$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 均有

$$\operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\} = \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_n\}.$$

命题 2 如果 $x \perp y_i$ $(\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, n)$, 那么, 对于任意的 $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, n)$, 则有 $x \perp \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$.

命题 3 如果 $x \perp y_n$ $(n \in \mathbb{N})$, 并且 $\lim_{n \to \infty} y_n = y_0$, 那么 $x \perp y_0$.

命题 4 (Pythagoras公式) 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是两两正交的, 那么

$$\left\| \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_{\mathrm{i}} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

命题 4 可以有如下形式的推广:

命题 5 设 E 为Hilbert空间, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为 E 中的一列两两正交的元, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ 收敛; 并且此时有

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

事实上, 注意到: 对任意 $m, n \in \mathbb{N}$ 且 $m > n$, 有

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|^2,$$

由此, 注意到空间的完备性, 我们则不难得到本命题的结论.

定义 2 如果 E 为内积空间, A 为 E 的子集, 那么称集 $A^{\perp} \triangleq \{x \in E\colon x \perp A\}$ 为 A 的**正交补**.

注 1 由命题 2 和命题 3 知：$A^{\perp}$ 为 E 的闭线性子空间.

注 2 若 $A \subset B(\subset E)$, 则 $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

注 3 $A \subset A^{\perp\perp}; A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

事实上, 对任意 $x \in A$, 有 $x \perp A^{\perp}$, 从而 $x \in A^{\perp\perp}$, 即有 $A \subset A^{\perp\perp}$. 再由前式, 从注 2 进而又有 $A^{\perp\perp\perp} \subset A^{\perp}$. 另一方面, 对任意 $x \in A^{\perp}$, 有 $x \perp A^{\perp\perp}$, 从而 $x \in A^{\perp\perp\perp}$.

注 4 $\overline{\text{span}}(A)^{\perp} = A^{\perp}$ (这里, $\overline{\text{span}}$ 表示“线性张”后取闭包).

事实上, 由 $A \subset \overline{\text{span}}(A)$, 故从注 2 可知 $\overline{\text{span}}(A)^{\perp} \subset A^{\perp}$. 另一方面, 对任意 $x \in A^{\perp}$, 有 $A \subset \{x\}^{\perp}$. 又由注 1 知 $\{x\}^{\perp}$ 为 E 中的闭线性子空间, 故 $\overline{\text{span}}(A) \subset \{x\}^{\perp}$, 即有 $x \in \overline{\text{span}}(A)^{\perp}$.

定义 3 设 $\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 为内积空间 E 中内的一族元. 如果对于任意的 $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ 且 $\lambda \neq \lambda'$, 均有 $e_\lambda \perp e_{\lambda'}$, 则称 $\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 为 E 中的**正交系**. 如果还有：对任意的 $\lambda \in \Lambda, \|e_\lambda\| = 1$, 则称 $\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 为 E 中的**标准正交系**.

定义 4 设 $\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 为内积空间 E 内的一个标准正交系, $x \in E$, 则称数 (x, e_λ) 为 x 关于 e_λ 的**Fourier 系数**.

定理 2 (Bessel不等式) 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为内积空间 E 中的标准正交系, $x \in E$, 则有

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2;$$

因而有

$$\sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

证明 令 $h = x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k$, 则 $h \perp e_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 因此

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left(h + \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k,\ h + \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\right) \\ &= \|h\|^2 + \left\|\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\right\|^2 = \|h\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2.\end{aligned}$$

而由 $\|h\| \geqslant 0$, 显然可知, $\sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2$. □

从定理 2 容易直接得到下面的推理：

推理 1 设 $\{e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ 为内积空间 E 的标准正交系, $x \in E$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

注 设 $\{e_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$ 为内积空间 E 的标准正交系, $x\in E$, 则 $\{\lambda\in\Lambda: (x,e_\lambda)\neq 0\}$ 为可数集.

事实上, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 由 Bessel 不等式可知 $\{\lambda\in\Lambda: |(x,e_\lambda)|>\frac{1}{n}\}$ 为有限集合, 因此 $\{\lambda\in\Lambda: (x,e_\lambda)\neq 0\}$ 为可数集.

推理 2 设 $\{e_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$ 为内积空间 E 的标准正交系, $x\in E$, 则有

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2\leqslant\|x\|^2.$$

证明 只需注意到上式左边的对 $\lambda\in\Lambda$ 的求和其实仅为"可数和"即可. □

定义 5 设 E 为内积空间, $\{e_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$ 为 E 的标准正交系, 如果对任意的 $x\in E$, 均有唯一的表达式

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda e_\lambda$$

成立, 则称 $\{e_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$ 为 E 的一个**标准正交基**.

注 1 对于任意的 $y\in E, x=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda e_\lambda$, 有

$$(x,y)=\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda e_\lambda,y\right)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda(e_\lambda,y).$$

事实上, 对于 Λ 的任意"有限"子集 Λ_0, 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\alpha_\lambda(e_\lambda,y)-(x,y)\right|&=\left|\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\alpha_\lambda e_\lambda-x,y\Big)\right|\\&\leqslant\left\|\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\alpha_\lambda e_\lambda-x\right\|\cdot\|y\|,\end{aligned}$$

由此即可得出所需的关系式.

注 2 由 $x=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda e_\lambda$ 可知: 对任意 $\lambda_0\in\Lambda$,

$$(x,e_{\lambda_0})=\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda e_\lambda,e_{\lambda_0}\right)=\alpha_{\lambda_0}.$$

因此, 若 $\{e_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$ 为 E 的标准正交基, 必有

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda\quad(\forall x\in E).$$

定理 3 设 E 为Hilbert空间, $\{e_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$ 为 E 内的一个标准正交系, 则下列条件是等价的:

(1) $\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 为 E 的一个标准正交基;

(2) 若 $x \in E$ 且 $x \perp e_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, 则有 $x = \theta$ (即: $\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\}^\perp = \{\theta\}$);

(3) $\overline{\text{span}}\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\} = E$;

(4) 对任意的 $x, y \in E$, 有

$$(x, y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda)(e_\lambda, y);$$

(5) **(Parseval等式)**对任意的 $x \in E$, 有

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x, e_\lambda)|^2.$$

证明 (1)⇒(3): 由标准正交基的定义及推理 2 可知此结论是成立的.

(3)⇒(2): 由条件知 $(\overline{\text{span}}\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\})^\perp = E^\perp = \{\theta\}$. 又由定义 2 后的注 4 知 $\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\}^\perp = (\overline{\text{span}}\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\})^\perp = \{\theta\}$.

(2)⇒(1): 任取 $x \in E$, 令 $y = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda) e_\lambda$, 由 Bessel 不等式 (定理 2), 推理 1 后的注以及空间的完备性, 可知元 y 是存在的, 则对任意的 $\lambda_0 \in \Lambda$, 有

$$\begin{aligned}(x - y, e_{\lambda_0}) &= (x, e_{\lambda_0}) - \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda) e_\lambda, e_{\lambda_0}\right) \\ &= (x, e_{\lambda_0}) - \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda)(e_\lambda, e_{\lambda_0}) = (x, e_{\lambda_0}) - (x, e_{\lambda_0}) = 0,\end{aligned}$$

从而由 (2) 的假设可知 $x - y = \theta$. 此即说明 $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda) e_\lambda$, 因此 $\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 为 E 的标准正交基.

(1)⇒(4): 由于 $\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 为 E 的标准直交基, 故对任意元 $x, y \in E$, 必有

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda) e_\lambda, \quad y = \sum_{\lambda \in \Lambda} (y, e_\lambda) e_\lambda.$$

因此由定义 5 后注 1 可知

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda) e_\lambda, y\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda)(e_\lambda, y) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda) \left(e_\lambda, \sum_{\lambda' \in \Lambda} (y, e_{\lambda'}) e_{\lambda'}\right) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda) \sum_{\lambda' \in \Lambda} \overline{(y, e_{\lambda'})} (e_\lambda, e_{\lambda'}) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda)(e_\lambda, y).\end{aligned}$$

(4)⇒(5): 在 (4) 中令 $y = x$ 就可得到 (5).

(5)⇒(1): 对于任意的 $x \in E$, 由 (5) 及命题 5 知 $\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$ 是存在的, 且不妨设在 Λ 中使得满足 $(x,e_\lambda)\neq 0$ 的 λ 为 $\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

由定理 2 知, 对任意 $n\in\mathbb{N}$,

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2,$$

因此由 (5) 可知

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right\|^2=0,$$

从而

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda.$$

□

注 1　任意非 $\{\theta\}$ 的Hilbert空间均存在标准正交基.

事实上, 首先, 由定理 1 可知内积空间 E 上必存在非空的标准正交系. 那么, 令 $\mathcal{F}$ 表示 E 上的标准正交系的集合, 则由Zorn引理可知, $\mathcal{F}$ 必存在极大元 $\mathcal{H}$. 又因 $\mathcal{H}$ 的极大性可知: $\mathcal{H}^\perp=\{\theta\}$. 故从上面的定理中的 (2) ⇒ (1) (注意空间是完备的), 我们立即导出: $\mathcal{H}$ 为 E 的标准正交基.

下面就举出一些关于正交系和标准正交基的例子.

例 1　设 $e_n=(0,\cdots,0,\underset{(n)}{1},0,\cdots)$　$(\forall n\in\mathbb{N})$, 则 $\{e_1,e_2,\cdots\}$ 为 (ℓ^2) 的标准正交系. 更进一步地可知, $\{e_1,e_2,\cdots\}$ 为 (ℓ^2) 的标准正交基.

例 2　设 $e_n(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt$, $t\in[-\pi,\pi](\forall n\in\mathbb{N})$; 则显然 $\{e_n\}$ 为空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 的正交“系”.

但对于 $x(t)=\cos t$ 而言, 由于

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n(t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t,\sin nt\;dt\right]\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}0\cdot\sin nt=0\neq\cos t,\end{aligned}$$

从而 $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt\}$ 不是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的标准正交“基”.

例 3　令 $e_0(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}, e_{2n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, e_{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt$ $(n\in\mathbb{N})$; 则 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $L^2[-\pi,\pi]$ 的标准正交基.

事实上, 直接验证即可知 $\{e_n\}$ 为 $L^2[-\pi,\pi]$ 的标准正交系, 又由于 $\overline{\text{span}}\{e_n\}=L^2[-\pi,\pi]$, 因此 $\{e_n\}$ 为 $L^2[-\pi,\pi]$ 的标准正交基.

注 2 对于任意的 $f \in L^2[-\pi,\pi]$, f 的Fourier级数为

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

(其中:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt \quad (n \in \mathbb{N})).$$

此级数对于任意 $t \in [-\pi,\pi]$ 是处处收敛的, 此时的相应Parseval等式即为

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2\pi\alpha_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

下面, 我们首先给出在 Hilbert 空间 (完备的内积空间) 中有关 §3.7 所介绍的最佳逼近问题关于存在及唯一性的肯定回答.

定理 4 设 A 为Hilbert空间 E 内的凸集, 则对任意 $x \in E$, 必存在唯一的 $y_0 \in A$, 使得

$$\|x - y_0\| = \inf_{y\in A}\|x - y\|.$$

证明 将 $\inf_{y\in A}\|x-y\|$ 记为 d. 由下确界的定义可知, 存在元列 $\{y_n\} \subset A$, 使得 $\lim_{n\to\infty}\|x - y_n\| = d$. 又由 A 为凸集, 故对任意 $m, n \in \mathbb{N}$, 有 $\frac{y_m+y_n}{2} \in A$, 因而可知: $\|x - \frac{y_m+y_n}{2}\| \geqslant d$.

由于此时范数 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形法则, 故有

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= \|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2\\ &= 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) - 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2,\end{aligned}$$

由此, 从上段结果可知 $\|y_m - y_n\| \to 0$ $(m,n\to\infty)$, 即 $\{y_n\}$ 为 E 中的 Cauchy 列. 又由于 E 为 Hilbert 空间且 A 为闭集, 可知存在 $y_0 \in A$, 使得 $y_n \to y_0$, 故此 y_0 即为所求.

下面来证明 y_0 的唯一性. 事实上, 如果还存在 $y_0' \in A$, 亦使 $\|x-y_0\| = \|x-y_0'\| = d$, 则由 A 为凸集可知 $\frac{y_0+y_0'}{2} \in A$, 因此类似前面可得

$$\begin{aligned}\|y_0 - y_0'\|^2 &= \|(x-y_0')-(x-y_0)\|^2\\ &= 2(\|x-y_0\|^2 + \|x-y_0'\|^2) - 4\left\|x - \frac{y_0+y_0'}{2}\right\|^2\\ &\leqslant 2(d^2+d^2) - 4d^2 = 0.\end{aligned}$$

从而导出 $y_0 = y_0'$. □

下面所介绍的“投影定理”, 不仅在理论上有重要意义, 而且有着广泛的应用.

定理 5 (投影定理)　设 E 为Hilbert空间, M 为 E 内的闭线性子空间, 则对于任意的 $x \in E$, x 必可唯一地写成 $x = y + z$ 的形式 (其中 $y \in M, z \in M^{\perp}$). 并且还有关系式

$$\|x - y\| = \inf_{y' \in M} \|x - y'\|$$

成立 (此分解称作“正交分解”, 并称 y 为 x 在 M 上的“正交投影”).

证明　如果 $x \in M$, 则取 $y = x, z = \theta$ 即可.

如果 $x \notin M$, 则由定理 4 可知, 存在 $y \in M$, 使得

$$\|x - y\| = \inf_{y' \in M} \|x - y'\| \triangleq d.$$

令 $z = x - y$, 故下面只需证明 $z \in M^{\perp}$. 事实上, 对任意 $\alpha \in \mathbb{K}, y' \in M$, 有 $y - \alpha y' \in M$, 则 $\|z + \alpha y'\| = \|x - (y - \alpha y')\| \geqslant d$. 即有

$$\|z\|^2 + 2\mathrm{Re}\overline{\alpha}(z, y') + |\alpha|^2 \|y'\|^2 \geqslant d^2.$$

当 $y' \neq \theta$ 时, 令 $\alpha = -\frac{(z, y')}{\|y'\|^2}$ (并且注意到 $\|z\| = d$) 可知

$$-\frac{|(z, y')|^2}{\|y'\|^2} \geqslant 0,$$

因此 $(z, y') = 0$. 这样就证明了 $z \in M^{\perp}$.

如果 $x = y + z = y' + z'$, 则有 $y - y' = z' - z$. 又由 M 和 $M^{\perp}$ 均为 E 的线性子空间可知, $y - y'$, $z' - z \in M \cap M^{\perp}$, 因此, $y = y', z = z'$. 这就证明了投影分解的唯一性. □

注 1　对Hilbert空间 E 中的任一“闭”线性子空间 M, 有 $M = M^{\perp\perp}$.

注 2　对Hilbert空间 E 中的任一子集 A, 有 $\overline{\mathrm{span}}(A) = A^{\perp\perp}$.

注 3　由定理 5 可以看出: 若 M 为Hilbert空间的“闭”线性子空间, 则

$$E = M \oplus M^{\perp}.$$

此分解称为空间的“正交分解”.

由定理 5 可以定义 E 上的**正交投影算子** P_M: $E \to M$ 为 $P_M(x) = y$(这里, y 依定理 5 由 x 唯一确定), 则此投影算子 P_M 具有下面的性质:

定理 6　设 M 为Hilbert空间 E 的闭线性子空间, P_M 为从 E 到 M 的“正交投影”, 则 P_M 满足以下性质:

(i) P_M 为 E 上的线性“满”算子;

(ii) $\|P_M x\| \leqslant \|x\|$, $\forall x \in E$;

(iii) $P_M^2 = P_M$;

(iv) $\mathrm{ran}P_M = M$, $\ker P_M = M^{\perp}$ (这里: $\mathrm{ran}P_M = \mathcal{W}(P_M)$ 为 P_M 的“值域”, $\ker P_M = N(P_M)$ 为 P_M 的“零空间”).

证明 (i) 由 M 为 E 的子空间及 P_M 的定义可知, P_M 为满的.

另一方面, 对于任意的 $x_1, x_2 \in E$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, 由定理 5 可知, 对任意 $y \in M$, 有

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - [\alpha_1 P_M(x_1) + \alpha_2 P_M(x_2)], y) \\
=&\alpha_1(x_1 - P_M(x_1), y) + \alpha_2(x_2 - P_M(x_2), y) = 0,
\end{aligned}
$$

从而 $\alpha_1 P_M(x_1) + \alpha_2 P_M(x_2)$ 也是 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ 在 M 上的正交投影. 故由正交投影的唯一性可以看出: $P_M(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P_M(x_1) + \alpha_2 P_M(x_2)$.

(ii) 对于任意的 $x_1 \in E$, 由于 $x_1 = P_M(x_1) + [x_1 - P_M(x_1)]$, 且 $P_M(x_1) \perp [x_1 - P_M(x_1)]$, 因此 $\|x_1\|^2 = \|P_M(x_1)\|^2 + \|x_1 - P_M(x_1)\|^2 \geqslant \|P_M(x_1)\|^2$.

(iii) 如果 $y \in M$, 则有 $P_M(y) = y$. 从而对于任意的 $x_1 \in E$, 由于 $P_M(x_1) \in M$, 故有 $P_M^2(x_1) = P_M(P_M(x_1)) = P_M(x_1)$.

(iv) 直接由 P_M 的定义可以验证得到. □

§6.3 Hilbert 空间上的算子

首先, 考虑 Hilbert 空间上的连续线性泛函的表现形式, 这就是下面著名的 Riesz 表现定理:

定理 1 (Riesz 表现定理) 设 f 为Hilbert空间 E 上的连续线性泛函, 则必存在唯一的 $z \in E$, 使得 $f(x) = (x, z)$ $(\forall x \in E)$; 而且 $\|z\| = \|f\|$.

证明 若 f 为 E 上的零泛函, 则取 $z = \theta$ 即可.

若 f 不是零泛函, 则零空间 $\ker f$ 为 E 的闭线性真子空间, 故从前面投影定理 (§6.2 定理 5) 可知: 必存在 $z_1 \in (\ker f)^{\perp}$, 使得 $f(z_1) = 1$.

对于任意的 $x \in E$, $f(x - f(x)z_1) = f(x) - f(x)f(z_1) = 0$, 从而 $x - f(x)z_1 \in \ker f$. 又由 $z_1 \in (\ker f)^{\perp}$ 可知 $(x - f(x)z_1, z_1) = 0$, 此即有 $(x, z_1) = f(x)(z_1, z_1)$, 故 $z = \frac{z_1}{(z_1, z_1)}$ 即为所求.

如果还有 $z' \in E$, 使得 $(x, z) = (x, z')$ $(\forall x \in E)$, 那么, 必可以得到 $z - z' \perp E$, 由此就可直接导出 $z = z'$. 因此, 由 f 确定的元 z 是唯一的.

最后, 从已知 $f(x)=(x,z)$ $(\forall x\in E)$ 以及 Cauchy-Schwarz 不等式, 立即得到 $\|f\|\leqslant\|z\|$. 另一方面,

$$f\left(\frac{z}{\|z\|}\right)=\left(\frac{z}{\|z\|},z\right)=\frac{(z,z)}{\|z\|}=\|z\|,$$

从而导出 $\|f\|=\|z\|$. □

注 1　对于任意的 $z_0\in E$, 令 $f_0(x)=(x,z_0)$ $(\forall x\in E)$, 容易验证, f_0 为 E 上的连续线性泛函, 且有 $\|f_0\|=\|z_0\|$.

由此可知: 当 E 为Hilbert空间时, E^* 与 E 是"共轭等距同构"的 (注意, Hilbert空间上的共轭等距同构是如下定义的: 称Hilbert 空间 E 与 E_1 是**共轭等距同构**的, 是指存在算子 V: $E\to E_1$ 为共轭线性的, 即: $V(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\overline{\alpha_1}Vx_1+\overline{\alpha_2}Vx_2$, "1−1"到上的映射, 并且关系式 $(Vx_1,Vx_2)=(x_1,x_2)$ 对于任意的 $x_1,x_2\in E$ 均是成立的).

注 2　由于Hilbert空间是一个Banach空间, 故由上定理 1 及共轭空间范数的定义可知, $|f(x)|=|(x,z)|\leqslant\|x\|\cdot\|z\|$ $(\forall x\in E)$. 这样, 也就从另一个角度得到了Cauchy-Schwarz不等式.

注 3　值得注意的是, 上面著名的 Riesz 表现定理中, 内积空间的完备性是不可少的 (因为在证明的一开始, 我们就用到了"投影定理", 而该定理是要求空间完备的), 否则, 有如下反例成立.

反例　设 $E=((c_{00}),\|\cdot\|_2)$, 即在所有"有限个坐标非零"的数列全体中, 定义 (ℓ^2) 空间形式的范数. 由 §6.1 例 2 已知, E 必构成一内积空间. 在 E 上定义泛函 f_0 如下:

$$f_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{n},\quad\forall x=\{\xi_n\}\in E.$$

由 Cauchy 不等式 (Hölder 不等式之特例) 有

$$\begin{aligned}|f_0(x)|&=\left|\sum_n\frac{\xi_n}{n}\right|\leqslant\sum_n\left|\frac{\xi_n}{n}\right|\\&\leqslant\left(\sum_n|\xi_n|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_n\frac{1}{n^2}\right)^{\frac12}\\&=\left(\sum_n\frac{1}{n^2}\right)^{\frac12}||x||,\quad\forall x=\{\xi_n\}\in E,\end{aligned}$$

因此 $f_0\in E^*$. 反之, 如果 Riesz 表现定理对 E 成立, 则必存在 (唯一) 元 $y_0=\{\eta_n^\circ\}\in E$, 使得

$$f_0(x)=(x,y_0),\quad\forall x=\{\xi_n\}\in E.$$

注意到空间 E 的特性, 我们可设 $y_0=\sum_{n=1}^{n_0}\eta_n^\circ e_n$, 这样, 当特取 $x_1=e_{n_0+1}(\in E)$ 时, 从上式可导出:

$$\frac{1}{n_0+1}=f_0(e_{n_0+1})=(e_{n_0+1},y_0)=\left(e_{n_0+1},\sum_{n=1}^{n_0}\eta_n^\circ e_n\right)=0,$$

矛盾!

注 4 从上面注中我们看出, Riesz 表现定理中, 内积空间的完备性是不可缺少的. 事实上, 更进一步有下面的命题:

命题 对于内积空间 E 而言, 下面的 4 条是等价的:

(1) E 为 Hilbert 空间.

(2) E 中元到其闭线性子空间的最佳逼近元是唯一存在的.

(3) 对 E 上的连续线性泛函 $f\in E^*$, 存在唯一元 $u\in E$, 使得

$$f(x)=(x,u),\quad \forall x\in E.$$

(4) E 中任意真闭线性子空间均有 (非零) 直交元.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2): 即是 §6.2 定理 5(投影定理).

(2) $\Rightarrow$ (3): 不妨假设存在 $x_0\in E$, 使得 $f(x_0)=0$. 因为 f 的零空间 $N(f)$ 是 E 的闭线性子空间, 由 (2), 存在 $x_1\in N(f)$, 使得

$$||x_0-x_1||=\inf\{||y-x_0||:\quad \forall y\in N(f)\}. \tag{6.3.1}$$

令 $u=x_0-x_1(\neq\theta)$, 则 $f(u)=1$. 对任意 $y\in N(f)$, 若 $(y,u)\neq 0$, 令 $z=\overline{(y,u)}y$, 则 $(z,u)>0$. 取 $\lambda=\frac{(z,u)}{(z,z)}>0$, 那么, $\lambda z\in N(f)$ 从而有 $x_1+\lambda z\in N(f)$. 因此, 由式 (6.3.1), 我们有

$$||u-\lambda z||=||x_0-x_1-\lambda z||\geqslant||x_0-x_1||=||u||,$$

也即 $(u-\lambda z,u-\lambda z)\geqslant(u,u)$. 由此导出 $\lambda(z,z)\geqslant 2(z,u)>(z,u)$, 与 λ 取法矛盾! 故 $(y,u)=0$ 对所有 $y\in N(f)$ 成立, 由此得到 $u\perp N(f)$.

对任意 $x\in E$, 因为 $x-f(x)u\in N(f)$, 从而 $[x-f(x)u]\perp u$, 由此得到

$$f(x)=\left(x,\frac{u}{(u,u)}\right),\quad \forall x\in E.$$

故 (3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (4): 对于 E 的任一真闭线性子空间 E_0, 由 Hahn-Banach 定理, 存在 (非零) 连续线性泛函 $f\in E^*$, 使得 $f(x)=0,\quad \forall x\in E_0$. 由 (3) 存在 $\theta\neq u\in E$, 使得 $f(x)=(x,u),\quad \forall x\in E$. 从而 $u\perp E_0$. 故 (4) 成立.

(4) ⇒ (1): 若 E 不完备, 而 $\tilde{E}$ 是其完备化空间, 则 $\tilde{E}$ 是 Hilbert 空间, 且存在非零元 $\tilde{u} \in \tilde{E}$, 使得 $\|\tilde{u}\| = 1, \tilde{u} \notin E$. 令 $E_0 = E \bigcap \tilde{u}^{\perp}$, 则 E_0 显然是闭线性子空间. 若 $E \subset E_0$, 则 $\tilde{u} \perp E$. 由 E 在 $\tilde{E}$ 中稠密, 可知 $\tilde{u} \perp \tilde{E}$, 从而 $\|u\|^2 = (u, u) = 0$, 矛盾! 故知 E_0 为 E 的真子空间.

我们说明 E_0 在 $\tilde{u}^{\perp}$ 中是稠密的. 为此, 对任意的 $\tilde{x} \in \tilde{u}^{\perp}$ 和 $\varepsilon > 0$, 由 E 在 $\tilde{E}$ 中稠密, 存在 $x, u \in E$, 使得

$$\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon, \quad \|u - \tilde{u}\| \leqslant \frac{1}{2},$$

则 $|\ \|u\| - 1\ | \leqslant \frac{1}{2}$. 令 $v = \frac{u}{\|u\|}$, 则

$$\|v - \tilde{u}\| \leqslant \|v - u\| + \|u - \tilde{u}\| \leqslant \left\| \frac{u}{\|u\|} - u \right\| + \frac{1}{2} = |\ \|u\| - 1\ | + \frac{1}{2} \leqslant 1,$$

从而由 $(v - \tilde{u}, v - \tilde{u}) = \|v - \tilde{u}\|^2$ 则可导出 $|(\tilde{u}, v)| \geqslant \mathrm{Re}(\tilde{u}, v) \geqslant \frac{1}{2}$.

另外, 设 $y = x - \frac{(x,\tilde{u})}{(v,\tilde{u})} v$, 则 $y \in E \bigcap \tilde{u}^{\perp}$, 故由 $\tilde{x}$ 及 $\tilde{u}$ 的取法, 我们得到

$$|(x, \tilde{u})| = |(x - \tilde{x}, \tilde{u})| \leqslant \|x - \tilde{x}\| < \varepsilon,$$

从而总上两式则有 $\|y - x\| = |\frac{(x,\tilde{u})}{(v,\tilde{u})}| \leqslant 2\varepsilon$. 再由三角不等式, 则可导出

$\|\tilde{x} - y\| \leqslant \|\tilde{x} - x\| + \|x - y\| < 3\varepsilon$. 注意到 $y \in E \bigcap \tilde{u}^{\perp} = E_0$, 便知 E_0 在 $\tilde{u}^{\perp}$ 中是稠密的.

最后说明 E_0 在 E 中没有直交元从而与假设条件 (4) 矛盾. 反之, 若存在 $\theta \neq u_1 \in E$, 使得 $u_1 \perp E_0$, 由 E_0 在 $\tilde{u}^{\perp}$ 中稠密, 必有 $u_1 \perp \tilde{u}^{\perp}$. 由于对任意 $z \in \tilde{E}$, $z - (z, \tilde{u})\tilde{u} \in \tilde{u}^{\perp}$, 于是有

$$(z, u_1) = (z, \tilde{u})(\tilde{u}, u_1), \quad \forall z \in \tilde{E}.$$

由此式便可导出 $(\overline{\tilde{u}, u_1})\tilde{u} = u_1 \in E$, 与 $\tilde{u} \notin E$ 矛盾! □

注 5 设 E 为Hilbert空间, 由定理 1 可定义 E^* 和 E 之间的双射 φ: $f \longmapsto x_f$, 且有 $\|\varphi(f)\| = \|f\|$, 及 $\varphi(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \overline{\alpha_1}\varphi(f_1) + \overline{\alpha_2}\varphi(f_2)$. 在 E^* 上定义内积 $(f_1, f_2) = \overline{(\varphi(f_1), \varphi(f_2))}$, 则知 E^* 亦成为一个Hilbert空间.

由此就可以得到下面的结论:

定理 2 设 E 为Hilbert空间, 则 E 为自反空间.

证明 任取 $F \in E^{**}$, 由注 5 知 E^* 亦为 Hilbert 空间, 故存在 $g_F \in E^*$, 使得

$$F(f) = (f, g_F), \quad \forall f \in E^*.$$

又由 E^* 上的内积的定义可知

$$\begin{aligned} F(f) &\overset{*}{=} (f, g_F) = \overline{(\varphi(f), \varphi(g_F))} \\ &= (\varphi(g_F), \varphi(f)) \overset{*}{=} f(\varphi(g_F)) = J_{\varphi(g_F)}(f), \quad \forall f \in E^* \end{aligned}$$

(那里 $\stackrel{*}{=}$ 表示用了 Riesz 表现定理, J 为 E 到 E^{**} 的典则映像). 由此导出 $F = J_{\varphi(g_F)}$. 此即可知 E 为自反空间. □

Hilbert 空间中的连续线性算子是 Hilbert 空间理论中的重要的研究对象, 其中最基本、最重要的就是 Hilbert 空间上的共轭算子. 下面介绍共轭算子的定义和最基本的一些性质.

定义 1 设 E 和 E_1 为Hilbert空间, $A \in \mathcal{B}(E \to E_1)$, 定义算子 A^*: $E_1 \to E$ 为

$$(x, A^*y) = (Ax, y), \quad \forall\, x \in E, y \in E_1,$$

则称 A^* 为 A 的**共轭算子**.

注 1 $A^* \in \mathcal{B}(E_1 \to E)$; 且有 $\|A^*\| = \|A\|$.

注 2 设 E 为Hilbert空间, $A, B \in \mathcal{B}(E), \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 则共轭算子有下面的性质:

(i) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$;

(ii) $A^{**} = A$;

(iii) $(AB)^* = B^*A^*$;

(iv) $I^* = I$ (其中: I 为 E 上的恒等算子);

(v) 若 A^{-1} 存在, 则 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

注 3 若 $A \in \mathcal{B}(E \to E_1)$, 则有关系式

$$\ker A = \operatorname{ran}(A^*)^{\perp}, \quad \overline{\operatorname{ran}(A)} = \ker(A^*)^{\perp}.$$

注 4 * 虽然从形式上看, 似乎我们也可在"内积"空间上定义共轭算子, 但事实上, 当值域空间不是 Hilbert 空间时那样的定义是不确定的, 可参见下面的命题:

命题 设 E 为"内积"空间, H 为 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(H \to E)$, 则存在唯一的算子 $B \in \mathcal{B}(E \to H)$, 使得

$$(Ax, y) = (x, By), \quad \forall x \in H, y \in E.$$

证明 对任意 $y \in E$, 令泛函

$$\varphi_y(x) = (Ax, y), \quad \forall x \in H.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式及算子 A 范数的性质, 可知: $\varphi_y \in H^*$. 注意到 H 的完备性, 由 Riesz 表现定理可知, 存在唯一的元 $z_y \in H$, 使得

$$(Ax, y) = (x, z_y), \quad \forall x \in H. \tag{6.3.2}$$

这样, (按上面结果) 当令 $By = z_y$ ($\forall y \in E$) 时, 从 y 对 z_y 的唯一确定性显然可知 B 是线性的. 事实上, 对任意 $y_1, y_2 \in E, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, 由上定义知

$$B(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = z_{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2},$$
$$B(y_1) = z_{y_1}, \quad B(y_2) = z_{y_2};$$

故从式 (6.3.2) 得到

$$(x, B(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = (x, z_{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2}) = (Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2),$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_1}(Ax, y_1) + \overline{\alpha_2}(Ax, y_2) &= \overline{\alpha_1}(x, z_{y_1}) + \overline{\alpha_2}(x, z_{y_2}) \\ &= \overline{\alpha_1}(x, By_1) + \overline{\alpha_2}(x, By_2) \\ &= (x, \alpha_1 By_1 + \alpha_2 By_2), \forall x \in H.\end{aligned}$$

由此立即得出 B 的线性性.

此外, 同样由 Riesz 表现定理及开始假设, 立即导出

$$||By|| = ||z_y|| = ||\varphi_y|| \leqslant ||A|| \cdot ||y||, \quad \forall y \in E,$$

即 B 是有界算子. □

定理 3 设 E 为Hilbert空间, $A \in \mathcal{B}(E)$, 则有 $\|A\| = \|A^*\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$,

证明 对于任意的 $x \in E$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (x, A^*Ax) \leqslant \|x\| \cdot \|A^*A\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E,$$

则有

$$||Ax|| \leqslant \sqrt{||A^*A||} \cdot ||x|| \quad (\forall x \in E),$$

因而得到

$$\|A\|^2 \leqslant \|A^*A\| \leqslant \|A\| \cdot \|A^*\|, \tag{6.3.3}$$

即 $\|A\| \leqslant \|A^*\|$.

此外由于 $A^{**} = (A^*)^* = A$, 故从以上结论又有 $\|A^*\| \leqslant \|A^{**}\| = \|A\|$, 从而可导出 $\|A\| = \|A^*\|$. 再由式 (6.3.3) 又可导出 $\|A\|^2 = \|A^*A\|$. □

现在我们来举两个共轭算子的例子.

例 1 在Euclid空间 $\mathbb{K}^n$ 中定义连续线性算子 $A = (\alpha_{ij})$, 其中 (α_{ij}) 表示 $\mathbb{K}^n$ 中的 $n \times n$ 矩阵, 则 A 的共轭算子 $A^* = (\overline{\alpha_{ji}})$(即:“转置共轭” 矩阵).

例 2 设 $k(s,t)$ 为定义在 $[a,b]\times[a,b]$ 上的可测函数, 而且

$$\int_a^b\int_a^b |k(s,t)|^2 dsdt < \infty,$$

由此可定义 $L^2[a,b]$ 上的连续线性算子 T:

$$(Tx)(s)=\int_a^b k(s,t)x(t)dt,\quad \forall x=x(t)\in L^2[a,b].$$

那么, 从以下关系式:

$$\begin{aligned}(Tx,y)&=\int_a^b\int_a^b k(s,t)x(t)\overline{y(s)}dsdt\\&=\overline{\int_a^b\int_a^b \overline{k(s,t)x(t)}y(s)dsdt}=\int_a^b x(t)\overline{\int_a^b \overline{k(s,t)}y(s)dsdt}\\&=(x,T^*y),\quad \forall\, x,y\in L^2[a,b]\end{aligned}$$

我们导出: T 的共轭算子 T^* 可表示为

$$T^*(x)(s)=\int_a^b \overline{k(t,s)}x(t)dt,\quad \forall x=x(t)\in L^2[a,b].$$

定义 2 设 E 为Hilbert空间, $A\in\mathcal{B}(E)$, 如果 $A^*=A$, 则称 A 为**自共轭算子**.

在例 1 中, A 为自共轭算子的充要条件是 $\alpha_{ij}=\overline{\alpha_{ji}}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 在例 2 中, A 为自共轭算子的充要条件是 $k(s,t)=\overline{k(t,s)}$ $(t,s\in[a,b])$.

定理 4 若 E 为复的Hilbert空间, 且 $A\in\mathcal{B}(E)$, 则 A 为自共轭算子的充要条件是 $(Ax,x)\in\mathbb{R}$ $(\forall\, x\in E)$.

证明 必要性: 若 A 为自共轭算子, 则对于任意的 $x\in E$, 由定义有 $(Ax,x)=(x,A^*x)=(x,Ax)=\overline{(Ax,x)}$, 从而 $(Ax,x)\in\mathbb{R}$.

充分性: 对于任意的 $x,y\in E,\alpha\in\mathbb{R}$, 由

$$(A(\alpha x+y),\alpha x+y)=\alpha\overline{\alpha}(Ax,x)+\alpha(Ax,y)+\overline{\alpha}(Ay,x)+(Ay,y),$$

故从假设可知 $\alpha(Ax,y)+\overline{\alpha}(Ay,x)\in\mathbb{R}$, 因此

$$\alpha(Ax,y)+\overline{\alpha}(Ay,x)=\overline{\alpha}(y,Ax)+\alpha(x,Ay)=\overline{\alpha}(A^*y,x)+\alpha(A^*x,y).$$

在上式中分别令 $\alpha=1$ 和 $\alpha=i$, 则有

$$\begin{aligned}(Ax,y)+(Ay,x)&=(A^*y,x)+(A^*x,y),\\ i(Ax,y)-i(Ay,x)&=-i(A^*y,x)+i(A^*x,y),\end{aligned}$$

从而 $(Ax, y) = (A^*x, y)$, 此即得到了 $A = A^*$. □

注　定理4对于实空间是不成立的, 有如下的反例成立:

反例　在 $\mathbb{R}^2$ 中定义算子

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $(Ax, x) = 0\ (\forall x \in \mathbb{R}^2)$. 但

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq A.$$

定理 5　若 $A \in \mathcal{B}(E)$ 为自共轭算子, 则

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

证明　首先, 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$|(Ax, x)| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|^2 \quad (\forall x \in E), \tag{6.3.4}$$

从而 $\gamma \triangleq \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \leqslant \|A\|$.

其次, 对于任意的 $x \in E$, 以上有 $|(Ax, x)| \leqslant \gamma\|x\|^2$ 成立. 故对任意的 $x, y \in E$, 由于

$$(A(x \pm y), x \pm y) = (Ax, x) \pm (Ax, y) \pm (Ay, x) + (Ay, y),$$

及

$$\begin{aligned}(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) &= 2(Ax, y) + 2(Ay, x) \\ &= 2(Ax, y) + 2(y, Ax) = 4\mathrm{Re}(Ax, y).\end{aligned}$$

因而, 从本段开始的不等式及上式可知, $4|\mathrm{Re}(Ax, y)| \leqslant \gamma(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$. 而由平行四边形法则则可得到

$$2|\mathrm{Re}(Ax, y)| \leqslant \gamma(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{6.3.5}$$

最后, 令 $\omega = \arg(Ax, y)$, 则从式 (6.3.5) 便可导出

$$\begin{aligned}|(Ax, y)| &= \mathrm{e}^{-i\omega}(Ax, y) = (A(\mathrm{e}^{-i\omega}x), y) \\ &= \mathrm{Re}(A(\mathrm{e}^{-i\omega})x, y) \leqslant \frac{\gamma}{2}(\|\mathrm{e}^{-i\omega}x\|^2 + \|y\|^2) = \frac{\gamma}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

因此, $\sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} |(Ax, y)| \leqslant \gamma$, 从而 $\|A\| \leqslant \gamma$.

从上面两个不等式, 我们即可得到本定理结果. □

注 1 由定理4和 5 可知, 若 E 为复的Hilbert空间, $A\in\mathcal{B}(E)$, 且 $(Ax,x)=0$ $(\forall x\in E)$, 则 $A=0$(零算子).

注 2 若 E 为复的Hilbert空间, $A\in\mathcal{B}(E)$, 令算子

$$B=\frac{A+A^*}{2},\quad C=\frac{A-A^*}{2\mathrm{i}},$$

则 $B,C\in\mathcal{B}(E)$ 均为自共轭算子, 且 $A=B+\mathrm{i}C$, $A^*=B-\mathrm{i}C$. 此时称 B 和 C 分别为A **的实部**和**虚部**.

定义 3 设 E 为Hilbert空间, $A\in\mathcal{B}(E)$, 若 $A^*A=AA^*$, 则称 A 为**正规算子**.

注 自共轭算子必是正规算子.

定理 6 若 E 为Hilbert空间, 则 $A\in\mathcal{B}(E)$ 为正规算子的充要条件是 $\|Ax\|=\|A^*x\|$ $(\forall x\in E)$.

证明 对于任意的 $x\in E$, 由于

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2-\|A^*x\|^2&=(Ax,Ax)-(A^*x,A^*x)\\&=(A^*Ax,x)-(AA^*x,x)=((A^*A-AA^*)x,x),\end{aligned}$$

因此, 当 A 为正规算子时, 对任意 $x\in E$, 必有 $\|Ax\|=\|A^*x\|$.

另一方面, 当 $\|Ax\|=\|A^*x\|$ $(\forall x\in E)$ 时, 从前面关系式可知 $((A^*A-AA^*)x,x)=0$ $(\forall x\in E)$. 而当注意到 A^*A-AA^* 为自共轭算子, 故从上面定理 5 立即导出 $A^*A-AA^*=0$(零算子). □

定理 7 若 E 为复的Hilbert空间, $A\in\mathcal{B}(E)$, 则 A 为正规算子的充要条件是 A 的实部与虚部可交换.

证明 设 B 和 C 分别为 A 的实部和虚部, 则 $A=B+\mathrm{i}C, A^*=B-\mathrm{i}C$, 从而

$$AA^*=B^2-\mathrm{i}BC+\mathrm{i}CB+C^2,$$

$$A^*A=B^2-\mathrm{i}CB+\mathrm{i}BC+C^2.$$

因此, $A^*A=AA^*$ 当且仅当 $CB=BC$. □

定义 4 设 E 为Hilbert空间, $A\in\mathcal{B}(E)$, 若 $A^*=A^{-1}$, 则称 A 为**酉算子**.

注 1 酉算子必为正规算子.

注 2 A 为酉算子当且仅当 $A^*A=AA^*=I$.

注 3 若 A 为酉算子, 则 $\|Ax\|=\|x\|$ $(\forall x\in E)$(即:"保范"算子或"等距"算子).

§6.4 线性算子的谱

谱是研究算子的重要工具, 而本节主要是介绍 Hilbert 空间上连续线性算子的谱及其最基本的概念和理论. 下面设 E 为 Hilbert 空间, $A\in\mathcal{B}(E)$, I 表示其上的

恒等算子.

定义 1　若 $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(E)$, 则称 λ 为 A 的**正则元**, 而称算子 $R_\lambda(A) \triangleq (\lambda I - A)^{-1}$ 为 A 的**预解式**. A 的正则元的全体称为 A 的**预解集**, 记为 $\rho(A)$. 而 $\sigma(A) \triangleq \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ 称为 A 的**谱集**, $\lambda \in \sigma(A)$ 称为 A 的**谱**.

注 1　$\lambda \in \rho(A)$ 的充要条件是: 对于任意的 $y \in E$, 方程 $(\lambda I - A)x = y$ 均有解, 且存在与 y 无关的正常数 γ, 使得 $\|x\| \leqslant \gamma\|y\|$.

事实上, 必要性直接由 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(E)$ 的存在性可得. 至于其充分性, 首先, 由设知 $(\lambda I - A)x = \theta$ 有解 x_0 及 $\|x_0\| \leqslant \gamma\|\theta\|$, 可知 $x_0 = \theta$, 从而 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是存在的. 此外, 对于任意的 $y \in E$, 有 $x = (\lambda I - A)^{-1}y \in E$ 且 $\|x\| \leqslant \gamma\|y\|$, 故知 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(E)$.

注 2　对于 $A \in \mathcal{B}(E)$, 当 $\|A\| < 1$ 时, 有 $(I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(E)$.

事实上, 由于 E 是 Hilbert 空间, 从其完备性可知 $\mathcal{B}(E)$ 亦是完备的 (见 §2.2 定理 3), 故当设 $\|A\| < 1$ 时, 可知 $\sum_n \|A^n\| (\leqslant \sum_n \|A\|^n)$ 必为收敛 (数项) 级数, 因此, 由 §1.9 定理 1 可导出: $\sum_{n=0}^\infty A^n$ 是存在的, 而且 $(I - A)(\sum_{n=0}^\infty A^n) = I$, 故有

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty A^n \in \mathcal{B}(E).$$

注 3　对于 E 上的连续线性算子 A 而言, $\sigma(A)$ 为有界集.

事实上, 当 $|\lambda| > \|A\|$ 时, 由注 2 知 $(I - \frac{A}{\lambda})^{-1} \in \mathcal{B}(E)$, 从而 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(E)$. 此即 $\lambda \in \rho(A)$, 因此有 $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leqslant \|A\|\}$.

利用预解式的定义, 我们立即可以得到下面的定理:

定理 1 (预解恒等式)　若 $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$, 则有

$$\begin{aligned} R_{\lambda_1}(A) - R_{\lambda_2}(A) &= (\lambda_2 - \lambda_1) R_{\lambda_1}(A) R_{\lambda 2}(A) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) R_{\lambda_2}(A) R_{\lambda 1}(A). \end{aligned}$$

定理 2　$\rho(A)$ 为 $\mathbb{C}$ 中的开集, 从而 $\sigma(A)$ 为 $\mathbb{C}$ 中的闭集.

证明　对于任意的 $\alpha \in \rho(A)$, 有 $(\alpha I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(E)$. 故当 $\beta \in \mathbb{C}$ 且 $|\beta| < \|(\alpha I - A)^{-1}\|^{-1}$ 时, 由注 2 可知 $[I + \beta(\alpha I - A)^{-1}]^{-1} \in \mathcal{B}(E)$. 又由于

$$(\alpha + \beta)I - A = \beta I + (\alpha I - A) = (\alpha I - A)[I + \beta(\alpha I - A)^{-1}],$$

因此 $[(\alpha + \beta)I - A]^{-1} \in \mathcal{B}(E)$, 即 $\alpha + \beta \in \rho(A)$, 也即 $\rho(A)$ 为 $\mathbb{C}$ 中的开集. □

定义 2　称 $r(A) \triangleq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ 为算子的**谱半径**.

定理 3 (Гельфанд定理)　$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

(注意. 类似 "数学分析", 易知上极限是存在的, 且有: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \inf\limits_n \sqrt[n]{\|A^n\|}$)

证明 首先, 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $|\lambda| > \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \triangleq \alpha$. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 若 $|\lambda| \geqslant \alpha+\varepsilon$, 则当 n 充分大时, 有 $\sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, 从而

$$\left\|\frac{A^{n-1}}{\lambda^n}\right\| \leqslant \frac{(\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2})^{n-1}}{(\alpha+\varepsilon)^n}.$$

故当 $|\lambda| > \alpha$ 时, 如前面注 2 的说明一样, 由 $\mathcal{B}(E)$ 完备及 $\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{A^{n-1}}{\lambda^n}\| < \infty$, 则有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{\lambda^n} \in \mathcal{B}(E)$. 又由于 $(\lambda I - A)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{\lambda^n} = I$, 从而

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{\lambda^n} \in \mathcal{B}(E),$$

即 $\lambda \in \rho(A)$, 这样就得到了关系式: $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leqslant \alpha\}$. 也即 $r(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| \leqslant \alpha$.

另一方面, 由上段的证明可知, $R_\lambda(A)$ 在 $|\lambda| > r(A)$ 上是解析的, 于是, 对于任意的 $f \in \mathcal{B}(E)^*$, $f(R_\lambda(A))$ 为 $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| > r(A)\}$ 上的复值解析函数. 且当 $|\lambda| > \alpha$ 时, 由于 $R_\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{\lambda^n}$, 可得 $f(R_\lambda(A))$ 的 Laurent 展式为

$$f[R_\lambda(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(A^{n-1})}{\lambda^n},$$

进而可知上述展式对 $|\lambda| > \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| = r(A)$ 也成立. 于是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(r(A)+\varepsilon)^{-n} f(A^{n-1})|$ 是收敛的, 由此可知: 对任意的 $f \in \mathcal{B}(E)^*$, 存在常数 $\rho_f > 0$, 使得

$$\|f[(r(A)+\varepsilon)^{-n}A^{n-1}]\| \leqslant \rho_f, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

从而由共鸣定理可知, 存在常数 $\rho_0 > 0$, 使得

$$\|(r(A)+\varepsilon)^{-n}A^{n-1}\| \leqslant \rho_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\|A^n\| \leqslant \rho_0(r(A)+\varepsilon)^{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

故 $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant r(A)+\varepsilon$. 而由 $\varepsilon > 0$ 的任意性我们立即导出 $\alpha \leqslant r(A)$.

从上两个不等式, 我们即可得到本定理结果. □

讨论了算子的正则集之后, 我们再来讨论一下算子的谱集.

定义 3 (i) *如 $\lambda \in \mathbb{C}$, 若存在一个非零向量 $x_0 \in E$, 使得 $Ax_0 = \lambda x_0$, 则称 λ 为 A 的* **特征值**, *x_0 为 A 的* **特征向量**. *A 的特征值的全体 (记为 $\sigma_p(A)$) 称为 A 的* **点谱**.

(ii) 如 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I - A$ 为 "1–1" 对应, 且 $\mathrm{ran}(\lambda I - A) \neq E$ 及 $\overline{\mathrm{ran}(\lambda I - A)} = E$, 则称 λ 为 A 的**连续谱**. A 的连续谱的全体记为 $\sigma_c(A)$.

(iii) 如 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I - A$ 为 "1–1" 对应, 且 $\overline{\mathrm{ran}(\lambda I - A)} \neq E$, 则称 λ 为 A 的**剩余谱**. A 的剩余谱的全体记为 $\sigma_r(A)$.

注 1　算子 A 关于 λ 的特征向量的全体构成 E 的闭线性子空间.

注 2　显然, $\sigma_p(A), \sigma_c(A), \sigma_r(A)$ 是两两不相交的, 且有

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

下面我们用例子来具体说明一下上面的三种谱:

例 1　在Hilbert空间 (ℓ^2) 中, 定义算子 A 为

$$Ax = (\xi_2, \xi_3 \cdots, \xi_n, \cdots), \quad \forall x = \{\xi_k\} \in (\ell^2),$$

则有 $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| < 1\}$.

验证　对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $x = \{\xi_n\} \in (\ell^2)$, 有

$$(\lambda I - A)x = \lambda x - Ax = (\lambda\xi_1 - \xi_2, \lambda\xi_2 - \xi_3, \cdots, \lambda\xi_n - \xi_{n+1}, \cdots),$$

故 $(\lambda I - A)x = \theta$ 当且仅当 $\lambda\xi_i = \xi_{i+1}$, $(i = 1, 2, \cdots)$. 此即 $(\lambda I - A)x = \theta$ 当且仅当 $x = \xi_1(1, \lambda, \lambda^2, \cdots, \lambda^n, \cdots)$. 这说明: $\lambda I - A$ 不是单射当且仅当 $|\lambda| < 1$(注意, 当 $|\lambda| \geqslant 1$ 时, $\{\lambda^n\} \notin (\ell^2)$). 总上结果则可得知

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| < 1\}. \qquad \square$$

例 2　在Hilbert空间 $L^2[0,1]$ 中, 定义算子 A 为 $(Ax)(t) = tx(t)$, 则 $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0,1]$.

验证　当 $\lambda \notin [0,1]$ 时, 由 $r(t) \triangleq (\lambda - t)^{-1}$ 在 $[0,1]$ 上连续, 以及 $[(\lambda I - A)^{-1}x](t) = (\lambda - t)^{-1}x(t)$, 故得到 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(L^2[0,1])$, 从而 $\lambda \in \rho(A)$.

而当 $\lambda \in [0,1]$ 时, 如果 $[(\lambda I - A)x](t) = (\lambda - t)x(t) = 0$ (a.e. $t \in [0,1]$), 则有 $x(t) = 0$ (a.e. $t \in [0,1]$). 这说明算子 $\lambda I - A$ 为 "1–1" 对应的. 其次, 由于 $(\lambda - t)^{-1} \notin L^2[0,1]$, 故 $e_0(t) \notin \mathrm{ran}(\lambda I - A)$ (其中: $e_0(t)$ 表示在 $[0,1]$ 上几乎处处恒取 1 的函数), 此即: $\mathrm{ran}(\lambda I - A) \neq E$. 最后, 对于任意的元 $y(t) \in L^2[0,1]$, 先由积分的绝对连续性可知: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 如果集 $M \subset [0,1]$ 且 $\mu(M) \leqslant \delta$ 时, 则有

$$\int_M |y(t)|^2 dt < \varepsilon.$$

这样, 当特取相应函数

$$x_\delta(t)=\begin{cases}(\lambda-t)^{-1}y(t), & \text{当 } t\notin\left[\lambda-\dfrac{\delta}{2},\lambda+\dfrac{\delta}{2}\right] \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } t\in\left[\lambda-\dfrac{\delta}{2},\lambda+\dfrac{\delta}{2}\right] \text{ 时};\end{cases}$$

我们得知 $x_\delta(t)\in L^2[0,1]$ 且 $\|(\lambda I-A)x_\delta-y\|<\varepsilon$. 这样得到了 $\overline{\operatorname{ran}(\lambda I-A)}=E$.

因此, 总上得到 $\sigma(A)=\sigma_c(A)=[0,1]$. □

例 3 在Hilbert空间 (ℓ^2) 中, 定义算子 A(移位算子) 为

$$Ax=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots),\quad \forall x=\{\xi_k\}\in(\ell^2),$$

则有 $\sigma_r(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ |\lambda|<1\}$.

验证 当 $|\lambda|<1$ 时, 下证 $\operatorname{ran}(\lambda I-A)=\{z_0\}^\perp$(其中: $z_0=(1,\overline{\lambda},\overline{\lambda}^2,\cdots,\overline{\lambda}^n,\cdots)$).

事实上, 对于任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in(\ell^2)$, 有

$$(\lambda I-A)x=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2-\xi_1,\cdots,\lambda\xi_n-\xi_{n-1},\cdots).$$

因此,

$$\begin{aligned}((\lambda I-A)x,z_0)&=\lambda\xi_1+\lambda(\lambda\xi_2-\xi_1)+\cdots+\lambda^n(\lambda\xi_n-\xi_{n-1})+\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}\lambda^n\xi_n\to 0.\end{aligned}$$

此即 $((\lambda I-A)x,z_0)=0\ (\forall x\in(\ell^2))$. 也即 $\operatorname{ran}(\lambda I-A)\subset\{z_0\}^\perp$.

另一方面, 如 $y_0=(\eta_1^\circ,\eta_2^\circ,\cdots,\eta_n^\circ,\cdots)\in(\ell^2)$, 有 $y\perp z_0$. 令 $x_0=(\xi_1^\circ,\xi_2^\circ,\cdots,\xi_n^\circ,\cdots)$, 其中: $\xi_n^\circ=-\sum_{k=0}^\infty\lambda^k\eta_{n+k+1}$,

则当 $\lambda=0$ 时, 由 $\xi_n^\circ=-\eta_{n+1}$, 故 $-Ax_0=(0,\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_n,\cdots)$. 而由此时 $z_0=(1,0,0,\cdots)$ 由 $y\perp z_0$ 故知 $\eta_1=0$. 因此导出 $x_0\in(\ell^2)$, 且 $(\lambda I-A)x_0=y$. 而当 $\lambda\neq 0$ 时, 由 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned}|\xi_n^\circ|^2&\leqslant\sum_{k=0}^\infty|\lambda|^k\cdot\sum_{k=0}^\infty|\lambda|^k|\eta_{n+k+1}^\circ|^2\\&=\frac{1}{1-|\lambda|}\sum_{k=0}^\infty|\lambda|^k|\eta_{n+k+1}^\circ|^2,\end{aligned}$$

故知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty|\xi_n|^2&\leqslant\frac{1}{1-|\lambda|}\sum_{k=0}^\infty|\lambda|^k\sum_{n=1}^\infty|\eta_{n+k+1}^\circ|^2\\&\leqslant\frac{1}{1-|\lambda|}\sum_{k=0}^\infty|\lambda|^k\sum_{n=1}^\infty|\eta_n^\circ|^2=\left(\frac{1}{1-|\lambda|}\right)^2\sum_{n=1}^\infty|\eta_n^\circ|^2,\end{aligned}$$

这样就有 $x_0 \in (\ell^2)$. 最后, 再次注意 x_0 坐标的取法, 容易得知 $\eta_n^\circ = \lambda\xi_n^\circ - \xi_{n-1}^\circ$, (这里定义 $\xi_0^\circ = -\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\eta_{k+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}$. 由此显然可得 $(\lambda I - A)x_0 = y$. 因而证得 $\{z_0\}^\perp \subset \operatorname{ran}(\lambda I - A)$.

从上两部分, 我们证明了 $\operatorname{ran}(\lambda I - A) = \{z_0\}^\perp$, 也即推出 $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| < 1\}$. □

定理 4　*若 A 为酉算子, 则 A 的特征值之模为1.*

证明　设 λ_0 为 A 的特征值, 相应的特征向量为 x_0, 即有 $Ax_0 = \lambda_0 x_0$, 则知

$$(Ax_0, Ax_0) = (\lambda_0 x_0, \lambda_0 x_0) = |\lambda_0|^2(x_0, x_0).$$

另一方面, 从酉算子定义又有

$$(Ax_0, Ax_0) = (A^*Ax_0, x_0) = (x_0, x_0),$$

由此立即导出 $|\lambda_0| = 1$. □

定理 5　*若 A 为自共轭算子, 则 A 的特征值为实数.*

证明　若 λ_0 为 A 的特征值, 相应的特征向量为 x_0, 则有关系式

$$\begin{aligned}\lambda_0(x_0, x_0) &= (\lambda_0 x_0, x_0) = (Ax_0, x_0) = (x_0, A^*x_0)\\ &= (x_0, Ax_0) = (x_0, \lambda_0 x_0) = \overline{\lambda_0}(x_0, x_0).\end{aligned}$$

又 $(x_0, x_0) > 0$, 故 $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$. 由此可知 $\lambda_\circ \in \mathbb{R}$. □

定理 6　*若 A 为自共轭算子, 则对应于 A 的不同特征值的特征向量必定是正交的.*

证明　设 λ_1 和 λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) 为 A 的特征值, 相应的特征向量为 x_1 和 x_2, 即有 $Ax_i = \lambda_i x_i$ $(i = 1, 2)$, 那么, 我们可以得到

$$\begin{aligned}\lambda_1(x_1, x_2) &= (\lambda_1 x_1, x_2) = (Ax_1, x_2) = (x_1, A^*x_2)\\ &= (x_1, \lambda_2 x_2) = \overline{\lambda_2}(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2).\end{aligned}$$

由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 从上式立即导出 $(x_1, x_2) = 0$. □

对于一般的连续线性算子而言, 要求出其谱是十分困难的; 但是, 紧连续线性算子的谱却是十分简单的 (注意: 在赋范空间中紧线性算子必为连续线性算子). 这就是我们下面要介绍的著名定理.

为了下面定理 7 证明的需要, 我们先再列出一个著名的值域定理作为引理如下:

引理　*设 T 是赋范空间 E 到 E_1 内的线性算子, 则 T^{-1} 是连续的充要条件是 T^* 为满算子. (即: §5.3 中定理 1).*

定理 7 (Riesz-Schauder 定理)　*设 E 为无穷维的Hilbert空间, $A \in \mathcal{B}(E)$ 为紧算子, 则有且仅有下面结论之一成立:*

(i) $\sigma(A)=\{0\}$;

(ii) $\sigma(A)=\{0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$, 对于任意 k: $1\leqslant k\leqslant n,\lambda_k\neq 0$ 为 A 的特征值, 并且 $\dim\ker(\lambda_k I-A)<\infty$;

(iii) $\sigma(A)=\{0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$, 对于任意 $k\in\mathbb{N},\lambda_k\neq 0$ 为 A 的特征值, 并且 $\dim\ker(\lambda_k I-A)<\infty$; 此外还有 $\lim_{n\to\infty}\lambda_k=0$.

证明 (1) 当 E 为无限维空间时, 必有 $0\in\sigma(A)$.

事实上, 反之, 若 $0\in\rho(A)$, 则有 $A^{-1}\in\mathcal{B}(E)$. 又由 A 为紧 (连续) 线性算子, 可知 $I=AA^{-1}$ 亦为 E 上的紧 (连续) 线性算子. 这就与 E 为无限维空间相矛盾 (注意前面 §1.5 赋范空间有限维特征).

(2) 若 $\lambda\in\sigma(A),\lambda\neq 0$, 则 $\lambda\in\sigma_p(A)$.

反之, 若 $\lambda\notin\sigma_p(A)$, 由 $\lambda\in\sigma(A)$ 及谱集定义 (见定义 3), 可知 $R_\lambda(A)=(\lambda I-A)^{-1}$ 存在. 下面将证明 $R_\lambda(A)\in\mathcal{B}(E)$. 为此, 我们由著名的“值域定理”, 只要证明 $R_\lambda(A)^*$ 是满算子即可. 下面就来验明这一事实.

其实, 对任意的 $y_0\in E$, 作线性子空间 $\mathrm{ran}(\lambda I-A)$ 到 E 的线性泛函 f_0 如下: $f_0(x)=(R_\lambda(A)x,y_0)$. 显然 f_0 为 $\mathrm{ran}(\lambda I-A)$ 上的连续线性泛函 (由于 $|f_0(x)|\leqslant\|y_0\|\cdot\|R_\lambda(A)\|\cdot\|x\|$), 从而由 Hahn-Banach 定理知, f_0 可以延拓到整个空间 E 上, 由此再从 Riesz 表示定理导出, 存在 $x_0\in E$, 使得 $f_0(x)=(x,x_0)\quad(\forall x\in E)$, 因此,

$$\begin{aligned}(y,(\lambda I-A)^*x_0)&=((\lambda I-A)y,x_0)=f_0[(\lambda I-A)y]\\&=(R_\lambda(A)(\lambda I-A)y,y_0)=(y,y_0),\quad\forall y\in E.\end{aligned}$$

这样我们就可得到 $y_0=(\lambda I-A)^*x_0$. 也即 $(\lambda I-A)^*$ 是满线性算子, 故由 §5.3 的值域定理知 $(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{B}(E)$, 也即 $\lambda\in\rho(A)$, 与反设矛盾!

(3) 若 λ_0 为 $\sigma(A)$ 的极限点, 则 $\lambda_0=0$.

事实上, 对于 $\sigma(A)$ 的极限点 λ_0, 存在一列互不相同的元 $\{\lambda_n\}\subset\sigma(A)$, 有 $\lambda_n\to\lambda_0$. 不妨设 $\lambda_n\neq 0\ (n\in\mathbb{N})$, 则从上面 (2) 可知 $\{\lambda_n\}\subset\sigma_p(A)$.

对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 取 $x_n\in\ker(\lambda_n I-A)$. 令 $M_n=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$, 则有 $\dim M_n=n$, 而且由上面定理 6 可知: M_{n-1} 为 M_n 的真子空间, 从而 Riesz 引理导出: 存在 $y_n\in M_n$, 有 $\|y_n\|=1$, 使得

$$d(y_n,M_{n-1})\triangleq\inf_{y\in M_{n-1}}\|y_n-y\|>\frac{1}{2},\quad\forall n\in\mathbb{N}.\tag{6.4.1}$$

又由 $x_n\in\ker(\lambda_n I-A)$ 及 y_n 的取法 (注意 $y_n\in M_n$ 和式 (6.4.1)) 可知: $(\lambda_n I-A)y_n\in M_{n-1}$. 则有

$$(\lambda_m I-A)y_m\in M_{m-1}\subset M_{n-1}\quad(n>m).\tag{6.4.2}$$

注意到

$$A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)-A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)=\frac{1}{\lambda_m}(\lambda_m I-A)y_m-\frac{1}{\lambda_n}(\lambda_n I-A)y_n-y_m+y_n$$
$$=y_n-\left[y_m-\frac{1}{\lambda_m}(\lambda_m I-A)y_m+\frac{1}{\lambda_n}(\lambda_n I-A)y_n\right], \tag{6.4.3}$$

因而当 $n>m$ 时, 从式 (6.4.1), (6.4.2) 和 (6.4.3) 便可导出

$$\left\|A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)-A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right\|\geqslant d(y_n,M_{n-1})>\frac{1}{2}. \tag{6.4.4}$$

最后, 注意到 A 为紧算子, 由式 (6.4.4) 则知 $\{\frac{y_n}{\lambda_n}\}$ 的任一子列必定都是无界的. 而由 $\|y_n\|=1\ (n\in\mathbb{N})$, 因此 $\|\frac{y_n}{\lambda_n}\|=\frac{1}{|\lambda_n|}\to\infty$. 这样就可导出 $\lambda_0=0$.

(4) 对任意的 $\lambda\in\sigma(A),\lambda\neq0$, 必有 $\dim\ker(\lambda I-A)<\infty$.

事实上, 注意到关系式 $\lambda I|_{\ker(\lambda I-A)}=A|_{\ker(\lambda I-A)}$, 假若 $\dim\ker(\lambda I-A)=+\infty$, 由 A 为紧算子可知 $A|_{\ker(\lambda I-A)}$ 也是紧算子, 从而 $A|_{\ker(\lambda I-A)}$ 作用在单位原心球 $B_1[\ker(\lambda I-A)]$ 上的像集应是 $\ker(\lambda I-A)$ 中的紧集. 由此, 从开始的等式即知 $\lambda[B_1(\ker(\lambda I-A))]$ 亦为紧集. 这与 $\dim\ker(\lambda I-A)=+\infty$ 假设相矛盾. □

习　题　六

6.1　试证明: 可分的 Hilbert 空间的标准正交基含有可数个元.

6.2　设 $H_n(t)=(-1)^n\mathrm{e}^{t^2}\dfrac{d^n}{dt^n}(\mathrm{e}^{-t^2})$ 为 Hermite 多项式, 并且令

$$e_n(t)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t),\ (n=1,2,\cdots)$$

试证明: $\{e_n\}$ 为 $L^2(-\infty,+\infty)$ 的标准正交基.

6.3　设 E 为 Hilbert 空间, $A\in\mathcal{B}(E)$, $\{e_n\}$ 为 E 的标准正交基, 且对于任意的 $m,n\in\mathbb{N}$, 均有 $(Ae_n,e_m)=\overline{(Ae_m,e_n)}$, 则 A 为自伴算子.

6.4　设 E 为 Hilbert 空间, $\{A_n,A\}\subset\mathcal{B}(E)$, 且 $A_n\to A$. 如果 $\lambda\in\rho(A)$, 则当 n 充分大时, 亦有 $\lambda\in\rho(A_n)$, 而且

$$\lim_{n\to\infty}R_\lambda(A_n)=R_\lambda(A).$$

第二部分

第七章　可分 Banach 空间可赋严格凸范数

作为空间严格凸性的补充，我们还要指出，严格凸这个概念对于可分的 Banach 空间没有太大的意义. 为此，我们先证明著名的 $C[0,1]$ 空间的“万有性”定理.

§7.1　空间 $C[a,b]$ 的万有性

先介绍一个引理.

引理 1* *在距离空间中任意自列紧集均可表为 Cantor 完全集的连续映像 (值).*

证明　由于此引理证明较长，我们下面分六段来说明：

(1) 设集 F 为距离空间 E 内一个自列紧集，则知对于任意趋向于零的数列 $\{\varepsilon_n\}$，都可以在 F 中找到有限的“ε_n 网”，而且可以假设其“网点”由 2^{m_n} 个元素组成 (否则可以添加成此数目)($\forall n\in\mathbb{N}$). 我们设这些“ε_n 网”为

$$\{x_k^{(n)}:\ k=1,2,\cdots,2^{m_n}\}\ (\forall n\in\mathbb{N}).$$

(2) 设闭球 $B_k^{(1)}=B(x_k^{(1)},\varepsilon_1)$ $(k=1,2,\cdots,2^{m_1})$，显然，有 $\bigcup_{k=1}^{2^{m_1}}B_k^{(1)}\supset F$. 然后，设

$$F_{k_1}=F\cap B_{k_1}^{(1)}\ \ (k_1=1,2,\cdots,2^{m_1}),$$

则由 $F=\bigcup_{k_1=1}^{2^{m_1}}F_{k_1}$ 可知，该集 F 可以表为 2^{m_1} 个直径不超过 $2\varepsilon_1$ 的闭集之和. 此外 F_{k_1} $(k_1=1,2,\cdots,2^{m_1})$ 作为自列紧集内的闭子集，其亦为自列紧的.

(3) 重复上面的做法，又可将每一个 F_{k_1} 表为 2^{m_2} 直径不超过 $2\varepsilon_2$ 的闭集 F_{k_1,k_2} $(k_1=1,2,\cdots,2^{m_1};k_2=1,2,\cdots,2^{m_2})$ 之和的形式.$\cdots$，这样做下去 (可以认为所有这些集都是非空的).

(4) 今设 P_0 为 $[0,1]$ 内的 Cantor 三分集，由定义可知此集是全部位于第一级闭区间 Δ_{i_1} $(i_1=0,1)$ 上的，同样也是全部位于第二级闭区间 Δ_{i_1,i_2} $(i_1,i_2=0,1)$ 上的；$\cdots$；一般说来，也是全部位于第 j 级闭区间 $\Delta_{i_1,i_2,\cdots,i_j}$ $(i_\iota=0,1;\ \iota=1,2,\cdots,j)$ 上. 并且我们显然可知：

当把第 m_1 级闭区间从左到右重新编号记为 $\widetilde{\Delta}_{k_1}$ $(k_1=1,2,\cdots,2^{m_1})$ 时，每一个 m_1 级闭区间 $\widetilde{\Delta}_{k_1}$ 必包含 2^{m_2} 个 m_1+m_2 级闭区间. 因此，可将后者从左到右重新编号为 $\widetilde{\Delta}_{k_1,k_2}$ $(k_1=1,2,\cdots,2^{m_1};k_2=1,2,\cdots,2^{m_2});\cdots$，这样做下去我们就可以将上面空间 E 内的自列紧集 $F_{k_1,k_2,\cdots,k_s}$ 与这里 $[0,1]$ 区间内的闭区间组 $\widetilde{\Delta}_{k_1,k_2,\cdots,k_s}$ $(s=1,2,\cdots)$ 一一对应起来 (参见图 7.1).

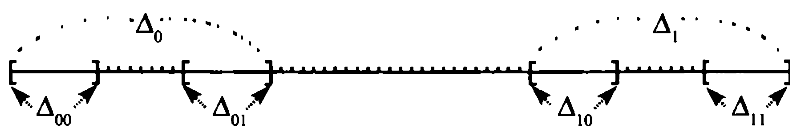


图 7.1

(5) 我们说明, 对于自列紧集 F 内的任意一点, 其必可为上面 Cantor 集内一点的映像. 事实上, 如果设 $x \in F$, 那么, $x \in F_{k_1^0}$ (一般来说, 这个 k_1 中的某一值 k_1^0 不是唯一的, 我们不妨取其中的最小下标), 类似地有 $x \in F_{k_1^0,k_2^0}, \cdots, x \in F_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_s^0}, \cdots$. 那么, 从对应的闭区间 $\widetilde{\Delta}_{k_1^0}$, $\widetilde{\Delta}_{k_1^0,k_2^0}$, $\cdots$, $\widetilde{\Delta}_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_s^0}, \cdots$, 我们必可确定唯一的一点 $t \in P_0$ 与元 x 相对应. 类似地, 可以看出: 上面的对应关系反过来也是确定的, 因而就可得到 Cantor 集 P_0 到自列紧集 F 上的满映像 $x = \varphi(t)$ $(t \in P_0)$.

(6) 最后, 证明上述映像 φ 是连续的. 事实上, 如果设 $x_0 = \varphi(t_0)$ $(t_0 \in P_0)$, 设 t_0 由闭区间组 $\widetilde{\Delta}_{k_1^0}, \widetilde{\Delta}_{k_1^0,k_2^0}, \cdots, \widetilde{\Delta}_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_s^0}, \cdots$ 确定, 则对于 E 中 x_0 的任意一开球 $O(x_0,\varepsilon)$, 由 $x_0 \in F$ 及第二段的作法可知 (注意 $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$) 必有一集 $F_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_n^0} \subset O(x_0,\varepsilon)$. 这样, 由于 t_0 为对应闭区间 $\widetilde{\Delta}_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_n^0}$ 上的一点, 当取此区间长为 δ 时, 可以看出, 只要 $|t - t_0| < \delta$, $t \in P_0$, 必有 $t \in \widetilde{\Delta}_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_n^0}$, 从而导出

$$x = \varphi(t) \in F_{k_1^0,k_2^0,\cdots,k_n^0} \subset O(x_0,\varepsilon),$$

即 $d(x,x_0) < \varepsilon$. 因而, 得出 $\varphi(t)$ 在 P_0 内任意一点 t_0 均是连续的. □

有了上面的引理, 下面就可以引入关于连续函数空间 $C[0,1]$ "万有性" 的著名的定理. 1923 年, Урысон(乌里松) 曾经抽象地证明了 "万有" 可分空间的存在性, 即: 任意的可分距离空间都与此空间的一部分等距对应 (同构). 后来, Banach 和 Mazur 证明了空间 $C[0,1]$ 就是这样的 "万有" 空间之一.

定理*($C[0,1]$ 的 "万有性") 任意一个可分的 Banach 空间 E 必可等价 (等距线性同构) 于 $C[0,1]$ 内的一闭线性子空间 X.

证明 设 E 为任意一个可分的 Banach 空间, 则由其可分性可知, 存在 $\{x_n\} \subset E$, 使得 $\overline{\{x_n\}} = E$. 令 B_1^* 为 E^* 中的原心单位闭球, 并在其内定义距离

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{1 + |f(x_n) - g(x_n)|}, \ \forall f, g \in B_1^* \tag{7.1.1}$$

(容易验证上面是满足 "距离" 定义的).

其次, 证明 B_1^* 在上面距离的定义下构成一个 (自列) 紧距离空间. 事实上, 由第一章习题 6 已知对于距离空间而言, 紧与自列紧是等价的, 因此下面只要证明对于 B_1^* 中任意元列 $\{f_n\}$, 必可求得在 B_1^* 内 (按上面定义的距离) 收敛的子列即可. 然而, 这是明显的, 因为只要注意到 §2.5 的引理 3 便知, 由上述 $\{f_n\}$ 必可选出一子

列 $\{f_{n_k}\}$, 使其 "弱*" 收敛于 $f_0 \in B_1^*$, 即有

$$f_{n_k}(x) \to f_0(x)\ (k \to \infty), \quad \forall x \in E.$$

由式 (7.1.1) 的定义, 显然可以导出 $d(f_{n_k}, f_0) \to 0\ (k \to \infty)$. 此即说明 B_1^* 是一紧距离空间.

其三, 利用前面的引理, 由上面结论可知, 必存在一连续变换将 $[0,1]$ 上某一 Cantor 集 P_0 映为 B_1^*. 不妨设

$$t \longmapsto f_t \in B_1^*, \quad t \in P_0, \tag{7.1.2}$$

并且, 任取 E 中一元 x 定义集 $[0,1]$ 上的函数 $y_x(t)$ 如下:

$$y_x(t) = \begin{cases} f_t(x), & \text{当} t \in P_0 \text{时}; \\ \dfrac{y_x(t') - y_x(t'')}{t' - t''}(t - t'') + y_x(t''), & \text{当} t \notin P_0 \text{时}, \end{cases} \tag{7.1.3}$$

(其中, $t' < t < t'', t', t''$ 为 P_0 中距 t 最近的两点, 由 P_0 的定义, 即为在构成 P_0 时含有 t 的 "舍去" 之 "余 (开) 区间" 的两个端点.) 由于式 (7.1.2) 的映像是连续的, 因而还知

$$t_n \to t_0 \Rightarrow f_{t_n} \xrightarrow{d} f_{t_0} \Rightarrow y_x(t_n) \to y_x(t_0)\ \ (n \to \infty), \quad \forall \{t_n\} \subset P_0, \tag{7.1.4}$$

(其中, d 为按式 (7.1.1) 在 B_1^* 上定义的距离). 即, 上面定义的函数在 P_0 上是连续的; 而且, 当在集 $[0,1] \backslash P_0$ (为开区间之 "并") 时, 由式 (7.1.3) 可知, 其以 $y_x(t)$ 在各开区间端点之值线性相连而得, 故其在 $[0,1] \backslash P_0$ 是连续的. 若 $t_0 \in P_0$ 是某余开区间的右端点, 由 y_x 在余区间中的定义可知 y_x 在 t_0 点是左连续的; 若 $0 \neq t_0 \in P_0$ 不是任意余开区间的右端点, 由 y_x 在 P_0 上连续, 存在 t_0 在 $[0,1]$ 区间中的开邻域 U, 使得对任意 $t \in U \bigcap P_0$, 有 $|y_x(t) - y_x(t_0)|$ 小于预先给定的正数 ε. 于是存在 Cantor 集 P_0 的某余开区间 (t', t''), 使得 $[t', t''] \subset U \bigcap (0, t_0)$ 显然, 对于区间 $(t', t_0]$ 中的点 t, 或者含于 $P_0 \bigcap U$ 中, 或者含于两端点在 $U \bigcap P_0$ 中的 P_0 的某余开区间中. 再次注意到 y_x 在余区间中的定义, 知其值必介于两端点的值之间, 从而可知

$$|y_x(t) - y_x(t_0)| < \varepsilon,$$

故 y_x 在 t_0 点也是左连续的. 同理可知其于 t_0 点也是右连续的. 因此由 t_0 任意性则知 y_x 在 P_0 上连续, 从而在 $[0,1]$ 上也是连续的, 即 $y_x \in C[0,1]$. 这样, 可分空间 E 就被映为 $C[0,1]$ 内的一个子集, 并且, 根据前面的做法, 不难看出此映像还是线性的. 此即 E 被映为 $C[0,1]$ 内的一个线性子空间, 设其为 X.

最后, 由 Hahn-Banach 定理可知, 对任意 $x_0 \in E$, 存在 $f_1 \in B_1^*$, 使得 $|f_1(x_0)| = \|x_0\|$. 设此 $f_1 = f_{t_1}$, 于是, 从 y_{x_0} 的定义则有 (注意 $t_1 \in P_0$)

$$|y_{x_0}(t_1)| = |f_{t_1}(x_0)| = \|x_0\|;$$

但由式 (7.1.3) 又有

$$|y_{x_0}(t)| \leqslant \|x_0\|, \quad \forall t \in [0,1],$$

从而有

$$\|y_{x_0}\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |y_{x_0}(t)| = \|x_0\|.$$

注意到 x_0 的任意性, 上即导出

$$\|y_x\| = \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

结合上段的结果, 此也即表明空间 E 与 $C[0,1]$ 的线性子空间 X 是等价的. 至于 X 在 $C[0,1]$ 中的闭性显然可以由式 (7.1.3) 以及 E 的完备性导出. □

§7.2 可分 Banach 空间均有等价的严格凸范数

有了上面的结果, 就可证明任意一个可分的 Banach 空间均可赋等价的严格凸范. 即有下面的定理:

定理(Clarkson 定理) 任一可分的 Banach 空间必可线性同胚于一个严格凸空间.

证明 首先, 由 §7.1 中的定理已知: "任一可分 Banach 空间必可等价于连续函数空间 $C[0,1]$ 内的一个闭线性子空间". 因此, 只要对空间 $C[0,1]$ 来证明上面定理就可以了.

其次, 在 $[0,1]$ 上取一可数稠集 $\{t_n\}$, 并作 $C[0,1]$ 的相应的一列泛函

$$f_n(x) = x(t_n), \quad \forall x \in C[0,1] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

显然我们可以看出: $\{f_n\} \subset (C[0,1]^*)$, 且有 $\|f_n\| \leqslant 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. 今在空间 $C[0,1]$ 中另外改设一个范数如下:

$$\|x\|_1 = \left(\|x\|^2 + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} |f_n(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in C[0,1].$$

为了验证 $\|\cdot\|_1$ 是范数, 我们只验证其"三角不等式" (因为其他两条公理的验证是明显的). 而此则可由下式看出:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \left(\|x+y\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}|f_n(x+y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \left[(\|x\|+\|y\|)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}(|f_n(x)|+|f_n(y)|)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \|x\|_1+\|y\|_1, \quad \forall x,y\in C[0,1].\end{aligned}$$

另外, 由于

$$\|x\|\leqslant\|x\|_1\leqslant(\|x\|^2+\sup_n|f_n(x)|^2)^{\frac{1}{2}}=(\|x\|^2+\|x\|^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant 2\|x\|;\quad \forall x\in C[0,1],$$

故又知新范数 $\|\cdot\|_1$ 与原范数 $\|\cdot\|$ 是"等价"的, 从而知空间 $C[0,1]$ 的元在此两范数定义下, 按元的"自我对应"是线性同胚的.

最后, 证明空间 $C[0,1]$ 的元按新范数 $\|\cdot\|_1$ 定义后所成的赋范线性空间是严格凸的. 事实上, 如果此时有两个非零元 x 和 y, 使得 $\|x+y\|_1=\|x\|_1+\|y\|_1$. 那么, 从上面验证 $\|\cdot\|_1$ 满足范数"三角不等式"的中间式子, 便可导出

$$\begin{aligned}&\left(\|x\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}|f_n(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\|y\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}|f_n(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &=\|x\|_1+\|y\|_1=\left((\|x\|+\|y\|)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}(|f_n(x)|+|f_n(y)|)^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

从而, 注意到 Cauchy 不等式"等号成立"的性质, 由上式则可得到

$$f_n(x)=\alpha f_n(y)\quad (n=1,2,\cdots),$$

(其中 α 为某一正数). 注意到泛函 f_n 的定义 ($\forall n\in\mathbb{N}$), 由上式则可导出两函数 $x(t)$ 和 $\alpha y(t)$ 在 $[0,1]$ 的稠集 $\{t_n\}$ 上相等, 再注意到 $x,y\in C[0,1]$ 是连续函数, 从而导出 $x=\alpha y$. 也即空间在新范数 $\|\cdot\|_1$ 范数下是严格凸的. □

第八章　拓扑线性空间上的线性算子

为了深入研究赋 (准) 范线性空间及其共轭空间, 我们就不仅要研究其 (准) 范数诱导的拓扑性质, 还要研究其弱拓扑或弱* 拓扑的性质. 为此, 下面我们来介绍拓扑线性空间及其上的线性算子的概念与性质.

§8.1　拓扑线性空间的基本概念

从拓扑线性空间的名称可以看出, 其上必有线性结构及拓扑结构. 这样还不够, 还要要求这里的线性结构与拓扑结构有“和谐”的关系. 由此可得其定义如下:

定义 1　数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 E 称为**拓扑线性空间**, 是指其上存在一个拓扑 τ, 使得加法运算 $x+y$ 及数乘运算 αx 在拓扑 τ 下分别是 (x,y) 及 (α,x) 的二元连续函数 $(x,y\in E;\alpha\in\mathbb{K})$.

定义中的连续性的条件可叙述如下:

1) 对于任意 $x,y\in E$ 及 $x+y$ 的任意邻域 $U_{x+y}\in\tau$, 必存在 x 和 y 的邻域 $U_x,U_y\in\tau$, 使得 $U_x+U_y\subset U_{x+y}$.

2) 对于任意 $\lambda\in\mathbb{K},x\in E$ 以及 λx 的任意邻域 $U_{\lambda x}$, 必存在 x 的邻域 U_x 及 $\delta>0$, 使得当 $|\mu-\lambda|<\delta$ 时, 有 $\mu U_x\subset U_{\lambda x}$.

例　赋范线性空间、赋准范线性空间、赋拟范线性空间以及赋拟准范线性空间均为拓扑线性空间.

关于拓扑线性空间, 我们有以下简单的性质:

引理 1　设 E 为拓扑线性空间, 则有

1) 当 $\mathcal{U}_0$ 是 θ 点的邻域基时, $x_0+\mathcal{U}_0$ 必为 x_0 的邻域基;

2) 当 U_{x_0} 为 x_0 的邻域时, 则 $\lambda_0U_{x_0}(\lambda_0\neq 0)$ 必为 λ_0x_0 的邻域.

证明　由拓扑线性空间的定义可知映像

$$T_1: x\mapsto x+x_0,\quad T_2:\ x\mapsto \lambda_0 x$$

均为 E 到 E 上的同胚映像. 由此可得上面两个结论. □

定义 2　数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 E 中的集合 A 称为**吸收的**, 如果对任意的 $x_0\in E$, 存在 $\delta_0>0$, 当 $|\lambda|\leqslant\delta_0$ 时, 均有

$$\lambda x\in A.$$

空间 E 中的集 B 称为**均衡的**, 是指

$$\alpha B \subset B \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| \leqslant 1).$$

引理 2 *在拓扑线性空间中, 存在由均衡、吸收集所组成的邻域基.*

证明 由引理 1, 仅对 θ 点的邻域基 $\mathcal{U}_0$ 来证明即可. 首先, 由函数 $f(\lambda, x_0) = \lambda x_0$ 在 $\lambda = 0$ 的连续性可知, 对任意 $U \in \mathcal{U}_0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\lambda x_0 \in U \quad (\forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leqslant \delta),$$

从而 U 为吸收集 (此即: θ 点的任意邻域均为吸收集).

其次, 由函数 $g(\lambda, x) = \lambda x$ 在 $(0, \theta)$ 的连续性, 故知: 对于任意 $U \in \mathcal{U}_0$, 必存在 $V \in \mathcal{U}_0$ 以及 $\delta > 0$, 使得

$$\lambda V \subset U \quad (\forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leqslant \delta).$$

令 $W = \bigcup_{|\lambda| \leqslant \delta} \lambda V$, 显然 W 亦为 θ 点的邻域, 且当 $|\alpha| \leqslant 1$ 时, 有

$$\alpha W = \alpha \bigcup_{|\lambda| \leqslant \delta} \lambda V = \bigcup_{|\lambda| \leqslant \delta} \alpha \lambda V \subset \bigcup_{|\lambda'| \leqslant \delta} \lambda' V = W.$$

即 W 是均衡的. 从定义显然还有 $W \subset U$. 由此可知这些 W 的全体即为所需之邻域基. □

§8.2 拓扑线性空间上线性泛函的连续性

当线性空间中存在拓扑时, 我们就可以讨论其上定义的线性泛函的连续性. 以下均用 $\mathcal{U}$ 表示 E 在 θ 点的邻域族 (而用 $\mathcal{U}_0$ 表示 E 在 θ 点的邻域基).

定理 1 *设 f 为拓扑线性空间 E 上的非零线性泛函, 则 f 为连续线性泛函的充分必要条件是 f 满足下列条件之一:*

1) $N_f = \{x \in E: f(x) = 0\}$ 是一闭集.

2) N_f 不稠于 E.

3) 存在 $U \in \mathcal{U}$, 使得 $f(U)$ 是有界集.

证明 f 连续 $\Rightarrow$ 1): 由于 N_f 是闭集 $\{0\} \subset \mathbb{K}$ 在连续函数 f 下的原像 $f^{-1}(0)$, 故由 "点集拓扑" 知识可知, 其当然是闭集.

1) $\Rightarrow$ 2): 由 N_f 是闭集, 且 f 不恒为 0, 故知 $\overline{N_f} = N_f \neq E$, 此即 N_f 不稠于 E.

2) $\Rightarrow$ 3): 由 N_f 不稠于 E, 故存在元 $x_0 \in E$ 及 θ 点的均衡邻域 $U \in \mathcal{U}$, 使得 $(x_0 + U) \cap N_f = \varnothing$. 不妨假设 $f(x_0) > 0$, 则有 $f(x_0 + y) > 0 \quad (\forall y \in U)$. 事实上, 若

有 $y_0 \in U$, 使得 $f(x_0+y_0)<0$, 则可得到 $0<f(x_0)<-f(y_0)$. 而由 U 的均衡性, 有 $\frac{f(x_0)}{-f(y_0)}y_0 \in U$, 从而导出

$$0<f\left(x_0+\frac{f(x_0)}{-f(y_0)}y_0\right)=f(x_0)+\frac{f(x_0)}{-f(y_0)}f(y_0)=0,$$

与前面 U 的取法矛盾! 因此 f 在 x_0+U 上恒正. 从而 $f(-U)\leqslant f(x_0)$. 再次用到 U 的均衡性, 则有 $|f(U)|\leqslant f(x_0)$. 故 3) 成立.

3) $\Rightarrow f$ 连续: 由 f 是可加的, 故只需证明 f 在 θ 点连续. 事实上, 由假设可知: 存在 $0<\alpha_0\in\mathbb{K}$ 及 $U_0\in\mathcal{U}$, 使得

$$f(x)\leqslant\alpha_0\quad(\forall x\in U_0).$$

于是, 对任意的 $\varepsilon>0$, 由 §8.1 的引理 1 可知, $V\triangleq\frac{\varepsilon}{\alpha_0}U_0\in\mathcal{U}$, 且从上式显然导出: $|f(x)|\leqslant\varepsilon\quad(\forall x\in V)$, 也即 f 在 θ 点连续. □

注 1 由 §8.1 的引理 1 可知, 定理 1 中的集 N_f 换为集 $H_{f,\alpha}=\{x\in E\colon f(x)=\alpha,\forall x\in E\}$ 时, 定理仍然成立.

注 2 从上面 2)⇒3) 的证明可知: 如果 U 为 θ 点的"均衡"邻域, f 的一"齐性"泛函; 则 $f(U)$ 必是或为有界数集或有 $f(U)=\mathbb{K}$.

下面再给出一组使得拓扑线性空间 E 上的线性泛函是连续的充分必要条件:

定理 2 仍设 f 是拓扑线性空间 E 上的线性泛函, 则 f 在 E 上连续的充分必要条件是下列条件之一成立:

1) $\mathrm{Re}f(x)$ ($f(x)$ 的实部) 在 E 上连续.

2) 存在一连续凸泛函 $p(x)$, 使得 $|f(x)|\leqslant p(x)\quad(\forall x\in E)$.

3) 存在非空开集 G, 使得 $f(G)\neq\mathbb{K}$.

证明 f 连续 $\Rightarrow$ 1) : 由 f 连续及关系式 $|\mathrm{Re}f(x)|\leqslant|f(x)|$ 可知线性泛函 $\mathrm{Re}f(x)$ 在 θ 点连续, 从而在 E 上连续.

1) $\Rightarrow$ 2): 首先, 由 §3.1 定理 2 的证明中我们已知关系式 $f(x)=\mathrm{Re}f(x)-\mathrm{i}\mathrm{Re}f(\mathrm{i}x)$, $\forall x\in E$. 因此, 由 1) 可知 f 在 E 上连续, 令 $p(x)=|f(x)|$, 直接可导出 2) 的结论.

2) $\Rightarrow$ 3) : 由 $p(x)$ 连续, 故存在开邻域 $U_0\in\mathcal{U}$, 使得 $|f(x)|\leqslant p(x)<1+p(\theta)$ $(\forall x\in U_0)$, 从而 $f(U_0)\neq\mathbb{K}$. 此即导出了 3).

3) $\Rightarrow f$ 连续: 如果 3) 成立, 则存在 $\alpha_0\in\mathbb{K}$, 使得 $f^{-1}(\alpha_0)\bigcap G=\varnothing$. 注意到 G 为开集, 上式表明集 $H_{f,\alpha_0}=\{x\in E\colon\ f(x)=\alpha_0\}$ 不稠于 E. 借助于定理 1 的 2) 及其后的注, 则可导出 f 在 E 上是连续的. □

例 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义"拟范"如下:

$$||(x,y)||^{\triangle}=|x|,\quad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

由此“拟距离”导出的拓扑 τ 构成了拓扑线性空间 $E = (\mathbb{R}^2, \tau)$. 在 E 上定义线性泛函 f_0: $f_0(u) = y$ $(\forall u = (x, y) \in E)$, 可知 N_{f_0} 在 E 中是稠的. 从而由定理 1 可知, f_0 在 E 上是不连续的.

注 从上例可以看出, 拓扑线性空间中的“有限维”线性子空间未必是闭的. 但是, 值得注意的是, 满足 T_0 公理的拓扑线性空间中的有限维线性子空间必是闭的, 因此具有 T_0 公理的有限维拓扑线性空间上的线性泛函必是连续的 (这在后面 §9.1 将会证明).

§8.3 线性算子的有界性和连续性

本节讨论拓扑线性空间中线性算子的有界性与连续性之间的关系. 为此, 我们先来介绍拓扑线性空间中的“有界集”与“有界算子”的定义.

定义 1 设 E 为拓扑线性空间, 称 E 中的集 A 被集 B **吸收**, 是指: 存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$\lambda A \subset B \quad (\forall |\lambda| \leqslant \delta_0, \lambda \in \mathbb{K}).$$

E 中的集 M 称为**有界的**, 是指 M 被 E 的一切 θ 点的邻域吸收.

注 显然, 赋范空间作为拓扑线性空间, 其中集的 (拓扑) 有界性与其按范有界性是等价的. 但对于赋准范空间而言, 情形就不是这样了, 其明显的例子是空间 (s), 从 §1.7 我们知道, 整个空间 (s) 不是有界集 (见前面 §2.1 定义 5 后的命题 3), 但却是按准范有界的. 然而, 在准范空间中, 注意到准范的定义不难看出, 空间中的集如果 (拓扑) 有界, 则必为按准范有界的 (参看 §2.1 定义 5 后的命题 1).

现在, 可以给出有界线性算子的定义:

定义 2 拓扑线性空间 E 到 E_1 的线性算子 T 称为是**有界的**, 是指: T 将 E 内任意的有界集映为 E_1 内的有界集.

作为拓扑线性空间中集的有界性的 (分析) 判别法, 我们给出下面有界集的特征性命题:

引理 1 拓扑线性空间 E 中的非空集合 M 是有界的充分必要条件是下列条件之一成立:

1) 对任意 $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{K}$, $\varepsilon_n \to 0 (n \to \infty)$ 以及任意 $\{x_n\} \subset M$, 必有

$$\varepsilon_n x_n \to \theta \quad (n \to \infty).$$

2) 对任意 $\{x_n\} \subset M$, 必有

$$\frac{1}{n} x_n \to \theta \quad (n \to \infty).$$

证明 M 有界 $\Rightarrow$ 1): 设 M 是有界集, 对任意 $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{K}, \varepsilon_n \to 0 (n \to \infty)$, $\{x_n\} \subset M$, 来验证 $\varepsilon_n x_n \to \theta$. 为此, 注意到对任意 $U \in \mathcal{U}$, 由 M 的有界性假设, 存

在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$\lambda M \subset U, \quad \forall |\lambda| \leqslant \delta_0.$$

再由 $\varepsilon_n \to 0(n \to \infty)$ 的假设, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $|\varepsilon_n| < \delta_0 \quad (\forall n > N)$. 于是得到

$$\varepsilon_n x_n \in U \quad (\forall n > N).$$

即 3) 是成立的.

1) $\Rightarrow$ 2)：是显然的.

2) $\Rightarrow M$ 有界：反设, 如果 M 不是有界的, 则必不能被 $\mathcal{U}$ 中的一切邻域所吸收. 由 §8.1 的引理 2, 不妨设 M 不能被 "均衡" 邻域 $U_0 \in \mathcal{U}$ 吸收, 故对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 必存在 $x_n \in M, |\lambda_n| \leqslant \frac{1}{n}$, 使得 $\lambda_n x_n \notin U_0$. 由 U_0 的均衡性则有 $\frac{1}{n}x_n \notin U_0$. 于是得到点列 $\{x_n\} \subset M$, 显然 $\frac{1}{n}x_n \nrightarrow \theta\,(n \to \infty)$, 与 2) 矛盾! □

使用上面的引理就可以得到下面两个定理：

定理 1　设 T 是拓扑线性空间 E 到 E_1 内的线性算子, 则 T 连续 $\Rightarrow$ 有界.

证明　设 M 为 E 内任意有界集, 我们来说明 $T(M)$ 为 E_1 中的有界集. 为此对于任意 $\{y_n\} \subset T(M)$, 必存在 $x_n \in M$, 使得 $y_n = T(x_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. 由 M 是有界集和引理 1, 我们有 $\frac{1}{n}x_n \to \theta(n \to \infty)$. 再由 T 的可加及连续性便得到

$$\frac{1}{n}y_n = T\left(\frac{1}{n}x_n\right) \to \theta \quad (n \to \infty).$$

再次使用引理 1, 从上则可导出 $T(M)$ 为 E_1 中的有界集. 由定义即知 T 为有界算子. □

注　此定理的逆命题未必成立. 我们有下面的反例：设 E 是无限维的赋范空间, 其上范数拓扑 τ 必严格强于其弱拓扑 ω. 则由共鸣定理可知集的强 (范数)、弱拓扑有界是等价的, 故 (E,ω) 到 (E,τ) 上的恒等算子 I 必是有界算子, 但显然是不连续的算子.

定理 2　设 T 是拓扑线性空间 E 到 E_1 的线性算子, 如果 E 满足 A_1 公理 (第一可数公理), 则有

$$T\text{连续} \Longleftrightarrow T\text{有界}.$$

证明　由定理 1, 只需验证定理的充分性.

首先, 由 E 满足 A_1 公理的假设, 注意到 §8.1 的引理 2, 可知 E 在 θ 点必存在可数均衡邻域基 $\{V_n\}$, 不妨假设其为单调的, 即有 $V_n \supset V_{n+1}(\forall n \in \mathbb{N})$. 显然, $\{\frac{1}{n}V_n\}$ 也必为 θ 点的邻域基.

然后, 反设有界线性算子 T 不是连续的, 则其在 θ 点也必不连续 (因可加算子一点连续可异出其处处连续), 故必存在 E_1 的一个 θ 点的邻域 U_0, 使得 $T(\frac{1}{n}V_n) \not\subset U_0$, 即有

$$T\left(\frac{1}{n}V_n\right) \setminus U_0 \neq \varnothing, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由此, 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in \frac{1}{n}V_n$, 使得 $T(x_n) \notin U_0$, 故点列 $\{T(x_n)\}$ 是不收敛于 θ 的.

但另一方面, 由上可知 $nx_n \in V_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. 注意到 $\{V_n\}$ 是 θ 点的邻域基, 则有 $nx_n \to \theta (n \to \infty)$. 因此, 从引理 1 可知, $\{nx_n\}$ 是 E 中的有界集, 故由 T 的假设 $\{T(nx_n)\}$ 也应该是有界集. 再次用引理 1 则可导出

$$T(x_n) = \frac{1}{n}T(nx_n) \to \theta \quad (n \to \infty),$$

从而与归谬假设所得的上一段结果矛盾. □

下面的引理给出了拓扑线性空间中集合的闭包的一个表达式：

引理 2 设 A 是拓扑线性空间 E 中的点集, $\mathcal{U}$ 是 E 中 θ 点的邻域族, 则有

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (A + U).$$

证明 本引理可由以下几个等价的关系直接导出：

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Longleftrightarrow (x+V) \bigcap A \neq \varnothing \quad (\forall V \in \mathcal{U}) \\ &\Longleftrightarrow x \in A - V \quad (\forall V \in \mathcal{U}) \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} (A - V) \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} (A + V). \end{aligned}$$ □

下面是拓扑线性空间中的线性子空间为有界集之特征性命题：

定理 3 设 E_0 为拓扑线性空间 E 的子空间, 则 E_0 为有界集 $\Longleftrightarrow E_0 \subset \overline{\{\theta\}}$.

证明 “$\Longleftarrow$”：由引理 2 的结论,

$$\overline{\{\theta\}} = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V,$$

显然, $\overline{\{\theta\}}$ 可被 θ 点的任意邻域吸收, 故为有界集, 从而其子集 E_0 也为有界集.

“$\Longrightarrow$”: 设 E_0 为有界集, 则对于任意 $U \in \mathcal{U}$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $\lambda E_0 \subset U \quad (\forall |\lambda| \leqslant \delta_0)$. 注意到 E_0 为线性子空间, 从上可得 $E_0 \subset U$. 再由 U 的任意性及引理 2, 立即得出

$$E_0 \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \overline{\theta}.$$ □

推理 对于满足 T_0 公理的拓扑线性空间而言, 其内不存在 (非零空间的) “有界” 线性子空间.

第九章　弱拓扑 $w(E,E^*)$ 与弱* 拓扑 $w^*(E^*,E)$

对于一个拓扑线性空间 E 而言, 当其上存在非零连续线性泛函时, 除了 E 原有的拓扑外, 还有前面有些节中曾涉及的所谓的“弱拓扑”, 其规范的定义由下面形式表出：

定义 1　设 E 为一拓扑线性空间, 则 E 上由拟范数族 $\{|x^*(\cdot)|\colon\ x^*\in E^*\}$ 所生成的 (局部凸) 拓扑称为 E 上的**弱拓扑**(这里 E^* 表示所有 E 上定义的连续线性泛函) 记为 $w(E,E^*)$.

注 1　从定义 1 显然可知, 拓扑线性空间 E 在 $w(E,E^*)$ 下, 其 θ 点的邻域基由以下开集组成：

$$U(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*;\varepsilon)=\{x\colon\ \ |x_k^*(x)|<\varepsilon,1\leqslant k\leqslant n,x\in E\}.$$

$$\forall\, x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\in E^*,n\in\mathbb{N},\varepsilon>0.$$

注 2　从上拓扑的定义看出, $w(E,E^*)$ 也即为 E 上使 E^* 的元连续的“最弱拓扑”.

注 3　显然, E 上的弱拓扑 $w(E,E^*)$ 弱于 E 中原有的拓扑.

注 4　从弱拓扑的定义可以看出：在拓扑线性空间 E 中, 对于其内的任意“广义点列”$\{x_\delta\colon\ \delta\in\Delta\}$(这里：$\Delta$ 为 (半) 序定向集) 及元 x_0, 其“弱收敛”关系有以下等价形式：

$$x_\delta \xrightarrow[(\text{弱})^*]{} x_0 \Longleftrightarrow x^*(x_\delta)\longrightarrow x^*(x_0),\ \ \forall\, x^*\in E^*.$$

类似地, 对于一个拓扑线性空间 E, 当 $E^*\neq\{0\}$ 时, 在 E^* 上也可以定义另外一种新拓扑.

定义 2　设 E 为拓扑线性空间, 且 $E^*\neq\{0\}$, 则 E^* 上由拟范数族 $\{|J_x(\cdot)|\colon x\in E\}$ 所生成的 (局部凸) 拓扑称为**弱* 拓扑**, 记为 $w^*(E^*,E)$.

注 5　E^* 的弱* 拓扑之 θ 点的邻域基是如下形式集：

$$U^*(x_1,x_2,\cdots,x_n;\varepsilon)=\{x^*\colon\ \ |x^*(x_k)|<\varepsilon,1\leqslant k\leqslant n,x^*\in E^*\}.$$

$$\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in E,n\in\mathbb{N},\varepsilon>0.$$

注 6 与弱拓扑类似, 对 E^* 内的任意“广义点列” $\{x_\delta^*: \ \delta \in \Delta\}$ 及元 x_0^*, 有以下等价形式:

$$x_\delta^* \xrightarrow{(\text{弱}^*)} x_0^* \Longleftrightarrow x_\delta^*(x) \longrightarrow x_0^*(x), \quad \forall x \in E.$$

上面定义的弱拓扑与弱* 拓扑其实均为局部凸拓扑. 为此, 我们介绍局部凸的定义如下:

定义 3 拓扑线性空间 E 称为**局部凸**的, 是指其在 θ 点的任意邻域均包含某一凸邻域 (或等价的有: 其在 θ 点存在一个由凸集组成的邻域基).

例 设 E 为赋拟范空间, 则其必为局部凸空间, 而球列 $\{B(\theta, \frac{1}{n})\}$ 必构成其一 (可数) 凸邻域基.

注 当注意到第三章最后附录的 (三), 由凸、均衡 θ 点邻域必可确定一“次加、绝对齐次”泛函, 我们由 Habn-Banach 定理可以导出: 对于局部凸空间 E, 如其满足 T_0 公理, 那么, 对任意 $\theta \neq x_0 \in E$, 必存在一连续线性泛函 f, 使得 $f_1(x_0) = 1$(从而知 $E^* \neq \{0\}$).

§9.1 弱拓扑的一些性质

在 §3.2 中我们曾得到一个有关弱拓扑的性质, 即: 对于局部凸空间中的凸集, 其 (原拓扑) 闭性与“弱列闭”性等价. 有了弱拓扑的定义后, 通过其等价定义及局部凸空间中的隔离性定理不难导出, 此结论对于“弱闭”也是成立的. 下面再给出有关其 (原拓扑) 有界性与弱拓扑下的有界性等价的一个定理, 它可以作为基础泛函分析中有关 (按范) 强有界与弱有界性等价的命题在局部凸空间的推广. 为此, 先给出一个引理.

引理 1 设 E 为局部凸空间, 则它的拓扑 τ 必可由一族连续的拟范数生成.

证明 首先, 由 §8.1 引理 2 以及空间局部凸的假设, 可以导出: E 中存在由均衡、吸收、开凸集所组成的 θ 点的邻域基 $\mathcal{W} = \{W_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$(事实上, 由 E 假设可知, 对任意 $U \in \mathcal{U}$, 必存在 θ 点的凸邻域 $V \subset U$. 而由 §8.1 引理 2 又知, 存在 θ 点的均衡、吸收、开邻域 $W \subset V$. 最后, 取 W 的凸包 $\langle W \rangle$ 即为所求). 并且从第三章的附录中的定理 6 类似可知: 对于任意上述 θ 点邻域 $W_\lambda \in \mathcal{W}$, 必存在一个连续拟范数 φ_λ, 使得

$$W_\lambda = \{x: \varphi_\lambda(x) < 1, x \in E\}$$

(这里, 我们只要注意从 W_λ 的均衡性则可将原定理 6 中泛函的“正齐性”加强为“绝对齐性”, 因而其成为“拟范数”).

其次, 我们再来证明由拟范数族 $\Phi = \{\varphi_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 所生成的拓扑 $w(E, \Phi)$ 与空间 E 原来的拓扑 τ 是相同的. 事实上, 对任意的 $\lambda \in \Lambda$, 由拟范数 φ_λ 的连续性可知

$$U_\lambda(\varepsilon)=\{x\colon \varphi_\lambda(x)<\varepsilon, x\in E\}\quad(\forall\,\varepsilon>0)$$

均为 (原拓扑 τ 下)θ 点的开邻域, 从而对任意有限个 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\Lambda$, $\bigcap_{k=1}^n U_{\lambda_k}(\varepsilon)$ 亦为 θ 点的开邻域, 故 $w(E,\Phi)\subseteq\tau$.

另一方面, 对任意的 $V\in\mathcal{U}$(在原拓扑 τ 下 θ 点的邻域族), 由 $\{W_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ 为邻域基, 故存在 $\lambda\in\Lambda$, 有 $W_\lambda\subseteq V$, 从前两式可知, 此即 $U_\lambda(1)\subseteq V$, 由此得到 $\tau\subseteq w(E,\Phi)$. 从上两结论, 即导出: $\tau=w(E,\Phi)$. □

下面引理给出了局部凸空间中有界集的表征:

引理 2 *设 E 为局部凸空间, 其拓扑由连续的拟范数族 $\Phi=\{\varphi_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ 所决定, 则子集 B 为有界集的充要条件是*

$$\sup_{x\in B}\varphi_\lambda(x)<+\infty,\quad \forall\lambda\in\Lambda.$$

证明 必要性: 对任意的 $\lambda\in\Lambda$, 由 $U(\varphi_\lambda;1)=\{x\colon \varphi_\lambda(x)<1, x\in E\}$ 是 θ 点邻域, 从 B 的有界性假设, 故知存在 $\delta_0>0$, 使得 $B\subseteq\delta_0 U(\varphi_\lambda;1)$. 所以, 当 $x\in B$ 时, 必有 $\varphi_\lambda(x)\leqslant\delta_0$, 此即导出

$$\sup_{x\in B}\varphi_\lambda(x)\leqslant\delta_0.$$

充分性: 任取 $U(\varphi_{\lambda_1},\varphi_{\lambda_2},\cdots,\varphi_{\lambda_n};\varepsilon)$. 令

$$\alpha=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\sup_{x\in B}\varphi_{\lambda_i}(x)\}.$$

再令 $\delta_0=\frac{\varepsilon}{\alpha}$, 则当 $|\mu|\leqslant\delta_0$ 时, 就有

$$\varphi_{\lambda_i}(\mu x)=|\mu|\varphi_{\lambda_i}(x)\leqslant\delta_0\varphi_{\lambda_i}(x)\leqslant\varepsilon\quad(i=1,2,\cdots,n),\forall x\in B.$$

此即导出 $\mu B\subseteq U(\varphi_{\lambda_1},\cdots,\varphi_{\lambda_n};\varepsilon)$, 也即 B 是有界集. □

借助上面两个引理, 就可以得到下面定理:

定理 1 (Mackey) *对于任意拓扑线性空间 E, 其内 (原拓扑下) 的有界集必为弱拓扑下的有界集. 并且, 当 E 为局部凸空间时, 其逆命题亦真.*

证明 由于 E 上的弱拓扑 $w(E,E^*)$ 弱于 E 原有的拓扑, 因此对 θ 点的任意弱邻域, 其必同时为原拓扑下的邻域, 从而由有界集的定义可直接导出当 B 在原拓扑下有界时, 在弱拓扑下亦必有界.

而当设 E 为局部凸空间时, 如果 B 为弱有界集, 则有

$$\sup_{x\in B}|f(x)|<+\infty,\quad \forall f\in E^*. \tag{9.1.1}$$

而由引理 1 可知, 局部凸空间 E 的原拓扑可由一族连续的拟范数 $\Phi=\{\varphi_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ 生成. 现对任意的 $\lambda\in\Lambda$, 作零空间

$$N_\lambda=\{x\colon \varphi_\lambda(x)=0, x\in E\}.$$

则从 φ_λ 的次加、绝对齐性及连续性可知, N_λ 必为原拓扑线性空间 E 的一个闭线性子空间, 因而当令

$$\widetilde{E}_\lambda = E/N_\lambda$$

时, 注意 §1.12, 在商空间 $\widetilde{E}_\lambda$ 上必可定义一个"范数", 使得

$$\|\widetilde{x}\|_\lambda = \varphi_\lambda(x), \quad \forall \widetilde{x} \in \widetilde{E}_\lambda, \tag{9.1.2}$$

则 $(\widetilde{E}_\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ 构成一个赋范线性空间. 并且, 对任意的 $\widetilde{f}_\lambda \in (\widetilde{E}_\lambda)^*$, $f_\lambda \triangleq \widetilde{f}_\lambda \circ \psi_\lambda \in E^*$(其中 ψ_λ: $E \longrightarrow \widetilde{E}_\lambda$ 为商映射); 因此由式 (9.1.1) 得到

$$\begin{aligned}\sup_{\widetilde{x}\in\psi_\lambda(B)} |\widetilde{f}_\lambda(\widetilde{x})| &= \sup_{x\in B} |(\widetilde{f}_\lambda \circ \psi_\lambda)(x)| \\ &= \sup_{x\in B} |f_\lambda(x)| < \infty, \quad \forall \widetilde{f}_\lambda \in (\widetilde{E}_\lambda)^*.\end{aligned}$$

因此, 由"共鸣定理", 并注意到式 (9.1.2), 我们立即得到

$$\sup_{x\in B} \varphi_\lambda(x) = \sup_{\widetilde{x}\in\psi_\lambda(B)} \|\widetilde{x}\|_\lambda < \infty.$$

而当注意到上面 $\lambda \in \Lambda$ 的任意性, 由引理 2 立即可知 B 在原拓扑下是一个有界集. □

下面再介绍一个相关空间的原拓扑与弱拓扑下等价的非常有用的命题:

定理 2 *设 E 为局部凸空间 (或 $E^* \neq \{0\}$ 的拓扑线性空间), 则*

$$(E, w(E, E^*))^* = E^*.$$

证明 首先, 由于 E 的原拓扑强于弱拓扑 $w(E, E^*)$, 因此

$$(E, w(E, E^*))^* \subseteq E^*.$$

反之, 由弱拓扑 $w(E, E^*)$ 的定义知, 其由拟范族 $\{|f|: f \in E^*\}$ 所确定, 故由"点集拓扑"知识 (f 连续 $\Leftrightarrow$ f 的像集中, 开集的"原像"仍是开集) 即导出

$$(E, w(E, E^*))^* \supseteq E^*.$$ □

注 *上面定理 2 其实对任意的拓扑线性空间均是正确的. 事实上, 当 $E^* = \{0\}$ 时, 从定义可知此时 E 的"弱拓扑"必为"平凡拓扑"(即: 仅有开集为 E 和 ϕ). 因此反之如有线性泛函 $g \neq 0$ 是"弱连续"的, 则知零空间 $N(g)$ 是"弱闭"的. 然而从 $N(g) \neq E$, 此显然与平凡拓扑矛盾.*

当定理 2 中的 E 具有第一可数公理时, 还有下面的推广命题在 §4.3 中定理 3, 我们曾在 Banach 空间中讲述, 并且用闭像定理证明过):

定理 3 设 E 和 E_1 均为局部凸空间, 且 E 具有 A_1 公理. T 为从 E 到 E_1 的线性算子, 则在 E 和 E_1 两者的强拓扑或弱拓扑下, 算子 T 的连续性是相同的 (也即: 线性算子的"强 - 强"连续等价于其"弱 - 弱"连续).

证明 首先, 设 T 在 E 和 E_1 的强拓扑下是一连续线性算子, 则当 $x_\delta \underset{(弱)}{\longrightarrow} x_0$ 时, 从本章开首知道, 此即等价于

$$x^*(x_\delta) \to x^*(x_0), \quad \forall x^* \in E^*. \tag{9.1.3}$$

注意到 T 的假设可知, 对任意 $y^* \in E_1^*$, $y^*(Tx)$ 亦为 E 上的连续线性泛函, 此即

$$y^* \circ T \in E^*, \quad \forall y^* \in E_1^*. \tag{9.1.4}$$

从式 (9.1.3) 与 (9.1.4) 我们便可得到

$$y^*(Tx_\delta) = y^* \circ T(x_\delta) \to y^* \circ T(x_0) = y^*(Tx_0), \quad \forall x^* \in E,$$

也即导出

$$Tx_\delta \underset{(弱)}{\longrightarrow} Tx_0,$$

因此, T 在 E 和 E_1 的弱拓扑下是连续线性算子.

反过来, 若 T 在 E 和 E_1 的弱拓扑下是一连续线性算子, 则由 §8.3 中定理 1 可知: T 必为有界算子, 也即: T 将 E 中任一"弱有界"集映为 E_1 中的某"弱有界"集. 而注意到在弱拓扑下 E 和 E_1 也均为局部凸空间, 故从定理 1 知, T 也将 E 中任一 (原拓扑的) 有界集映为 E_1 中某 (原拓扑的) 有界集. 此即: 在 E 和 E_1 的原拓扑下, T 也是有界线性算子.

最后, 由 E 具有 A_1 公理的假设, 从 §8.3 中定理 2, 我们直接导出在 E 和 E_1 原拓扑下, T 也是连续的. □

从以上定理已经看出, 虽然空间原拓扑与弱拓扑不同, 然而它们有时却有相同的结果. 其实, 弱拓扑从本质上讲与空间的原拓扑的差别是很大的, 因为我们有下面一些定理.

首先给出一个涉及到 Hamel 维数的引理.

引理 设 E 为无穷维的 Fréchet 空间, 则其 Hamel 基必由"非可数"个元组成.

证明 反之, 若 E 以元列 $\{h_n\}$ 为其 Hamel 基, 则令 $E_n = \text{span}\{h_k: 1 \leqslant k \leqslant n\}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$ 时), 其显然均为闭子空间; 且从对任意 $n \in \mathbb{N}$, 及 $x \in E$, 均有

$$x + \frac{h_{n+1}}{m} \longrightarrow x \ \ (m \to \infty),$$

还知 E_n 均为疏集, 因而, 从 $E = \bigcup\limits_n E_n$ 则知 E 为第一纲空间. 这显然与 E 的完备性矛盾. □

定理 4 设 E 为无穷维的赋范空间, 或有无穷维 E^* 的赋 β 范 $(0<\beta<1)$ 空间, 则 E 在弱拓扑下是不满足第一可数公理 A_1 的.

证明 反之, 若设 E 在弱拓扑 $w(E,E^*)$ 下是满足 A_1 公理的, 则其在零点必存在一可数"弱邻域基" $\{U_n\}$. 由此, 从弱邻域基的定义可知, 每个 U_n 对应着"有限个" E^* 中的泛函, 从而 $\{U_n\}$ 对应着"可数个"泛函 $\{f_n\}\subset E^*$.

此外, 注意到当 E 为无穷维的赋范空间时, E^* 亦是无穷维的. 且从泛函知识可知, 无论 E 为赋范空间或赋 β 范空间, E^* 均为 Banach 空间. 再由引理, 还知 E^* 的维数还是非可数的, 因此, 必存在 $g_0\in E^*$, 使得 $g_0\notin \operatorname{span}\{f_n\colon n\in\mathbb{N}\}$. 由此, 我们作弱邻域

$$V_0=\{x\colon |g_0(x)|<1, x\in E\},$$

则 V_0 不会含有 $\{U_n\}$ 中的任一成员. 事实上, 若存在

$$U_{n_0}=U(f_{k_1},f_{k_2},\cdots,f_{k_{n_0}};\varepsilon_0)\subseteq V_0, \tag{9.1.5}$$

注意到 $g_0\notin \operatorname{span}\{f_{k_i};1\leqslant i\leqslant n_0\}$, 则由 §3.5 引理有

$$\bigcap_{i=1}^{n_0}N(f_{k_i})\not\subset N(g_0),$$

故存在 $x_0\in E$, 使得

$$x_0\in\bigcap_{i=1}^{n_0}N(f_{k_i})\backslash N(g_0). \tag{9.1.6}$$

因此, 由 $\bigcap_{i=1}^{n_0}N(f_{k_i})$ 仍为线性子空间知

$$nx_0\in\bigcap_{i=1}^{n_0}N(f_{k_i}),\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

所以, 由式 (9.1.5), 从上式可得

$$nx_0\in U_{n_0}\subseteq V_0,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

而由 V_0 取法, 从上则可导出

$$|g_0(nx_0)|<1,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

因此, $g_0(x_0)=0$. 但此显然与式 (9.1.6) 的取法 $x_0\notin N(g_0)$ 矛盾. □

为介绍弱拓扑与原空间拓扑另一本质的差别, 先介绍有关弱邻域的定理.

定理 5 设 E 为满足 T_0 公理无穷维的局部凸空间, 则 E 在弱拓扑下的任意邻域均是无界的 (从而也是原拓扑下的无界集).

证明 不妨只对零点来讨论. 设 $U = U(f_1, f_2, \cdots, f_n; \varepsilon)$ 为零点任意弱邻域. 从 E 的假设不难导出 E^* 亦是无穷维的, 故存在 $f_0 \in E^*$, 使得 $f_0 \notin \operatorname{span}\{f_i\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$. 由此, 从 §3.5 引理有

$$\bigcap_{k=1}^{n} N(f_k) \not\subset N(f_0).$$

故存在 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} N(f_k)$, 使得 $f_0(x_0) \neq 0$. 而由 $\bigcap_{k=1}^{n} N(f_k)$ 亦为线性子空间, 可得到

$$mx_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} N(f_k), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

故从 U 的取法可知 $mx_0 \in U$ $(\forall m \in \mathbb{N})$, 因此导出

$$\sup_{x \in U} |f_0(x)| \geqslant |f_0(mx_0)| = m|f_0(x_0)|, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

再由引理 2 知 $U = U(f_1, f_2, \cdots, f_n; \varepsilon)$ 为弱无界集. □

注 1 当定理 5 中的空间 E 是赋范或者有无穷维 E^* 的赋 β 范空间时, 利用定理 4, 我们可以简化证明如下: 反之, 若 θ 点的某"弱邻域" U_0 有界, 则 E 在"弱拓扑"下为局部有界空间, 且 $\{\frac{U_0}{n}\}$ 组成其 θ 点的一可数邻域基, 即 E 的弱拓扑具有 A_1 公理, 矛盾!

注 2 当定理 5 中的空间 E 不满足 A_1 公理时, 利用定理 1, 我们也可简化证明如下: 反之, 若 θ 点的某"弱邻域" U_0 弱有界, 由于 U_0 内必含一 θ 点的强邻域 V_0, 且由定理 1 又知, 此原拓扑的 θ 点邻域 V_0 亦是弱有界, 因而也是强有界的, 因此, 由 $\{\frac{V_0}{n}\}$ 组成原拓扑 θ 点的可数邻域基, 知 E 具有 A_1 公理, 矛盾!

从定理 4 和 5, 我们直接可以得到下面的推理:

推理 1 设 E 为无穷维的赋范空间, 或有无穷维 E^* 的赋 β 范 $(0 < \beta < 1)$ 空间, 则 E 在弱拓扑下是不可距离化的. 并且, 对赋范空间而言, 其任意弱邻域均是按范数的无界集. □

从定理 5 我们还可以得到下面的结论:

定理 6 任意无穷维的赋范空间 E, 在其弱拓扑下均是"第一纲"的.

证明 对任意自然数 n, 原心球 $B_n \triangleq \{x\colon \|x\| \leqslant n, x \in E\}$ 均为 E 中按范数拓扑下的闭凸集. 故从 §9.1 开首的说明, 可知其亦是弱闭集. 再因 B_n 是按范有界集, 故由定理 5 可知其不可能包含任意的弱邻域. 此即: B_n 在弱拓扑下不含任何内点, 也即 B_n 是弱疏集. 由此我们立即导出空间

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

在弱拓扑下是第一纲的. □

作为本节的最后, 我们再给出有关有限维空间中原拓扑与其弱拓扑等价的一个定理. 为此先给出一个引理.

引理 *设 E 为满足 T_0 公理的有限维拓扑线性空间, 则 E 必与欧氏空间线性同胚.*

证明 取 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 E 的一组基. 令

$$T\colon (a_1, a_2, \cdots, a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

则 T 是欧氏空间 $\mathbb{K}^n$ 到 E 的一个线性映像, 且 T 是单的、满的和连续的. 由于 $\mathbb{K}^n$ 的单位原心球面 S_1 是紧的, 故 $T(S_1)$ 也是紧的. 又由于 E 满足 T_0 公理, 故 $T(S_1)$ 是闭的. 且由 $\theta \notin T(S_1)$, 从而 $E \backslash T(S_1)$ 是零点邻域, 故它含有零点的均衡邻域 V. 再令 B_1 为 $\mathbb{K}^n$ 的闭单位原心球. 若 $x \notin T(B_1)$, 则 $\|T^{-1}(x)\|_2 > 1$(注意 $\mathbb{K}^n$ 的范数即 (ℓ^2) 的范数), 从而

$$\frac{x}{\|T^{-1}(x)\|_2} = \frac{T(T^{-1}(x))}{\|T^{-1}(x)\|_2} \in T(S_1),$$

故由 V 的取法可知 $x \notin V$. 因而我们导出 $V \subseteq T(B_1)$, 即 $T^{-1}(V) \subseteq B_1$. 最后, 注意到 T^{-1} 是线性的, 由此即知 T^{-1} 是连续的. □

定理 7 *设 E 为满足 T_0 公理的拓扑线性空间, 则当 E 为有限维时, 其拓扑与弱拓扑是等价的. 反之, 当 E 是赋范空间时, 该逆命题亦真.*

证明 由于 E 为满足 T_0 公理的有限维拓扑线性空间, 故其在 (原拓扑) 下与欧氏空间 $\mathbb{K}^n$(n 为 E 的维数) 线性同胚. 又由 E 在弱拓扑下也是满足 T_0 公理的有限维拓扑线性空间, 故 $(E, w(E, E^*))$ 也线性同胚于 $\mathbb{K}^n$, 故 E 的原拓扑与弱拓扑是等价的.

下面, 我们来证明定理的后一部分结论: 令

$$O_1 = \{x\colon \ \|x\| < 1, x \in E\}$$

为 E 中的单位原心开球. 又由 E 的假设可知 O_1 也为 E 在弱拓扑下的开集, 于是存在零点的弱邻域

$$U(f_1, f_2, \cdots, f_n; \varepsilon) \subseteq O_1,$$

因此, 若设 E 是无限维的, 则从定理 5 可知, 弱邻域 $U(f_1, f_2, \cdots, f_n; \varepsilon)$ 在 E 的范数拓扑下是无界的, 此与 O_1 为赋范空间 E 中的有界集矛盾. □

§9.2 弱* 拓扑的一些性质

本节介绍 E^* 上的弱* 拓扑的一些基本特性. 首先, 与 §9.1 定理 2 类似, 我们给出在弱* 拓扑下 E^* 的共轭空间的一个定理.

定理 1 设 E 为局部凸空间 (或 $E^*\neq\{0\}$ 的拓扑线性空间), 则

$$(E^*,w^*(E^*,E))^*=J(E)(\equiv\{J_x\colon x\in E\}).$$

证明 首先, 由弱* 拓扑的定义可知

$$J(E)\subseteq(E^*,w^*(E^*,E))^*$$

(注意 E^* 上的弱* 拓扑是由拟范族 $\{\,|Jx|\colon x\in E\}$ 确定的).

其次, 若 $x^{**}\in(E^*,w^*(E^*,E))^*$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 θ 点的弱* 邻域 $U^*(x_1,x_2,\cdots,x_n;\varepsilon')$, 使得

$$U^*(x_1,x_2,\cdots,x_n;\varepsilon')\subseteq\{x^*\in E^*\colon |x^{**}(x^*)|<\varepsilon\},$$

从而

$$\bigcap_{i=1}^{n}N(J_{x_i})\subseteq N(x^{**}).$$

故仍由 §3.5 的引理可知 $x^{**}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iJ_{x_i}$(其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K}$), 因此导出 $x^{**}\in J(E)$. □

为介绍下面有关 $J(E)$ 在弱* 拓扑下稠于 E^{**} 的重要定理, 先给出一个定义.

定义 1 设 E 为线性空间, $\mathcal{A}$ 为 E 上一族泛函, 我们称 $\mathcal{A}$ 是**全定** E的, 是指: 对 E 中任一元 x_0, 若 $g(x_0)=0\ \ (\forall g\in\mathcal{A})$, 则有 $x_0=\theta$. 当 E 是拓扑线性空间时, 称 E 中的集 B 在 E 中是**基本的**, 是指 $\overline{\mathrm{span}}B=E$.

下面将指出在空间 E^* 中, 有关集是 "全定 E" 的与其在弱* 拓扑下是 E^* 的 "基本集" 这两个概念是等价的重要结论. 为此, 我们先介绍一个有关拓扑线性空间中集 A 的 "极" 的定义及一个引理.

定义 2 设 E 为拓扑线性空间, A 为 E 的子集, 则称

$$A^\circ=\{f\colon |f(x)|\leqslant 1,x\in A,f\in E^*\}$$

为 A 的**极**, 并称

$${}^\circ A^\circ\equiv{}^\circ(A^\circ)=\{x\colon |\varphi(x)|\leqslant 1,\varphi\in A^\circ,x\in E\}$$

为 A 的**二次极**.

注 从上定义易见, 对于 E 的子集 A 和 B, 其"极"有以下基本性质:

1) 若 $A \subseteq B$, 则有 $A^\circ \supseteq B^\circ$;

2) $(\alpha A)^\circ = \frac{1}{\alpha} A^\circ$ $(\alpha \neq 0)$.

引理 1 设 E 为局部凸空间 (或 $E^* \neq \{0\}$ 的拓扑线性空间), A 为 E 的子集, 则

1) 极 A° 必为 E^* 的均衡凸集, 且是弱* 闭的;

2) 二次极 $^\circ A^\circ$ 必为集 A 的均衡凸、(弱) 闭包.

证明 1) 的结论是显然的. 我们只证明 2) 的结论.

首先, 我们不难看出 $^\circ A^\circ$ 亦是一个弱闭的均衡凸集 (注意. 在局部凸空间中, (强) 的凸集与弱闭凸集是相同的). 故当设 A 的均衡凸、弱闭包为 $\overline{aco(A)}^w$ 时, 则有

$$\overline{aco(A)}^w \subseteq {}^\circ A^\circ.$$

因此, 反之, 若有 $\overline{aco(A)}^w \neq {}^\circ A^\circ$, 则存在 $x_1 \in {}^\circ A^\circ \backslash \overline{aco(A)}^w$, 从而由隔离性定理可知 (注意, 如前所述, 由于在局部凸空间, 有相应的连续线性泛函的 (保控) 延拓问题, 因此亦有相应一些凸集的隔离性定理): 存在 $f_1 \in E^*$, 使得

$$f_1(x_1) > 1, \quad |f_1(z)| \leqslant 1, \quad \forall z \in \overline{aco(A)}^w.$$

这样, 由上面式子则可得到

$$x_1 \notin {}^\circ A^\circ, \quad f_1 \in A^\circ,$$

从而与 x_1 的取法矛盾. □

有了上面的引理, 我们就可以导出所需的结论.

定理 2 设 E 为满足 T_0 公理的局部凸空间, 则在弱* 拓扑下, E^* 的子集 $\mathcal{A}$ 是"全定" E 的等价于其在 E^* 内是"基本"的 (即: $\mathcal{A}$ 全定 E 的充要条件是 $\overline{\mathrm{span}\mathcal{A}}^{w^*} = E^*$).

证明 充分性: 设 $\overline{\mathrm{span}\mathcal{A}}^{w^*} = E^*$, 则对任意 $x_0 \in E$, 若

$$z^*(x_0) = 0, \quad \forall z^* \in \mathcal{A},$$

则

$$y^*(x_0) = 0, \quad \forall y^* \in \mathrm{span}\mathcal{A},$$

从而由假设可得到

$$x^*(x_0) = 0, \quad \forall x^* \in E^*,$$

因此, 从 Hahn-Banach 定理的推理我们导出 $x_0 = \theta$, 即 E^* 的子集 $\mathcal{A}$ 是全定 E 的.

必要性: 现考查在弱* 拓扑下的局部凸空间 E^*. 注意到定理 1, 可以看到, 对于 E^* 上任一连续线性泛函, 其必形如 $J_{x_0} \in J(E)$, 故若对 E^* 的子集 $\mathcal{A}$ 有

$$|J_{x_0}(y^*)| \leqslant 1, \quad \forall y^* \in \mathrm{span}\mathcal{A},$$

即有

$$|y^*(x_0)| \leqslant 1, \quad \forall y^* \in \mathrm{span}\mathcal{A},$$

则由 $\mathrm{span}\mathcal{A}$ 为线性子空间知

$$y^*(x_0) = 0, \quad \forall y^* \in \mathcal{A}.$$

这样, 当假设 $\mathcal{A}$ 是全定 E 时, 必有 $x_0 = \theta$, 从而得到 $(\mathrm{span}\mathcal{A})^\circ = \{\theta\}$. 于是由二次极的定义, 又可导出

$$^\circ(\mathrm{span}\mathcal{A})^\circ = {}^\circ\{\theta\} = E^*.$$

最后由引理 1 的 2) 立即导出

$$\overline{\mathrm{span}\mathcal{A}}^{w^*} = {}^\circ(\mathrm{span}\mathcal{A})^\circ = {}^\circ\{\theta\} = E^*.$$

□

从上定理我们可以直接导出下面一个推理:

推理 设 E 为赋范线性空间, 则 $\overline{J(E)}^{w^*} = E^{**}$.

证明 由 Hahn-Banach 定理的推理可知 $J(E)$ 是全定 E^* 的, 再注意到 $J(E)$ 为线性子空间, 故从定理 2 可直接导出本推理的结果. □

注 从泛函分析中我们知道, 在 E^{**} 的范数拓扑下, 一般是没有 $\overline{J(E)} = E^{**}$ 之关系的, 反例只要取 E 为不自反的 Banach 空间即可.

下面介绍空间 E^* 在弱* 拓扑下有关紧性的一个重要结果. 为此, 先给出下面的定义:

定义 3 设 E 为拓扑线性空间, B 为 E 的子集, 称 B 为**完全有界的**, 是指: 对任一零点邻域 U, 存在 B 的有限子集 B_u, 使得 $B \subseteq B_u + U$.

E 中的子集 D 称为**完备的**, 是指 D 中的任何一个 "广义 Cauchy 列" 均在 D 中收敛. 当 $E = D$ 时, 称 E 是**完备的**. 特别地, 空间 E 称为**列完备的**, 是指: 对 E 中任何一个 Cauchy 列, 其均在 E 中收敛.

为了下面定理证明的需要, 重述一下关于紧性的一个重要命题, 它显示出一个集的紧性与完全有界性及完备性之间的紧密联系.

Hausdorff 定理 拓扑线性空间 E 中的集 C 是紧集的充分必要条件是: C 是完全有界的完备集.

证明 必要性是显然的. 这里仅证明定理的充分性.

要证明 C 是紧集, 由点集拓扑知识, 我们只需证明对 C 中的任意一个 "广义列" $\{x_\delta\colon \delta \in D\}$ 在 C 中都有聚点. 由于每个广义列都有 "泛子广义列" (关于泛广义列的定义及其基本性质可参见 J.L.Kelley《General Topology》p.81), 因此不妨设 $\{x_\delta\colon \delta \in D\}$ 是泛广义列. 下面证明 $\{x_\delta\colon \delta \in D\}$ 是广义 Cauchy 列. 事实上, 设 U

是 E 中的任一个零元邻域, 则存在一个均衡的零元邻域 V, 使得 $V+V\subseteq U$. 由 C 是完全有界的可知: 存在一个有限子集 $B=\{y_1,\cdots,y_n\}\subseteq E$, 使得 $C\subseteq B+V$. 由于 $\{x_\delta\colon \delta\in D\}$ 是 C 中的泛广义列, 故存在 y_j (其中 $1\leqslant j\leqslant n$) 及 $\gamma\in D$, 使得 $x_\delta\in y_j+V(\delta\geqslant\gamma)$. 因此对任意的 $\delta,\delta'\geqslant\gamma$, 有

$$x_\delta-x_{\delta'}\in(y_j+V)-(y_j+V)\subseteq U,$$

故 $\{x_\delta\colon \delta\in D\}$ 是广义 Cauchy 列. 再由 C 是完备的, 则可导出 $\{x_\delta\colon \delta\in D\}$ 收敛于 C 中的某一点. □

定理 3 (Alaoglu-Bourbaki 定理) 设 E 为拓扑线性空间, U 为 E 的任一零点邻域, 则其极 U° 必为 E^* 的弱* 紧集.

证明 由 Hausdorff 定理可知, 为了证明 U° 是弱* 紧集, 只要证明其在弱* 拓扑下既是完全有界的又是完备的. 下面就来验证这一事实.

首先, 我们指出, 在弱* 拓扑下, U° 是完全有界的. 事实上, 对于 E 中任意有限个元 $x_i(1\leqslant i\leqslant n_0)$, 由 θ 点邻域 U 的吸收性可知, 存在 $\delta>0$, 使得 $\delta x_i\in U$, 从而由极的定义知

$$\sup_{y^*\in U^\circ}|J_{x_i}(y^*)|=\sup_{y^*\in U^\circ}|y^*(x_i)|\leqslant\frac{1}{\delta}<+\infty\quad(1\leqslant i\leqslant n_0),$$

因此 $\mathbb{K}^{n_0}$ 中的集 $\{(J_{x_1}(y^*),\cdots,J_{x_{n_0}}(y^*))\colon\quad y^*\in U^\circ\}$ 是有界的. 注意到欧氏空间 $\mathbb{K}^{n_0}$ 上的有界集必是完全有界的, 因此, 对任意 $\varepsilon>0$, 从完全有界集

$$\{(J_{x_1}(y^*),\cdots,J_{x_{n_0}}(y^*))\colon\quad y^*\in U^\circ\}$$

中必可找到"有限 ε 网"

$$\{(J_{x_1}(y_k^*),\cdots,J_{x_{n_0}}(y_k^*))\colon\quad y_k^*\in U^\circ,1\leqslant k\leqslant m_0\},$$

使得对任意 $y^*\in U^\circ$, 存在 $y_{k_0}^*(1\leqslant k_0\leqslant m_0)$, 有

$$|J_{x_i}(y^*)-J_{x_i}(y_{k_0}^*)|<\varepsilon\quad(1\leqslant i\leqslant n_0).$$

因此, 注意到弱* 拓扑的定义, 我们立即导出 U° 在弱* 拓扑下是完全有界的.

其次, 我们再来验证, 在弱* 拓扑下, U° 还是完备的. 事实上, 设 $\{y_\delta^*\colon \delta\in\Delta\}\subseteq U^\circ$ 为空间 E^* 中按弱* 拓扑的"广义 Cauchy 列", 则对任意 $x\in E,\{y_\delta^*(x)\colon \delta\in\Delta\}$ 均为数域 $\mathbb{K}$ 的"广义 Cauchy 列". 因此, 由数域 $\mathbb{K}$ 的完备性知, 存在数 $g(x)$, 使得

$$\lim_{\delta}y_\delta^*(x)=g(x),$$

则 g 亦为 E 上的线性泛函. 由 $y_\delta^* \in U^\circ$ $(\delta \in \Delta)$, 从上式还可得到

$$\sup_{x\in U} |g(x)| \leqslant 1,$$

因此, 从 §8.2 的定理 1 即知 $g \in E^*$, 且有 $g \in U^\circ$. 总上, 我们导出

$$y_\delta^* \xrightarrow{(\text{弱}^*)} g \in U^\circ,$$

从而证得集 U° 的完备性. □

注　从定理 3 证明的第一段中, 我们事实上已经证得如下结论: 在弱* 拓扑下, E^* 中子集的有界性与完全有界性是等价的.

从 Alaoglu-Bourbaki 定理, 我们可以得到下面几个推理:

推理 1　拓扑线性空间 E 上的任一"等度连续"泛函族 $\mathcal{A} \subseteq E^*$, 必为 E^* 内的相对弱* 紧集.

证明　由泛函族等度连续的定义可知: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个零元邻域 U, 使得

$$|y^*(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in U, y^* \in \mathcal{A}.$$

即

$$\mathcal{A} \subseteq \left(\frac{1}{\varepsilon}U\right)^\circ = \varepsilon U^\circ.$$

由此直接从定理 3 可得本定理结论. □

推理 2　设 E 为赋范线性空间, 则 E^* 中每一 (范数) 有界集 $\mathcal{A}$ 均是相对弱* 紧集; 特别地, E^* 中每一个闭球 $B^*(x_0^*, r)$ 均是弱* 紧集.

证明　注意到 E 的闭单位原心球 B_1 的极 $(B_1)^\circ = B_1^*$, 以及

$$(\alpha B_1)^\circ = \frac{1}{\alpha} B_1^* \quad (\alpha \neq 0),$$

因此, 对 E^* 中任一有界集 $\mathcal{A}$ 及闭球 $B^*(x_0^*, r)$, 必存在 $\delta > 0$, 使得

$$\mathcal{A}, B^*(x_0^*, r) \subseteq (\delta B_1)^\circ.$$

故由定理 3 可知 $\mathcal{A}$ 和 $B^*(x_0^*, r)$ 均是相对弱* 紧集, 且从前式还可导出

$$B^*(x_0^*, r) = x_0^* + rB_1^* = x_0^* + \left(\frac{1}{r}B_1\right)^\circ.$$

从而, 注意到定理 3, 由上式还知 $B^*(x_0^*, r)$ 是一个弱* 紧集. □

注　虽然从上定理我们知道: 对于赋范空间 E 而言, E^* 空间中的任意闭球均是弱* 紧集, 但我们却不能说, 任意"球面"集合也是弱* 紧的. 反例可在 $(l^\infty)(= (l^1)^*)$ 中的单位原心球面 S_1 内取一列元 $\{e_n^*\}$ 如下:

$$e_n^* = (0, \cdots, 0, \underset{(n)}{1}, 0, \cdots), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

则由 $e_n^* \xrightarrow{(弱 *)} 0(n \to \infty)$ 可看出.

当 E 为“可分”赋范线性空间时, 我们有下面比推理 2 更强的结论:

推理 3 设 E 为可分赋范线性空间, 则 E^* 闭单位原心球 B_1^* 在弱* 拓扑下是一个紧度量空间, 从而是弱* 可分的弱* 自列紧集.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 E 中的可数稠子集. 令

$$\rho(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x^*(x_n) - y^*(x_n)|}{1 + |x^*(x_n) - y^*(x_n)|}, \quad \forall x^*, y^* \in B_1^*.$$

易见 (B_1^*, ρ) 是一个度量空间, 并且对 B_1^* 中的任意一个“广义点列” $\{x_\delta^*: \ \delta \in \Delta\}$ 及 $x^* \in B_1^*$, 有:“$x_\delta^* \xrightarrow{(弱 *)} x^*$ 当且仅当 $\rho(x_\delta^*, x^*) \longrightarrow 0$.” 故由度量 ρ 所生成的拓扑与 E^* 上的弱* 拓扑是一样的. 由推理 2 即得所需的结论. □

推理 4 设 E 为可分赋范线性空间, 则 E^* 必是弱* 可分的.

证明 设 $\{x_n^*\}$ 是 B_1^* 中的弱* 可数稠子集. 令 $D^* = \{rx_n^*: \ n \in \mathbb{N}, r为有理数\}$, 则可导出 $\overline{D^*}^{w^*} = E^*$. □

特别地, 由推理 2, 并注意到 Hausdorff 定理以及“共鸣定理”, 我们还可以直接得到下面的推理:

推理 5 设 E 为 Banach 空间, $\mathcal{A}$ 为 E^* 的子集, 则 $\mathcal{A}$ 为弱* 紧的充分必要条件是 $\mathcal{A}$ 为弱* 闭且 (按范) 有界的. □

注 推理 5 当 E 是不完备的赋范线性空间时是未必成立的, 我们有下面的反例.

反例 设 $E = (c_{00})$ (参看 §1.2 例 1), 则 E 是不完备的赋范空间. 取 E^* 中可列个元 $\{x_n^*\}$ 如下:

$$x_n^*(x) = \xi_n, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (c_{00}),$$

并取 E^* 中的子集 $\mathcal{A} = \{0, nx_n^*: n \in \mathbb{N}\}$, 则 $\mathcal{A}$ 为一弱* 紧集,

事实上, 由于 (c_{00}) 中的元均“仅有有限个坐标非 0”, 故知

$$nx_n^*(x) = n\xi_n \longrightarrow 0, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in E;$$

即有

$$nx_n^* \xrightarrow{(弱^*)} 0 \quad (n \to \infty).$$

因此, 对 $\mathcal{A}$ 的任意一组弱* 拓扑的开覆盖, 当设零点的开覆盖为开集 G_0^* 时, 必存在零点的弱* 邻域 $V_0^* = \{x^* \in E^*: |x^*(x_k)| < \varepsilon, x_k \in E, 1 \leqslant k \leqslant n_0\}$, 使得 $V_0^* \subseteq G_0^*$. 而当注意到上面 w^* 收敛的关系式, 我们可知: 存在自然数 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时, 均有 $|nx_n^*(x_k)| < \varepsilon(1 \leqslant k \leqslant n_0)$. 也即: 当 $n \geqslant N$ 时, 有 $nx_n^* \in G_0^*$, 从而知 $\mathcal{A}$ 满足“有

限覆盖”性质, 此即在弱* 拓扑下 $\mathcal{A}$ 为一紧集. 然而由 $\|nx_n^*\| = n \quad (n \in \mathbb{N})$, 故知 $\mathcal{A}$ 显然不是有界集. □

作为泛函分析中有关 $C[0,1]$ 空间 “万有性” 定理的某种推广 (这里不再限制空间是可分的), 我们还可得到下面非常有用的推理:

推理 6 任何一个 Banach 空间 E 都能“线性等距嵌入”到某个连续函数空间 $C(K)$ 内 (这里, K 为某一紧的 Hausdorff 拓扑空间).

证明 取 K 为 E^* 的闭单位球 B_1^*, 并在其上赋予弱* 拓扑, 则由推理 2 可知 K 为紧的 Hausdorff 空间. 定义 T: $E \longrightarrow C(K)$ 为

$$(Tx)(x^*) = x^*(x), \quad \forall x \in E, \quad x^* \in K,$$

则 T 显然是一个线性的等距映射, 从而推出所需结果. □

利用上面的结果, 我们将转到在赋范线性空间 E 的二次共轭空间 E^{**} 上, 讨论 $J(B_1)$ 与 $B_1{}^{**}$ 之间的关系.

前面我们说过, 对于一个非自反的 Banach 空间, 在 E^{**} 的范数拓扑下, $J(E)$ 是 E^{**} 的一个真闭子空间, 因此 $J(B_1)$ 不会在 B_1^{**} 稠密. 而从定理 2 的推理又知道, 在弱* 拓扑下, $J(E)$ 是稠于 E^{**} 的. 因此, 我们自然会提出一个问题: 在弱* 拓扑下, 单位 (原心) 球的像 $J(B_1)$ 是否也稠于 E^{**} 的单位 (原心) 球 B_1^* 呢? 下面将看出, 这个回答是肯定的.

定理 4 (Goldstine-Weston 定理) 设 E 为赋范线性空间, 则 $\overline{J(B_1)}^{w^*} = B_1^{**}$.

证明 首先, 从推理 2 可知, B_1^{**} 在弱* 拓扑 $(w^*(E^{**}, E^*))$ 下是紧的, 注意到弱* 拓扑满足 Hausdorff 公理, 因此是闭的. 又由于 $J(B_1) \subseteq B_1^{**}$, 故 $\overline{J(B_1)}^{w^*} \subseteq B_1^{**}$, 并且, 显然 $\overline{J(B_1)}^{w^*}$ 是一含零点的均衡闭凸集. 因而, 若本定理不成立, 则有 $\Phi_0 \in B_1^{**} \backslash \overline{J(B_1)}^{w^*}$, 故由 §3.2 定理 5(Ascoli-Mazur 定理) 及本节定理 1, 可以导出: 存在 E^{**}(在弱* 拓扑下) 的连续线性泛函 $J_{x_0^*} \in J(E^*)$, 使得

$$J_{x_0^*}(\Phi_0) > 1, \text{ 且 } \quad |J_{x_0^*}(\psi)| \leqslant 1 \quad (\forall \psi \in \overline{J(B_1)}^{w^*}).$$

从上面后一关系式, 我们得到

$$|x_0^*(x)| = |J_x(x_0^*)| = |J_{x_0^*}(J_x)| \leqslant 1, \quad \forall x \in B_1,$$

故有 $\|x_0^*\| \leqslant 1$. 由此, 注意到 $\Phi_0 \in B_1^{**}$, 故有 $\|\Phi_0\| \leqslant 1$, 从而又可导出

$$|J_{x_0^*}(\Phi_0)| = |\Phi_0(x_0^*)| \leqslant \|\Phi_0\| \, \|x_0^*\| \leqslant 1.$$

而此显然与上面的前一式矛盾. □

对于定理 4, 我们给出下面几个注记:

注 1 不要以为 Goldstine-Weston 定理就是定理 2 后的推理之显然推理! 因为在弱* 拓扑下, 虽然不难从 $\overline{J(B_1)}^{w^*} = B_1^{**}$ 直接导出 $\overline{J(E)}^{w^*} = E^{**}$ 的结论. 然而倒过来却并非显然成立的.

注 2 对于弱* 拓扑而言, 不难从 E^* 的闭单位球 B_1^* 的弱* 可分性直接导出 E^* 的弱* 可分性 (事实上, 当 $\overline{\{x_n^*\}}^{w^*}=B_1^*$ 时, 可令 $D^*=\{rx_n^*\colon n\in\mathbb{N}, r$ 为任意有理数 $\}$, 则有 $\overline{D^*}^{w^*}=E^*$). 然而, 反过来的结论却未必是成立的 (参阅文献 [30]).

注 3 我们熟知: 在赋范空间中 (其实在局部凸空间也对) 一个凸集的 "弱闭包" 与其 "强闭包" (即: 原拓扑下的闭包) 是相等的, 此可由点与闭凸集的分离性定理证得. 从上面的 Goldstine-Weston 定理可看出, 对于弱* 拓扑而言, 上面的结论是未必成立的. 也即未必有 $\overline{\text{凸集}}^{w^*}=\overline{\text{凸集}}^{\|\cdot\|}$. 可见下面反例:

反例 设 E 为不自反的 Banach 空间, 则 $J(B_1)$ 必为 E^{**} 中的 "按范" 闭凸集, 且有 $J(B_1)\neq B_1^{**}$. 但由 Goldstine-Weston 定理可知 $\overline{J(B_1)}^{w^*}=B_1^{**}$, 由此导出 E^{**} 中的凸集 $J(B_1)$ 有 $\overline{J(B_1)}^{w^*}\neq\overline{J(B_1)}^{\|\cdot\|}$.

利用上面的结论, 我们也可再次导出泛函分析有关自反空间特性的一个重要命题:

推理 设 E 为 Banach 空间, 则当 E 自反时, E 的任一有界闭凸集必为弱紧集; 反之, 只要 E 的闭单位 (原心) 球 B_1 是弱紧的, 则 E 必自反.

证明 设 E 为自反空间, K 为 E 中任一有界闭凸集, 则由 §3.2 的 Ascoli- Mazur 定理之推理可知, K 也是弱闭集. 此外, 由于 E 自反, 故 E 的弱拓扑与 $E^{**}=J(E)$ 的弱* 拓扑是一样的, 从而 $J(K)$ 是 E^{**} 中的按范有界的弱* 闭集. 因此, 由定理 3 的推理 2 知 $J(K)$ 在 E^{**} 中是弱* 紧的, 也即 K 为 E 中的弱紧集.

反之, 设 B_1 在 E 中是弱紧的, 则 $J(B_1)$ 亦为 E^{**} 中的弱* 紧集, 从而是弱* 闭的, 这样, 由 Goldstine-Weston 定理立即导出

$$J(B_1)=\overline{J(B_1)}^{w^*}={B_1}^{**},$$

故 $J(E)=E^{**}$, 也即 E 是自反的. □

§9.3 赋范空间的弱完备与弱列备性

在泛函分析中, 对于赋 (拟, 准) 范空间, 我们均是以 Cauchy 列来定义其完备性的, 其实质在于它们均为 (拟) 距离空间, 从而具有 A_1 公理 (第一可数公理), 而对于具有 A_1 公理的拓扑而言, 我们有下面的点集拓扑的基本知识:

引理 1 对于集 M 中具有 A_1 公理的两个拓扑 τ_1 和 τ_2 而言, 它们等价的充分必要条件是使序列的收敛性相同 (此即对任意的 $\{x_n\}\subset M, x\in M$, 有: $x_n\xrightarrow{\tau_1}x\Longleftrightarrow x_n\xrightarrow{\tau_2}x$).

因而此时空间完备性定义中的 "广义点列" 可以换为通常的点列来讨论. 然而, 对于弱拓扑及弱* 拓扑而言, 当 E 为无穷维的赋范空间 (或具有无穷维 E^* 的赋 β 范空间) 时, 由于 E 在弱拓扑下是不具有 A_1 公理 (§9.1 中定理 4) 的. (类似可以证

明当 E 为无穷维的 Banach 空间 (或具有无穷维 E^* 的 Fréchet 空间) 时, E^* 在弱* 拓扑下也是不具有 A_1 公理), 因此上述空间 E(及 E^*) 上就有 "弱完备" 和 "弱 (序) 列 (完) 备" (相应地, "弱* 完备" 与 "弱*(序) 列 (完) 备") 两个不同的概念.

为了进一步体会上两概念的区别, 我们介绍几个定理. 首先, 给出空间关于弱完备及弱* 完备的特征性命题.

定理 1 *设 E 为赋范空间, 则 E 为弱完备的充分必要条件是 E 为有限维的.*

证明 定理的充分性是明显的. 我们只证必要性.

反之, 若 E 是无穷维的, 则 E^* 显然也是无穷维的. 这样, 类似 Kakutani 证明 "闭单位球弱紧是空间的自反特征" 的方法, 将 E^* 中所有 "有限元集" 所组成的集类记为 $\{\pi\}$, 并在其内按 "包含" 关系定义 "序" 关系 (即: 如果 $\pi_1 \subseteq \pi_2$, 则记 $\pi_1 \prec \pi_2$), 显然 $\{\pi\}$ 构成一个定向集.

然后, 注意到 §2.1 附录中的定理 2, 可以找到一个在 E^* 上 (按范数拓扑) 不连续的线性泛函 F, 即有 $F \notin E^{**}$.

此外, 当再注意到 §2.1 后面的例 1, 则可导出: 对于任意 $\pi \in \{\pi\}$, 如设 $\pi = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 时, F 在有限维线性赋范空间 $\mathrm{span}\{f_i\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 上必为一连续线性泛函, 因而其为以某正数 ρ_π 为界的强有界泛函, 故对任意 n 个复数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 必成立关系式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k F(f_k)\right| = \left|F\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\right)\right| \leqslant \rho_\pi \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k\right\|.$$

于是由 Helley 定理可知: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_\pi \in E$, 使得

(i) $\|x_\pi\| \leqslant \rho_\pi + \varepsilon$; (ii) $f_k(x_\pi) = F(f_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

由 (ii) 即知: 对任意 $\pi \in \{\pi\}$, 均存在 $x_\pi \in E$, 使得

$$f(x_\pi) = F(f), \quad \forall f \in \pi. \tag{9.3.1}$$

下面, 我们将要指出: 上述得到的 $\{x_\pi\}$ 构成 E 中的一个 "广义弱 Cauchy 列". 事实上, 对于任意 $f_0 \in E^*$, 必存在 $\pi_0 \in \{\pi\}$, 使得 $f_0 \in \pi_0$. 由此, 对于任意的 $\pi_1, \pi_2 \in \{\pi\}$, 只要 $\pi_1, \pi_2 \succ \pi_0$, 则从式 (9.3.1), 有

$$f_0(x_{\pi_1}) - f_0(x_{\pi_2}) = F(f_0) - F(f_0) = 0,$$

也即导出所需结论.

最后, 由于定理假设 E 是弱完备的, 因而必存在 $x_0 \in E$, 使得 $\{x_\pi\}$ 弱收敛于 x_0, 由此则有

$$\lim_{\pi} f(x_\pi) = f(x_0), \quad \forall f \in E^*. \tag{9.3.2}$$

然而同样注意到对于任意的 $f_0 \in E^*$, 必存在 $\pi_0 \in \{\pi\}$, 使得 $f_0 \in \pi_0$, 因此当 $\pi \succ \pi_0$ 时, 由式 (9.3.1) 又有

$$f_0(x_\pi) = f_0(x_{\pi_0}) = F(f_0), \quad \forall \pi \succ \pi_0, \tag{9.3.3}$$

故由式 (9.3.2) 和 (9.3.3), 立即得到

$$F(f) = f(x_0), \quad \forall f \in E^*.$$

也即有 $F = J_{x_0} \in E^{**}$, 与 F 的取法矛盾! □

为了对 E^* (关于弱* 完备) 引出类似的结果, 我们需要下面的引理:

引理 设 $E_{(n)}$ 为赋范空间 E 内的一个 n 维真线性子空间, 则必存在 E 到 $E_{(n)}$ 内的连续线性投影算子.

证明 设 $x_1, \cdots, x_n$ 为 $E_{(n)}$ 内任意 n 个线性无关元. 由 Hahn-Banach 定理易知, 必存在相应 n 个 (线性无关) 连续线性泛函 $f_1, f_2, \cdots, f_n$, 使得

$$f_m(x_k) = \delta_{mk}, \quad \forall m, k = 1, 2, \cdots, n.$$

现令 E 到 $E_{(n)}$ 上的 (投影) 算子 P 如下:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k, \quad \forall x \in E,$$

则 P 显然是线性的, 且由 $f_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 均连续还知 P 也是连续的. 此外, 从 f_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 的取法还知 $P^2 = P$, 此即证得 P 为 E 到 $E_{(n)}$ 的连续线性投影算子. □

定理 2 设 E 为赋范空间, 则 E^* 为弱* 完备的充分必要条件是 E 为有限维的.

证明 定理的充分性也是明显的. 我们同样也只证必要性.

反之, 若 E 是无穷维的, 则类似定理 1 可知, 在 E 上存在一个不连续的线性泛函 g, 也即有 $g \notin E^*$. 类似地, 设 $\{M_\alpha\}$ 为 E 内所有 "有限元集" 所组成的集类, 并在其内按 "包含" 关系定义 "序" 的关系. 显然 $\{M_\alpha\}$ 亦构成一个定向集. 然后, 注意到对任意 $\alpha \in \{\alpha\}, M_\alpha$ 的线性包 $\operatorname{span}\{M_\alpha\}$ 均为 E 内的有限维线性子空间, 因此由上面引理, E 到 $\operatorname{span}\{M_\alpha\}$ 上的投影 J_α 均是连续的. 同样注意到 §2.1 后面的例 1, 由于 g 在 $\operatorname{span}\{M_\alpha\}$ 上是连续泛函, 故当令

$$f_\alpha = g \circ J_\alpha$$

时, 则有 $f_\alpha \in E^*$.

接着, 我们将要指出, $\{f_\alpha\}$ 构成 E^* 中的一个 "广义弱*Cauchy 列". 事实上, 对于任意元 $x \in E$, 必存在 $\alpha \in \{\alpha\}$, 使得 $x \in M_\alpha$, 因此类似定理 1 的证明可知, 只要

$\alpha_1,\alpha_2 \succ \alpha$, 就有

$$f_{\alpha_1}(x)-f_{\alpha_2}(x)=g[J_{\alpha_1}(x)]-g[J_{\alpha_2}(x)]=g(x)-g(x)=0.$$

并且由此可以导出, 当设 $\{f_\alpha\}$ 的弱* 极限为 f 时, 则有

$$f(x)=\lim_{\alpha} f_\alpha(x)=g(x),\quad \forall x\in E,$$

从而立即导出 $g=f\in E^*$, 与原来 g 的取法矛盾! □

从上两定理可知, 所有无穷维的赋范空间均不能为弱完备的, 其共轭空间均不能为弱* 完备的. 然而, 对于无穷维的赋范空间而言, 它却可以是弱列备, 它的共轭空间却可以是弱* 列备的, 因为我们有下面的定理:

定理 3 *设 E 为"第二纲"的赋 β^* 范空间 $(0<\beta^*\leqslant 1)$, 则 E^* 必是弱* 列备的. 特别地, 当 E 为自反的 Banach 空间时, E 必为弱列备的.*

证明 设 $\{f_n\}\subseteq E^*$ 为任一"弱*Cauchy 列", 则对于任意元 $x\in E,\{f_n(x)\}$ 均为 Cauchy 数列, 因此其必有极限, 记为 $f_0(x)$. 显然 f_0 亦线性泛函, 并且从"推广的共鸣定理"还知 f_0 是连续线性泛函, 也即有

$$f_0\in E^*,\quad f_n\xrightarrow{(弱^*)}f_0\quad(n\to\infty).$$

此即证出 E^* 是弱* 列备的.

此外, 当 E 为自反的 Banach 空间时, E 上的弱拓扑与 $E^{**}(=J(E))$ 上的弱* 拓扑是等价的. 又由上段结果已知 E^{**} 是 弱* 列备的, 从而 E 是弱列备的. □

注 1 *在定理 3 的后半段命题中, 若 E 不是自反空间, 则其相应结论未必成立, 这可由下面正、反两类例子看出:*

例 1 *(ℓ^1) 为非自反的弱列备空间.*

证明 事实上, 从 §3.3 中的定理 2(Schur 定理) 可知, 在 (ℓ^1) 中元列的强、弱收敛是等价的, 而由 (ℓ^1) 是非自反的空间便可直接导出本结论. □

例 2 *当 $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ 为"σ 有限"测度空间时, $L^1(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ 是非自反的弱列备空间.*

证明 设 $\{x_n\}$ 为 $L^1(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ 内任一弱 Cauchy 列, 则注意到 $L^1(\Omega,\mathcal{B},\mu)^*=L^\infty(\Omega,\mathcal{B},\mu)$, 故知: 对于任意可测集 $E\subseteq\Omega$, 数列

$$\left\{\int_E x_k(t)\mu(dt)\right\}_k=\left\{\int_\Omega \chi_E(t)x_k(t)\mu(dt)\right\}_k$$

均为 Cauchy 数列, 从而是收敛的. 由此可以定义如下集函数 τ:

$$\tau(E)=\lim_{k\to\infty}\int_E x_k(t)\mu(dt),\quad \forall E\in\mathcal{B}.$$

由测度论知识可以证明 τ 是一个有界复测度, 并且对于 μ 是绝对连续的, 从而由 Radon-Nikodým 定理可知, 存在元 $x_0 \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E x_k(t)\mu(dt) = \tau(E) = \int_E x_0(t)\mu(dt), \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

由此当 $h(t)$ 为 Ω 上任一可测简单函数时, 从上则有

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega x_k(t)h(t)\mu(dt) = \int_\Omega x_0(t)h(t)\mu(dt).$$

最后, 注意到所有可测的简单函数是空间 $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 的稠集, 因而由上式便可导出

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega x_k(t)f(t)\mu(dt) = \int_\Omega x_0(t)f(t)\mu(dt), \quad \forall f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mu).$$

此即得到 $x_n \xrightarrow[(\text{弱})]{} x_0\ (n\to\infty)$, 从而导出了 $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 的弱列备性. 至于 $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 是非自反的 Banach 空间那是泛函的基本知识. □

反例 (c_0) 为非弱列备的 Banach 空间.

证明 取 (c_0) 中一列元 $\{x_n\}$ 如下:

$$x_n = \sum_{i=1}^n e_i, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

这里 $\{e_n\}$ 为 (c_0) 的标准单位基, 则由于对任意的 $f = \{f_n\} \in (l^1) = (c_0)^*$, 均有 (不妨设 $m > n$)

$$\begin{aligned}|f(x_n) - f(x_m)| &= \left|\sum_{k=1}^n f_k - \sum_{k=1}^n f_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^m f_k\right| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^m |f_k| \to 0 \quad (n, m \to \infty),\end{aligned}$$

从而可知 $\{x_n\}$ 为 (c_0) 中一弱 Cauchy 列. 然而 $\{x_n\}$ 在 (c_0) 中是不存在弱极限的. 事实上, 反之, 若有一元 $x_0 \in (c_0)$, 使得 $x_n \xrightarrow[(\text{弱}^*)]{} x_0\quad (n\to\infty)$, 则对任意的 $m \in \mathbb{N}$, 当取 $g^{(m)} = e_m \in (c_0)^* = (l^1)$ 时, 则可得到, 若 $x_0 = \{\xi_k\}$, 则有 (当 $n \geqslant m$ 时)

$$1 = g^{(m)}(x_n) \longrightarrow g^{(m)}(x_0) = \xi_m \quad (n \longrightarrow \infty), \ \forall m \in \mathbb{N},$$

也即导出 $x_0 = (1, 1, \cdots)$, 但此显然与 $x_0 \in (c_0)$ 假设矛盾. □

§9.4　Krein-Milman 定理

在 §2.5 的最后, 作为附注 (那里定理 1 后面的注 3 和注 4), 我们曾指出一个十分重要的有关自反空间之特征命题, 即 James 定理:"一个 Banach 空间为自反的充分必要条件是其上所有连续线性泛函均可在其单位球上取到最大值". 为强调 James 定理中空间完备性的重要性, 在本节后面, 将给出一个不完备的赋范空间 (从而必为非自反空间), 使得其上所有连续线性泛函均可在其单位球上取到最大值的例子. 为了导出著名的 James 定理, 我们需要介绍一个著名的有关"端点"集合的 Krein-Milman 定理 (值得注意的是, 在本节, 我们均是在实数域的空间上来讨论, 讲述的). 为此, 先给出下面的定义:

定义 1　*设 E 为线性空间, K 为 E 中的非空凸集, 称点 $x_0 \in K$ 为 K 的***端点***, 是指: 若存在点 $y_1, y_2 \in K$, $0 < \lambda < 1$, 使得 $x_0 = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$, 则有 $y_1 = y_2 = x_0$. 此外, 我们将 K 的端点之全体记为 $extK$.*

*设 A 为凸集 K 的非空子集, 称 A 为 K 的一个***极端集***, 是指对任意 $x \in A$, 若存在 $y_1, y_2 \in K$, $0 < \lambda < 1$, 使得 $x = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$, 则有 $y_1, y_2 \in A$(特别地, K 必为自身的极端集).*

例 1　*对于二维空间 $\mathbb{R}^2$ 的三角形、凸的四边形、或凸的 n 边形而言, 相应凸集的顶点即为其端点; 而凸集的边及它们的并集均为极端集.*

例 2　*设 $E = (\ell^1)$, 则 $extB(\theta,1) = \{\pm e_n\colon n \in \mathbb{N}\}$.*

例 3　*设 $E = L^1[a,b]$, 则 $extB(\theta,1) = \varnothing$.*

验证　对任意的 $x \in B(\theta,1)$, 当 $\|x\| < 1$ 时, 显然 $x \notin extB(\theta,1)$. 而当 $\|x\| = 1$ 时, 则存在一点 $c \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^c |x(t)|dt = \int_c^b |x(t)|dt = \frac{1}{2}.$$

那么, 当令 y_1 及 y_2 如下:

$$y_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a,c], \\ 2x(t), & t \in (c,b]; \end{cases} \qquad y_2(t) = \begin{cases} 2x(t), & t \in [a,c], \\ 0, & t \in (c,b]; \end{cases}$$

则显然有 $y_1, y_2 \in L^1[a,b]$, $||y_1|| = ||y_2|| = 1$ 以及 $x = \frac{1}{2}(y_1+y_2)$, 因此 $x \notin extB(\theta,1)$. □

容易证明, 对于线性空间 E 中的凸集 K 而言, 有以下有关极端集的基本性质:

1) x_0 为 K 的端点的充分必要条件是: 单点集 $\{x_0\}$ 为 K 的一个极端集.

2) 若子集族 $\{A_\lambda\colon \lambda \in \Lambda\}$ 均为 K 的极端集, 则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 亦为 K 的极端集.

3) 设 f 为 E 上的线性泛函, 有 $\alpha = \sup_{x\in K} f(x) < +\infty$, 那么, 集

$$A_f \triangleq K \bigcap H_\alpha = \{x \in K\colon f(x) = \alpha\}$$

若不是空集, 则必为 K 的极端集.

4) 当 A_1 为 A_2 的极端集, A_2 为 K 的极端集时, A_1 亦为 K 的极端集.

5) 若 A 为 K 的极端集, 则有 $extA = extK \cap A$.

由上面有关极端集的性质, 就可得到下面有关紧凸集必具有端点的一个命题:

引理 设 E 为具有 T_0 公理的局部凸空间, C 为 E 中一个非空紧凸集, 则 $extC \neq \varnothing$.

证明 令 $\mathcal{A}$ 为 C 中"紧的极端集"所组成的子集族, 则显然 $\mathcal{A}$ 非空. 在 $\mathcal{A}$ 中按包含关系定义其"反序", 即: 当 $A_2 \subseteq A_1$ 时, 定义 $A_2 \succ A_1$, 则对 $\mathcal{A}$ 中任一全序子集族 $\{A_\lambda\}$, 由序关系可知, 它们具有"有限交非空"的性质, 故从 C 的紧性则知 (注意到由假设可知, 空间必具有 Hausdorff 公理)

$$A_0 = \bigcap_\lambda A_\lambda \neq \varnothing,$$

从而其内任意紧集之交必亦为紧集; 且从上面基本性质 2) 可知, A_0 亦为 C 的极端集, 从而 $A_0 \in \mathcal{A}$. 这样由 Zorn 引理, 在 $\mathcal{A}$ 中必存在一个极大元 B_0.

下面, 证明 B_0 必为一个单点集. 事实上, 反之, 若 B_0 中存在两个点 x_1 和 $x_2(x_1 \neq x_2)$, 由 §9.1 前面的注可知, 存在 $f_0 \in E^*$, 使得 $f_0(x_1 - x_2) \neq 0$. 不妨设 $f_0(x_1) < f_0(x_2)$; 且令 $\alpha = \sup_{x\in B_0} f_0(x)$, 注意到 B_0 的紧性, 可知存在一点 $x_0 \in B_0$, 使得

$$f_0(x_0) = \alpha = \sup_{x\in B_0} f_0(x) < +\infty.$$

于是, 再由基本性质 3), 从上两关系式则可得到

$$A_{f_0} \triangleq \{x \in B_0\colon f_0(x) = \alpha\}$$

为 B_0 的极端集, 且从开始的假设可知其必为非空真子集. 从 f_0 的连续性还知其为 B_0 的闭集, 从而也是紧集. 并且, 注意到基本性质 4), 又知 A_{f_0} 亦为 C 的极端集, 从而 $A_{f_0} \in \mathcal{A}$, 且有 $A_{f_0} \succ B_0$, 而此显然与 B_0 的极大元性质矛盾. 最后, 从前面基本性质 1) 立即导出 B_0 即为 C 端点. □

注 上述引理是十分重要和美妙的 (虽然它的证明并不算困难和冗长), 因为从定义看, "端点"本来是一个集的代数性质, 其存在与否, 表面上看, 是与空间 E 内的拓扑无关的. 但通过上面引理却知, 利用拓扑方法亦可对端点进行研究. 特别地, 从引理还可看到, 对 E 的子集 C 而言, 只要能在 E 上定义某种"局部凸拓扑" τ, 使得在 τ 下它是一个"紧集", 那么 C 必具有端点. 然而, 上述引理在非局部凸的拓扑线性空间是未必成立的 (1977 年 Roberts 作出了一个非局部凸的 Fréchet 空间中一个紧凸子集没有端点的例子).

借助于上面引理, 我们可以得到下面著名的定理:

定理 1 (Krein-Milman 定理) 设 E 为具有 T_0 公理的局部凸空间, 则对于 E 中任一非空紧凸集 K, 必有

$$\overline{\text{co}}K = \overline{\text{co}}(extK).$$

证明 首先, 由上面引理知, 此时必有 $ext(K) \neq \varnothing$, 从而可得: $\overline{\text{co}}K \supseteq \overline{\text{co}}(extK)$. 因此, 只需证明 $K \subseteq \overline{\text{co}}(extK)$ 即可.

事实上, 反之, 若有 $x_0 \in K \backslash \overline{\text{co}}(extK)$, 由隔离性定理知存在 $f \in E^*$, 使得

$$f(x_0) > \sup_{y \in \overline{\text{co}}(extK)} f(y). \tag{9.4.1}$$

记 $\alpha = \sup_{z \in K} f(z) (\geqslant f(x_0))$, 并令

$$A_f = \{x\colon f(x) = \alpha, x \in K\}.$$

则从式 (9.4.1) 有

$$A_f \bigcap \overline{\text{co}}(extK) = \varnothing. \tag{9.4.2}$$

而再注意到, 此时 A_f 亦为非空紧凸集, 故从引理又可得到 $extA_f \neq \varnothing$. 今任取 $u \in extA_f$, 则由前面有关极端集与端点的基本性质 3)~1), 我们又可导出 u 亦为 K 的端点, 从而有 $u \in \overline{\text{co}}(ext(K))$. 但此式显然与式 (9.4.2) 矛盾! □

作为定理 1 的应用, 很容易得到下面有关"凹泛函" $c(x)$($-c(x)$ 为凸泛函) 取最小值的一个推理:

推理 设 K 为具有 T_0 公理的局部凸空间上的非空紧凸集, $c(x)$ 为在 K 上"下半连续"的凹泛函, 则 $c(x)$ 在 K 上的最小值必在 K 的端点取到.

证明 从一般拓扑知识知 $c(x)$ 必在 K 上某点 x_0 取到其最小值 δ. 令

$$A = \{x\colon c(x) = c(x_0) = \delta,\ x \in K\},$$

并从 $c(x)$ 的下半连续性易证 A 必为 K 中的闭集, 从而是非空紧集. 此外, 对于任意 $y \in A$, 若有 $x_1, x_2 \in K$, 使得

$$y = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2,\quad 0 < \lambda < 1,$$

则从 A 的假设及 $c(x)$ 的凹性可得

$$\delta = c(y) \geqslant \lambda c(x_1) + (1 - \lambda) c(x_2) \geqslant \lambda\delta + (1 - \lambda)\delta = \delta.$$

由此导出

$$c(x_1) = c(x_2) = \delta,$$

即 $x_1, x_2 \in A$, 从而知 A 为 K 的极端集. 最后, 直接利用定理 1 可知 A 和 K 均有端点, 且从前面基本性质 5) 还知有: $extA \subseteq extK$, 此即得到本推理的结论. □

作为定理 1 的推广, 还有下面的命题 (通常仍称为 Krein-Milman 定理):

定理 2 设 E 为具有 T_0 公理的局部凸空间, K 为 E 的非空紧凸集. 那么对于 $A \subseteq K$, 下列条件等价:

(1) $\inf_{y\in A} f(y) = \inf_{x\in K} f(x), \ \forall f \in E^*$.

(2) $\overline{\text{co}}A = K$.

(3) $extK \subseteq \overline{A}$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2): 反之, 若有 $x_0 \in \overline{\text{co}}A \backslash K$, 则由分离性定理可知, 存在 $f \in E^*$, 使得

$$f(x_0) < \inf_{x\in K} f(x).$$

而当注意到

$$\inf_{y\in A} f(y) = \inf_{y\in\overline{\text{co}}A} f(y) \leqslant f(x_0),$$

则知上面两式显然与 1) 的假设矛盾.

(2) $\Rightarrow$ (3): 对于任意元 $x_0 \in ext(K)$, 及零点的任一均衡凸闭邻域 W, 只要能证明 $(x_0 + W) \cap A \neq \varnothing$ 就可以了. 下面就来证明这一点. 由 $A \subseteq K$ 知 $\overline{A} \subseteq K$, 故 $\overline{A}$ 亦为紧集, 因此从紧的定义可知: 存在有限集 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\} \subseteq A$, 使得

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (y_i + W).$$

令

$$K_i = \overline{\text{co}}\{(y_i + W) \cap A\} (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{9.4.3}$$

注意到它们均为紧集 K 的闭子集, 因此均为紧凸集, 且有

$$K_i \subseteq \overline{\text{co}}(A) \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

这样, 注意到前面包含关系, 便可得到

$$\overline{\text{co}}A = \overline{\text{co}}\left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\right). \tag{9.4.4}$$

而当注意到凸集基本性质及式 (9.4.3), 又有

$$\overline{\text{co}}\left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\right) = \text{co}\left(\bigcup_{i=1}^{m} \overline{\text{co}}K_i\right) = \text{co}\left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\right),$$

从式 (9.4.4), 此即得到

$$\overline{\text{co}}A = \text{co}\left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\right).$$

这样一来, 对于上述任意元 $x_0 \in ext(\overline{\text{co}}A)$(注意 2) 的假设, 从上式可知, 必有 $x_0 \in K_{i_0}$, 而由取法及式 (9.4.3) 也即有 (注意 $y_{i_0}+W$ 亦闭凸集)

$$x_0 \in \overline{\text{co}}[(y_{i_0}+W)\cap A] \subseteq y_{i_0}+W.$$

由此可知, 存在 $w_0 \in W$, 使得 $x_0 = y_{i_0}+w_0$, 故可得到 (由 W 为均衡集)

$$y_{i_0} = x_0 - w_0 \in x_0 + W.$$

因而导出

$$y_{i_0} \in (x_0+W)\cap A.$$

由此可知, 上面 (3) 成立.

(3) ⇒ (1): 由定理假设 $A \subseteq K$, 有

$$\inf_{x\in A} f(y) \geqslant \inf_{x\in K} f(x).$$

注意到前面的推理和 (3) 的假设以及线性泛函 f 的连续性, 立即得到

$$\inf_{x\in K} f(x) = \inf_{y\in extK} f(y) \geqslant \inf_{y\in \bar{A}} f(y) = \inf_{y\in A} f(y).$$

即导出了定理条件 (1). □

注 从定理 2, 特别在具 T_0 的局部凸空间 E 可以得到:"对于 E 的非空紧凸集 K, 如有 $A \subset K$ 使 $\overline{\text{co}}A = K$, 则有 $ext(K) \subseteq \bar{A}$". 此即为著名的 "Krein-Milman 定理的 Milman 逆命题."

下面给出 Krein-Milman 定理的一些推理:

推理 1 设 E 为赋范空间, 必有

$$B^*(\theta,1) = \overline{\text{co}}^{w^*}[extB^*(\theta,1)];$$

特别地, 当 E 为自反的 Banach 空间时, 则有

$$B(\theta,1) = \overline{\text{co}}^{w}[extB(\theta,1)].$$

证明 由 Alaoglu-Bourbaki 定理可知, $B^*(\theta,1)$ 是一个弱* 紧集. 并且, 其显然亦是一个弱* 闭凸集. 故从定理 1 直接可导出本推理的上半结论. 至于后半结论, 只要注意到当 E 为自反的 Banach 空间时, E^* 上的弱* 拓扑与 E 上的弱拓扑是一致的, 因此从上半结论直接便可得到. □

注 从上推理可知, 任意赋范空间的共轭空间, 其内的闭单位球必均具有端点. 特别地, 任意自反的 Banach 空间中的任意闭凸集必均具有端点 (注意: 对凸集而言, (强) 闭与弱闭等价).

推理 2 设 E 为赋范空间, 则有 $extB^*(\theta,1)$ 是"全定" E 的.

证明 从推理 1 显然可知：在弱* 拓扑下, $extB^*(\theta,1)$ 必为 E^* 的基本集. 由此直接利用 §9.2 中定理 2 的结果就可得到所需的结论. □

下面介绍一个由赋范空间 E 的端点来判断 E 不能为"共轭空间"(即：存在一赋范空间 E_1 使得 E_1^* 等距线性同构于 E) 的推理：

推理 3 设 E 为无穷维的赋范空间, 如果 $extB(\theta,1)$ 为有限点集, 则 E 必不能为共轭空间.

证明 由 $extB(\theta,1)$ 为有限点集知 $\mathrm{span}[extB(\theta,1)]$ 为 E 的有限维线性子空间. 反之, 若 E 为一共轭空间, 即存在一赋范空间 E_1, 使得 $E_1^* \cong E$(此处"$\cong$"是"线性等距"意义), 故从推理 1 有

$$B(\theta,1) = \overline{\mathrm{co}}^{w_1^*}[extB(\theta,1)]$$

(这里, $B(0,1)$ 视为 E_1^* 中的单位原心球, 而 w_1^* 指的是 E_1^* 的弱* 拓扑). 最后, 从弱* 拓扑的定义可知 E_1^* 中的任意有限维线性子空间亦是弱* 闭的, 故从上则可导出

$$B(\theta,1) \subseteq \mathrm{span}[extB(\theta,1)].$$

而此显然与 E 是无穷维的赋范空间假设相矛盾. □

推理 4 空间 $L^1[a,b]$ 和 $C[a,b]$ 均不是共轭空间.

证明 从前面例子已知：$extB[L^1[a,b]] = \varnothing$. 此外, 亦可验证：$extB[C[a,b]] = \{1,-1\}$, 因而从推理 3 可直接得出结论. □

在本节的最后, 值得一提的是所谓具有 Krein-Milman 性质的空间. 我们先给出以下定义：

定义 2 Banach 空间 E 称为具有**Krein-Milman 性质**(简记为**KM 性质**) 的, 是指：对 E 中任意非空有界闭凸集 K, 均有

$$K = \overline{\mathrm{co}}(extK).$$

注 从推理 1, 并注意到闭凸集强闭与弱闭性是等价的, 当然知道：自反空间必具有 KM 性质.

下面, 再给出一个有关具 KM 性质的空间的特征性命题：

定理 3* 设 E 为 Banach 空间, 则 E 具有 KM 性质的充分必要条件是其每一个非空有界闭凸集至少有一个端点.

证明 只需证明其充分性. 令 $A \subseteq E$ 为任一非空有界闭凸集. 由假设知 $extA \neq \varnothing$. 反之, 如有 $B = \overline{\mathrm{co}}[extA] \neq A$. 则由 $B \subset A$, 故必存在一点, $x_1 \in A\backslash B$. 这样, 由隔离性定理 (Ascoli-Mazur 定理), 我们则可取一泛函 $f_1 \in E^*$, 使得

注意到著名的 Bishop-Phelps 定理:("设 A 是 Banach 空间 E 中的有界闭凸集, 则 E^* 中在集 A 上达到最大值的泛函是稠密于 E^* 的 (参见文献 [31])"). 我们则可找到在 A 的 X_0 点达到其最大值的另一泛函 $f_0 \in E^*$, 仍使上面相应不等式成立, 即有 $\sup f_0(y) < f_0(x_1) y \in B$ 从而我们导出

$$\sup_{y\in B} f_0(y) < f_0(x_0).$$

从而我们导出

$$\sup_{y\in B} f_0(y) < \max_{x\in A} f_0(x) = f_0(x_0) \tag{9.4.5}$$

设 $\xi_0 = f_0(x_0)$, 并设闭超平面

$$N_{\xi_0} = \{x:\quad f_0(x) = \xi_0, x \in E\}.$$

显然, $C \triangleq A \bigcap N_{\xi_0}$ 亦为 E 中的非空有界闭凸集, 则由定理假设又有 $extC \neq \varnothing$. 此外, 由极端集的基本性质可知, C 亦为 A 的极端集, 且有 $extC \subseteq extA$. 由此导出

$$\sup_{y\in B} f_0(y) \geqslant \sup_{y\in extA} f_0(y) \geqslant \sup_{y\in extC} f_0(y) = \xi_0 = f_0(x_0).$$

此显然与式 (9.4) 矛盾! □

注* Bessaga 和 Pelczyński 曾经证明:"当 E 为赋范空间时, 如 E^* 可分, 则 E^* 必具有 KM 性质" (参看文献 [32]). 由此导出, 非自反的空间 (l^1) 亦是具有**KM**性质的.

为强调有关自反空间特征的 James 定理中空间的完备性的不可缺少性, 我们利用本节的推理构造如下的反例 (即: 对一般的赋范空间而言, 即使其上的所有连续线性泛函均可在闭单位原心球上达范, 也并不能保证其必为自反空间):

例 (涉及 James 定理的反例) *存在着一个非自反的赋范空间, 其上的所有连续线性泛函均可在其闭单位球上取到最大值 (由非自反可知此空间必不完备).*

下面, 我们就来构造出此空间. 首先设一列实的有限维赋范空间 $\{E_{(n)}\}$ 如下:

$$E_{(n)} = \{(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_n^{(n)})\},$$

其相应范数定义为

$$\|(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_n^{(n)})\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i^{(n)}|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

作积空间

$$E = \prod_n E_{(n)},$$

其范数定义为

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i^{(n)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in E.$$

由于每个 $E_{(n)}$ 均为有限维赋范空间, 故均为自反空间, 容易验证, 上述 (内积空间形式的) 积空间 E 亦是自反的 (上空间 E 即为积空间: $E=\prod_n(\ell^\infty_{(n)})$ 赋以范数

$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad \forall\, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in\prod_n(\ell^\infty_{(n)}),$$

其中 $(\ell^\infty_{(n)})$ 为 n 维 (ℓ^∞) 空间 $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_\infty)$).

于是, 由上面定义 2 后的注, 有

$$B(\theta,1)=\overline{\text{co}}(ext(B(\theta,1))). \tag{9.4.6}$$

设 E 中的子集 A 如下:

$$\begin{aligned}A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):\ & x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_n^{(n)})\in E_n,\\ & |\xi_i^{(n)}|=|\xi_j^{(n)}|,1\leqslant i,j\leqslant n;n\in\mathbb{N}\},\end{aligned}$$

并令 E 的线性子空间

$$E_0=\text{span}(A).$$

由于在 n 维 (c_0) 型空间 $(\ell^\infty_{(n)})$ 中 $(n\in\mathbb{N})$, 其单位闭球上的端点为 “所有坐标绝对值等于 1” 的元所组成, 因此不难证明

$$ext(B(\theta,1))\subseteq A,$$

故由前面式 (9.4.6) 可知 span(A) 是稠于空间 E 的. 然而, 显然

$$x_0=\left(\frac{1}{n}\right)\in E.$$

而且, 下面我们断言: $x_0=(\frac{1}{n})\notin\text{span}(A)$.

事实上, 若 x_0 是 A 中 m 个元的线性组合, 则必存在

$$x_0^{(i)}=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)},\cdots)\in A$$

以及 $\lambda_i\in\mathbb{R}$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, 使得 $x_0=\sum_{i=1}^m\lambda_i x_0^{(i)}$, 这里

$$\begin{aligned}x_n^{(i)}=(\xi_1^{(in)},\xi_2^{(in)},\cdots,\xi_n^{(in)})\in E_{(n)}=(\ell^\infty_{(n)}),\\ |\xi_1^{(in)}|=|\xi_2^{(in)}|=\cdots=|\xi_n^{(in)}|,\quad\forall\, n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

对于 $n=2^{m+1}$, 我们考虑 $E_{(n)}=(\ell^\infty_{(n)})$. 由于上面 $x_n^{(1)}(\in E_{(n)})$ 的 $n=2^{m+1}$ 个坐标绝对值相等且均为实数, 故有半数以上的坐标相等, 即存在 $\{1,2,\cdots,2^{m+1}\}$ 的子集 $\{j_1^{(1)},\cdots,j_{2^m}^{(1)}\}$, 使得 $\xi_{j_1^{(1)}}^{(1n)}=\cdots=\xi_{j_{2^m}^{(1)}}^{(1n)}$; 同样, 考虑 $x_n^{(2)}(\in E_{(n)})$ 的坐标, 可以选出

$\{j_1^{(1)},\cdots,j_{2^m}^{(1)}\}$ 的子集 $\{j_1^{(2)},\cdots,j_{2^{m-1}}^{(2)}\}$, 使得 $\xi_{j_1^{(2)}}^{(2n)}=\cdots=\xi_{j_{2^{m-1}}^{(2)}}^{(2n)}$, $\cdots$; 这样重复 m 次, 便可选出两个下标 j_1 和 j_2 $(1\leqslant j_1<j_2\leqslant n=2^{m+1})$, 使得

$$\xi_{j_1}^{(in)}=\xi_{j_2}^{(in)},\quad \forall 1\leqslant i\leqslant m.$$

于是, 我们不难导出 x_0 投影到 $E_{(n)}$ 中所得元的第 j_1 和 j_2 个坐标是相等的, 均为

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i\xi_{j_1}^{(in)}=\sum_{i=1}^m \lambda_i\xi_{j_2}^{(in)}.$$

此显然与 $x_0=(\frac{1}{n})$ 的各坐标互不相同矛盾!

因此, 我们导出 span(A) 是不完备的赋范空间.

然而, 对任意的 $f_0\in E_0^*$, 从 Hahn-Banach 定理可知, 存在 $x_0\in E_0$, 使得

$$\|x_0\|=1,\quad f_0(x_0)=\|f_0\|.$$

由连续线性泛函表示式 (注意每一个 $(\ell_{(n)}^\infty)^*=(\ell_{(n)}^1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$), 当设

$$f_0=(f_1^{(1)};\ f_1^{(2)},f_2^{(2)}\ ;\cdots;\ f_1^{(n)},f_2^{(n)},\cdots,f_n^{(n)};\ \cdots)$$

时, 则有

$$f_0(x)=\sum_{n=1}^\infty\sum_{i=1}^n f_i^{(n)}\xi_i^{(n)},$$
$$\forall x=(\xi_1^{(1)};\xi_1^{(2)},\xi_2^{(2)};\cdots;\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_n^{(n)};\ \cdots)\in E.$$

而当注意到 E 中元 x 的范数定义, 则可看出: 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 如果将坐标 $\xi_i^{(n)}(1\leqslant i\leqslant n)$ 均换为 $\pm\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i^{(n)}|$ 时 (对应上面的 $f_i^{(n)}$ 的正负号, 相应取 $\pm$ 值), x 的范数不变. 但上面 $f_0(x)$ 的值是不减的, 这样, 当如上改变 x_0 的坐标时, 立即可知 x_0 变为 E_0 的新元 y_0, 具有性质

$$y_0\in \text{span}(A),\quad f_0(y_0)=\|f_0\|.$$

最后, 再次注意到 $\overline{\text{span}}(A)=E_0$, 故 span$(A)^*=E_0^*$. 因而 span$(A)$ 即为所求. □

§9.4 附录 * Choquet 定理

本节的 Krein-Milman 定理指出: 紧凸集端点的凸组合可以 "近似地" 将该集中任何一个点表示出来, 这是一个十分有用的定理. 然而, 这个 "近似" 一词毕竟有些美中不足. 下面将介绍一种用测度方法将上述紧凸集 "精确" 表示出来的定理, 即 Choquet 定理.

首先, 介绍一个较简单的情形.

Minkowski 定理 *设 $E_{(n)}$ 是具有 T_0 公理的 n 维 "实" 局部凸空间, K 为 $E_{(n)}$ 中一紧凸集, 则对任意 $x_0\in K$, 存在 $x_i\in extK,\lambda_i\geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant n+1)$, 使得*

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

证明 首先, 从 Krein-Milman 定理可知 $extK \neq \varnothing$. 下面用归纳法来证明本定理:

当空间的维数 $n=1$ 时, 由 §9.1 的定理 7 前的引理可知, 由实空间 $E_{(1)}$ 此时与实数域 $\mathbb{R}$ 拓扑等价, 因此其内紧凸集 K 必对应于 $\mathbb{R}$ 中有界闭区间, 从而显然可知定理结论成立.

设 $n=m-1$ 维时此定理结论成立. 则当 $n=m$ 时, 对于任意一个点 $x_0 \in K\backslash extK$, 任取 $y_1 \in extK$. 并作过 x_0 和 y_1 两点的直线 L(即: $tx_0+(1-t)y_1, t \in (-\infty,+\infty)$), 由 K 为紧凸集, 注意到紧凸集和闭凸集之交仍为紧凸集, 当再次注意到具 T_0 公理的有限维拓扑线性空间的特点, 则可导出

$$K \cap L = [y_1, x_1], \quad x_0 \in [y_1, x_1];$$

并且, 易见 $x_1 \in K$ 必为 K 的边界点. 这样, 类似于 §3.2 的定理 6("第二隔离性定理"), 可知存在 $f_1 \in E^*$, 使得

$$f_1(z) \leqslant f_1(x_1), \quad \forall z \in K.$$

令 $\xi_1 = f(x_1)$ 及

$$H_{\xi_1} = \{x \in E_{(n)}\colon f_1(x) = \xi_1\},$$

则 H_{ξ_1} 显然为 $E_{(n)}$ 的一个闭超平面, 其使紧凸集 K 在其一侧, 并与 K 交于 x_1 点 (此即所谓"K 的承托超平面"). 从线性空间的基本知识知, 超平面 H_{ξ_1} 比 $E_{(n)}$ 低一维, 且易知 $K \cap H_{\xi_1}$ 亦为 H_{ξ_1} 上的紧凸子集, 故由归纳法可得: 作为 $K \cap H_{\xi_1}$ 中的点 x_1, 其必可由 $K \cap H_{\xi_1}$ 中的 n 个端点的凸组合表出. 而当再注意到前面极端集的基本性质的 3) 和 5), 则有: $ext(K \cap H_{\xi_1}) \subseteq extK$, 因此便可导出: x_0 必可由 K 中的 $n+1$ 个端点的凸组合表出. □

注 上面定理其实即为几何中"n 维空间中的"有界闭凸多面体"内任一点均可由不超过 $n+1$ 个顶点的凸组合来表示"的结论之推广.

为将有限维空间的结果推广到无穷维空间去, 联想到"有限和"的推广即为"定积分", 因此, 下面将 Minkowski 定理用积分的形式表出:

下面, 我们用"概率测度"作工具, 让测度在紧凸集 K 上由点决定如下的"分布": 对于任意一个点 $x \in K$ 及任意的 Borel 集 G, 令

$$\mu_x(G) = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ 0, & x \notin G, \end{cases}$$

则在上面定理中, 若令相应 x 的测度 $\mu_x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mu_{x_i}$, 则该定理可变形为

Minkowski 定理′　设 $E_{(n)}$ 及集 K 如上, 则对任意的点 $x_0\in K$, 必存在一个定义在 K 的 Borel 集上的概率测度 μ_{x_0}, 使得

$$\mu_{x_0}(K)=\mu_{x_0}(extK)=1,$$

及

$$f(x_0)=\int_K f(x)d\mu_{x_0},\quad \forall f\in E^*.$$

类似地, Choquet 得到了如下在无穷维空间中紧凸集用端点测度表达的积分公式:

Choquet 定理　设 E 为赋范空间, K 为 E 中的紧凸集, 则对于 K 的任意一点 x_0, 必存在集中于 $\mathrm{ext}(K)$ 上的一个概率测度 μ_{x_0}, 使得

$$\mu_{x_0}(K)=\mu_{x_0}(\mathrm{ext}K)=1,$$

及

$$f(x_0)=\int_K f(x)d\mu_{x_0},\quad \forall f\in E^*.$$

注　由于上述定理的证明需涉及到 (连续函数空间) $C(K)$ 上的连续线性泛函可对应于一个"正则测度"积分表示式的 Riesz 表现定理, 因此, 在此就不予证明了. 有兴趣的读者不难从一些书中找到其证明及其推广和应用 (例如, 可参看文献 [33]).

§9.5　Whitley 结构定理

Whitley 定理在后面证明 Kakutani 定理 (Banach 空间为自反的充分必要条件是其单位球面为弱自列紧集) 时用到. 这里, 我们稍稍变化了一下 Whitley 结构定理中的原证明. 为此, 先给出一个引理.

引理　设 E 为赋范空间, $\mathcal{F}_{(m)}$ 为 E^* 的一个"m 维"线性子空间. 则对于任意的 $\varepsilon>0$, 在 E 的 (单位原心球面) S_1 上必存在有限子集 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 使得

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varphi(x_k)|\geqslant(1-\varepsilon)||\varphi||,\quad \forall\varphi\in\mathcal{F}_{(m)}.$$

证明　由于 $\mathcal{F}_{(m)}$ 是有限维的赋范线性空间, 由泛函基本知识知, 其单位球面 $S(\mathcal{F}_{(m)})$ 必是按范拓扑的紧集, 故对上述 $\varepsilon>0$, 其必存在由有限个元 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}\subset S(\mathcal{F}_{(m)})$ 组成的"$\frac{\varepsilon}{2}$ 网". 此外, 对任意 k $(1\leqslant k\leqslant n)$, 由于 $||\varphi_k||=1$, 故从范数的定义可知, 对正数 $\frac{\varepsilon}{2}$, 必可找到元 $x_k\in S_1$, 使得 $|\varphi_k(x_k)|>1-\frac{\varepsilon}{2}$.

于是, 对任意 $\varphi\in\mathcal{F}_{(m)}(\varphi\neq0)$, 由于 $\frac{\varphi}{||\varphi||}\in S(F_{(m)})$, 故可选出某 $\varphi_{k_0}(1\leqslant k_0\leqslant n)$, 使得

$$\left|\left|\frac{\varphi}{||\varphi||}-\varphi_{k_0}\right|\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

这样, 结合上面两个不等式, 我们立即导出

$$\begin{aligned}\max\nolimits_{1\leqslant k\leqslant n}|\varphi(x_k)| \geqslant& |\varphi(x_{k_0})|\\ \geqslant& \|\varphi\|\left(|\varphi_{k_0}(x_{k_0})|-\left|\varphi_{k_0}(x_{k_0})-\frac{\varphi(x_{k_0})}{\|\varphi\|}\right|\right)\\ >& \|\varphi\|\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left\|\frac{\varphi}{\|\varphi\|}-\varphi_{k_0}\right\|\right]\\ >& (1-\varepsilon)\|\varphi\|.\end{aligned}$$

□

定理 (Whitley 结构) 设 E 为赋范线性空间, C 为 E 中一个弱列紧集. 那么, 对于任意的 $\Phi\in\overline{J(C)}^{w*}$, 存在 $\{y_n\}\subset C$, 使得 $\{y_n\}$ "弱收敛" 于某元 $x_0\in E$, 并且有 $J_{x_0}=\Phi$(此即有 $\overline{J(C)}^{w^*}\subseteq J(\overline{C}^{ws})$), 这里: $\overline{C}^{ws}$ 代表 C 的 "弱列闭包", 也即其所有 "元列" 的弱极限点之全体).

证明 下面, 分四步来证明:

(1) 先从 C 中将所需的点列 $\{y_n\}$ 找出来. 事实上, 假设 $\Phi\in\overline{J(C)}^{w*}$, 故知存在定向点列 $\{x_\alpha,\alpha\in I\}\subset C$, 使得

$$\lim_{\alpha\in I}J_{x_\alpha}(f)=\Phi(f);\quad \forall f\in E^*. \tag{9.5.1}$$

任选 $f_1\in S_1^*$(E^* 中的单位原心球面), 则由式 (9.5.1) 可得元 $y_1\in\{x_\alpha,\alpha\in I\}\subset C$, 使得

$$|(J_{y_1}-\Phi)(f_1)|<1;$$

令 $E_{0,1}^{**}=\mathrm{span}\{\Phi,J_{y_1}\}$, 则其为 E^{**} 的有限维子空间. 故由上面引理可知: 存在 $\{f_k\colon 2\leqslant k\leqslant k(2)\}\subset S_1^*$, 使得

$$\max_{2\leqslant k\leqslant k(2)}|\Psi(f_k)|\geqslant\frac{1}{2}\|\Psi\|,\quad \forall\Psi\in E_{0,1}^{**}.$$

其次, 同样由式 (9.5.1), 对于上面的泛函 $\{f_k\colon 2\leqslant k\leqslant k(2)\}\subset S_1^*$, 存在 $y_2\in\{x_\alpha,\alpha\in I\}\subset C$, 使得

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k(2)}|(J_{y_2}-\Phi)(f_k)|<\frac{1}{2}.$$

类似地, 令 $E_{0,2}^{**}=\mathrm{span}\{\Phi,J_{y_1},J_{y_2}\}$, 再次由引理可知, 存在 $\{f_k\colon k(2)+1\leqslant k\leqslant k(3)\}\subset S_1^*$, 使得

$$\max_{k(2)+1\leqslant k\leqslant k(3)}|\Psi(f_k)|\geqslant\frac{1}{2}\|\Psi\|,\quad \forall\Psi\in E_{0,2}^{**}.$$

然后, 又由式 (9.5.1), 存在 $y_3\in\{x_\alpha,\alpha\in I\}\subset C$, 使得

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k(3)}|(J_{y_3}-\Phi)(f_k)|<\frac{1}{3};$$

如此做下去便得到 C 中的一个点列 $\{y_n\}$ 和 S_1^* 内的泛函到 $\{f_k\}$, 当令 $E_{0,n-1}^{**}=\text{span}\{\Phi,J_{y_1},J_{y_2},\cdots,J_{y_{n-1}}\}$ 时其满足不等式

$$\max_{k(n-1)+1\leqslant k\leqslant k(n)}|\Psi(f_k)|\geqslant\frac{1}{2}||\Psi||,\quad\forall\Psi\in E_{0,n-1}^{**}$$

及

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k(n)}|(J_{y_n}-\Phi)(f_k)|<\frac{1}{n};\quad(\forall n\in\mathbb{N}).$$

(2) 我们有

$$\sup_{k\geqslant1}|\Psi(f_k)|\geqslant\frac{1}{2}||\Psi||,\quad\forall\,\Psi\in\overline{\text{span}\{\Phi,J_{y_n}:\ n\geqslant1\}}.\tag{9.5.2}$$

事实上, 首先由上面 (i) 最后的第一式显然可知

$$\sup_{k\geqslant1}|\Psi(f_k)|\geqslant\frac{1}{2}||\Psi||,\quad\forall\,\Psi\in\text{span}\{\Phi,J_{y_n}:\ n\geqslant1\}.\tag{9.5.3}$$

由此, 对任意 $\Psi\in\overline{\text{span}\{\Phi,J_{y_n}:\ n\geqslant1\}}$, $\varepsilon>0$, 存在 $\Psi_0\in\text{span}\{\Phi,J_{y_n}:\ n\geqslant1\}$, 使得 $||\Psi-\Psi_0||<\frac{\varepsilon}{3}$. 由式 (9.5.3), 存在 $f_{k_0}\in S_1^*$, 使得

$$|\Psi_0(f_{k_0})|>\sup_{k\geqslant1}|\Psi_0(f_k)|-\frac{\varepsilon}{3}\geqslant\frac{1}{2}||\Psi_0||-\frac{\varepsilon}{3},$$

从而

$$\begin{aligned}\sup_{k\geqslant1}|\Psi(f_k)|&\geqslant|\Psi(f_{k_0})|\geqslant|\Psi_0(f_{k_0})|-||\Psi-\Psi_0||\\&\geqslant\frac{1}{2}||\Psi_0||-\frac{2\varepsilon}{3}\geqslant\frac{1}{2}(||\Psi||-||\Psi_0-\Psi||)-\frac{2\varepsilon}{3}\\&>\frac{1}{2}||\Psi||-\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 任意性故知式 (9.5.2) 成立.

(3) 由 C 是弱列紧集, $\{y_n\}\subset C$, 故存在子列 $\{y_{m_n}\}$ 弱收敛于 $x_0\in E$, 即有

$$\lim_{n\to\infty}|f(y_{m_n})-f(x_0)|=0,\quad\forall f\in E^*.\tag{9.5.4}$$

下面我们将导出

$$(J_{x_0}-\Phi)(f_k)=0,\quad\forall k\in\mathbb{N}.\tag{9.5.5}$$

事实上, 由于 x_0 为 $\{y_{m_n}\}$ 弱极限点, 由 §3.3 的定理 3 得到: $x_0\in\overline{\text{span}\{y_{m_n}\}}\subset\overline{\text{span}\{y_n\}}$. 再由 J 是线性保范映像可知 $J_{x_0}\in\overline{\text{span}\{J_{y_n}\}}$, 从而有

$$J_{x_0}-\Phi\in\overline{\text{span}\{\Phi,J_{y_n}:\ n\geqslant1\}}.\tag{9.5.6}$$

注意到 (1) 中最后的第二式, 我们有 $k(n) \to \infty (n \to \infty)$, 且有

$$|(J_{y_n} - \Phi)(f_k)| < \frac{1}{n}, \quad \forall k \leqslant k(n), n \in \mathbb{N},$$

故对于任意 $m_n > m$, 有 $k(m_n) > k(m)$, 从而

$$|(J_{y_{m_n}} - \Phi)(f_k)| < \frac{1}{m_n} < \frac{1}{m}, \quad \forall k \leqslant k(m).$$

因此, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $k \leqslant k(m)$, 从而由上式导出

$$\begin{aligned}|(J_{x_0} - \Phi)(f_k)| &\leqslant |(J_{y_{m_n}} - \Phi)(f_k)| + |(J_{x_0} - J_{y_{m_n}})(f_k)| \\ &\leqslant \frac{1}{m} + |f_k(y_{m_n} - x_0)|, \quad \forall m_n > m.\end{aligned}$$

由式 (9.5.4), 当上式两端令 $n \to \infty$ 取极限、再令 $m \to \infty$ 取极限时, 便可得到 $(J_{x_0} - \Phi)(f_k) = 0 (k \in \mathbb{N})$, 也即式 (9.5.5) 成立.

(4) 由式 (9.5.2)、(9.5.5) 和 (9.5.6), 我们立即得出 $\|J_{x_0} - \Phi\| = 0$, 从而 $J_{x_0} = \Phi$. 注意到 x_0 为 $\{y_n\}$ 在弱拓扑下的任意一极限点, 以及 J 为一一对应的, 由上等式则知 $\{y_n\}$ 的弱极限点 x_0 是唯一的, 也即导出 $y_n \xrightarrow[(\text{弱}^*)]{} x_0$. □

§9.6 赋范空间中弱紧与弱自列紧的等价性

从拓扑知识我们知道, 在 "距离" 空间中的任意一个集, 其 "自列紧性" 与 "紧性" 是等价的. 而当再注意到 §9.1 的定理 4 知道, 对于无穷维赋范空间 E 而言, 其在 "弱拓扑" 下是不满足第一可数公理的, 因此, 对该拓扑而言是不能 "距离化的" (即: 不能在 E 中赋予与该拓扑等价的距离拓扑). 所以, 本节将要介绍的, 有关在赋范线性空间中任意集的 "弱紧" 性与 "弱自列紧" 性等价的 Eberlein-Šmulian 定理的确是一个十分出色的非凡结果.

首先, 我们依据下面引理导出, 对赋范线性空间中的任意子集 C, 必有: 弱紧 ⇒ 弱自列紧.

引理 *设 E 为可分的赋范线性空间, C 为 E 内的某一弱紧集, 则在 C 上, 其 (诱导的) 弱拓扑是可以 "距离化" 的.*

证明 由于 E 是可分的赋范线性空间, 故从 §9.2 的定理 3 (Alaoglu-Bourbaki 定理) 的推理 4 知, E^* 是弱* 可分的, 因此存在可列个泛函 $\{f_n^0\} \subseteq E^*$, 使得 $\overline{\{f_n^0\}}^{w^*} = E^*$. 并且, 由弱* 拓扑的定义还知, $\{f_n^0\}$ 还是 "全定" E 的, 从而, 当令

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n^0(x-y)|}{1 + |f_n^0(x-y)|} \qquad (\forall x, y \in C)$$

时, 易知 d 确实为 C 上定义的一个 "距离".

我们证明在上述 C 内, 由 d 引出的拓扑与 E 在 C 上诱导的 "弱拓扑" 是等价的. 事实上, 当设 C 在 E 的弱拓扑下所构成的拓扑空间记为 (C,w), 而在上面距离 d 所构成的拓扑空间记为 (C,d) 时, 我们令 I 为空间 (C,w) 到 (C,d) 的恒等映射, 则显然 I 是一个 "1-1" 对应的到 "上" 的映射. 并且, 我们还可证明其还是连续的. 事实上, 对任意 $x_0\in C$, $\varepsilon>0$, 不难找到一自然数 N, 使得 $\sum_{n>N}\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是, 当取 $\delta=\varepsilon/2(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n})$, 并取 (C,w) 空间的 x_0 点邻域

$$
\begin{aligned}
U_w(x_0,\delta)&=U(x_0;f_1^0,\cdots,f_N^0;\delta)\cap C\\
&=\{x:\quad |f_k^0(x)-f_k^0(x_0)|<\delta,1\leqslant k\leqslant N;x\in E\}\cap C
\end{aligned}
$$

时, 只要 $x\in U_w(x_0,\delta)$, 从上面取法则有

$$
\begin{aligned}
d(x,x_0)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|f_n^0(x-x_0)|}{1+|f_n^0(x-x_0)|}\\
&<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\frac{|f_n^0(x-x_0)|}{1+|f_n^0(x-x_0)|}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}\delta+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

也即 $x\in O_d(x_0,\varepsilon)$ (即 (C,d) 中 x_0 的球域), 从而得出映射 I 的连续性. 最后, 注意到 C 为 (C,ω) 空间的紧集, 故由点集拓扑的知识知 (C,w) 与 (C,d) 是同胚的. □

注 1 从引理 1 证明显然可见: 当 E 是一个局部凸空间时, 如果 C 是 E 中按弱拓扑的紧集, 并且 E^* 中存在可数子集 $\mathcal{F}$, 其可分离 C 中的点, 则该引理结论依然成立.

注 2 注意到 §9.2 的定理 3(Alaoglu-Bourbaki 定理) 及其推理, 我们不难导出下面的有关 E^* 的子集, 其弱* 拓扑可以距离化的两个推理.

命题 1 设 E 为一个可分的局部凸空间, $\mathcal{A}$ 为 E^* 内一弱* 闭 "等度连续" 的子集, 则 $\mathcal{A}$ 在 (诱导的) 弱* 拓扑下是一个紧距离空间.

命题 2 设 E 为赋范线性空间, 则下面三条性质是等价的:

1) E^* 中的单位闭球 B_1^* 的弱* 拓扑是可以距离化的;

2) E^* 中每个闭球的弱* 拓扑是可以距离化的;

3) E 是可分的.

证明 1) $\Leftrightarrow$ 2): 显然.

3) $\Rightarrow$ 1): 由 §9.2 的定理 3(Alaoglu-Bourbaki 定理) 的推理 3 可知.

1) ⇒ 3)：由 1) 知：E^* 中的单位闭球 B_1^* 在原点 θ 处在弱* 拓扑下有可数邻域基. 即存在 E 的有限子集族 $\{F_n\}$, 使得 $\{F_n^\circ \bigcap B_1^*: n \in \mathbb{N}\}$ 是 B_1^* 在 θ 点的弱* 邻域基 (这里, F_n° 为 F_n 的 "极" (§9.2 中定义 2)). 令 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, 显然 G 是可数集.

然后, 我们来证明 $\overline{\mathrm{span}}G = E$. 事实上, 若此式不成立, 由 Hahn-Banach 定理知, 存在非零连续线性泛函 $f \in E^*$, 使得 $\|f\| = 1$ 且 $f(x) = 0, (\forall x \in G)$, 从而得到

$$f \in F_n^\circ,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

由于 $\{F_n^\circ \bigcap B_1^*: n \in \mathbb{N}\}$ 是 B_1^* 在 θ 点的邻域基, 由 $f \neq 0$(泛函), 故应存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $f \notin F_{n_0}^\circ$, 而此与上式矛盾!

显然, 可数集 G 中元的有理系数线性组合在 E 中稠密, 由此导出 E 可分. □

有了上述引理, 我们可得到下面的一个重要结果：

定理 1 设 E 为赋范线性空间, C 为 E 中任一子集, 则当 C 是弱紧集时, 亦必是弱自列紧的.

证明 设 $\{x_n\}$ 为 C 中任一无穷点列. 令 $E_0 = \overline{\mathrm{span}}\{x_n\}$. 显然 E_0 为一可分的闭赋范线性空间, 并且由 §3.2 的定理 5(Ascoli-Mazur 定理) 可知其也是弱闭的, 因而从假设我们导出 $C \cap E_0$ 亦是 E_0 中的弱紧集. 这样, 直接从引理可推出：$C \cap E_0$ 的弱拓扑是可距离化的. 而再注意到在距离空间中, 集的紧性与自列紧性是等价的, 因此 $\{x_n\}$ 必有一子列 $\{x_{n_k}\}$, 使其按上述距离收敛于 $C \cap E_0$ 中一元 x_0, 也即在子空间 E_0 中有 $x_{n_k} \underset{(弱)}{\longrightarrow} x_0$, 从而此式在原空间 E 中也成立 □

注 3 在拓扑学中我们已知, 对于一般的拓扑空间, 紧性未必强于 (自) 列紧性, 因此, 定理 1 结果对于弱* 拓扑而言是不能断言的. 而下面的反例则正好说明对弱* 拓扑而言, 定理 1 的结论未必成立.

反例 设 $E = (\ell^\infty)(\equiv (m))$, 我们考虑 E^* 中单位闭球 B_1^*. 首先, 从 §9.2 的定理 3(Alaoglu-Bourbaki 定理) 已知, 其必为一个弱* 紧集. 但另一方面, 当令 E 上泛函列 $\{x_n^*\}$ 如下定义时：

$$x_n^*(\{\xi_n\}) = \xi_n,\quad \forall \{\xi_n\} \in E;\quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

显然 x_n^* 为 (m) 上的线性泛函. 且从空间 (m) 的范数定义还知：$\|x_n^*\| \leqslant 1 (n \in \mathbb{N})$, 也即有 $\{x_n^*\} \subseteq B_1^*$. 然而, 由于对其任一子列 $\{x_{n_k}^*\}$, 我们均可找到一元

$$x_0 = \{\xi_i\} = \begin{cases} (-1)^k, & i = n_k, \\ 0, & i \neq n_k, \end{cases}$$

使得 $x_0 \in (m)$. 但是 $\{x_{n_k}^*(x_0)\} = \{(-1)^k\}$ 不收敛, 故导出：B_1^* 不是 "弱*" (自) 列紧的. □

为了导出定理 1 的逆命题, 我们得依靠一个所谓"可数紧"的性质作为"桥梁". 为此, 我们先给出其定义如下:

定义 1 设 E 为一拓扑空间, C 为 E 中一子集. 称 C 为**(相对) 可数紧**的, 是指对于 C 中任一无穷"可数"点集, 其在 C 中 (相应地, 在 E 中) 必有"聚点"存在.

注 我们显然可以看出, 在拓扑空间中, 紧、自列紧与可数紧三个概念之间的关系如下: 紧 $\Rightarrow$ 可数紧, 自列紧 $\Rightarrow$ 可数紧.

有了上面的定义, 我们将给出有关在赋范空间中的弱拓扑下, "弱可数紧" 与 "弱自列紧" 等价的一个结果.

定理 2 E 为赋范线性空间, C 为 E 中任一子集, 则下面的五个性质是等价的:

1) C 为"弱自列紧"集;

2) C 为"弱可数紧"集;

3) 对任意 $\{x_n\} \subseteq C$, 存在 $x_0 \in C$, 使得

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{Re} f(x_n) \leqslant \mathrm{Re} f(x_0) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{Re} f(x_n), \quad \forall f \in E^*;$$

4) 对 E 中任一递减, 闭凸集列 $\{K_n\}$, 若有 $K_n \cap C \neq \varnothing \quad (\forall n \in \mathbb{N})$, 则必有 $(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n) \cap C \neq \varnothing$;

5) 对 E 中任一可分闭线性子空间 E_0, 以及任一列闭的"半空间" S_n (即 $S_n = \{x\colon \mathrm{Re} f_n(x) \geqslant \alpha_n, x \in E\}$, 这里 f_n 为 E^* 中某一元, α_n 为某一实数, $\forall_n \in \mathbb{N}$), 若有 $(\bigcap_{i=1}^{n} S_i) \cap E_0 \cap C \neq \varnothing \quad (\forall n \in \mathbb{N})$, 则必有 $(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i) \cap E_0 \cap C \neq \varnothing$.

证明 1)$\Rightarrow$2): 显然.

2)$\Rightarrow$ 3): 对任意 $\{x_n\} \subseteq C$, 由 C 弱可数紧的假设, 知存在 $x_0 \in C$, 使得 $x_0 \in \overline{\{x_n\}}^w$, 故从弱拓扑的定义, 也即有

$$f(x_0) \in \overline{\{f(x_n)\}}, \quad \forall f \in E^*,$$

因而立即可得 3) 的结论.

3)$\Rightarrow$ 4): 反之, 若在 3) 的假设下, 4) 的结论不真. 则必存在一列递减的闭凸集 $\{K_n\}$, 使得 $K_n \cap C \neq \varnothing \quad (\forall n \in \mathbb{N})$, 但却有 $(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n) \bigcap C = \varnothing$. 故当在每个集 $K_n \cap C$ 中取一元 $x_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ 时, 由 3) 的假设, 对此 $\{x_n\}$ 必存在一元 $x_0 \in C$, 使得

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{Re} f(x_n) \leqslant \mathrm{Re} f(x_0) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{Re} f(x_n), \quad \forall f \in E^*; \tag{9.6.1}$$

及

$$x_0 \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n, \tag{9.6.2}$$

因此, 从式 (9.6.2) 可知, 对上述某一闭凸集 K_{n_0} 必有 $x_0 \notin K_{n_0}$, 因而由分离性定理可得, 存在 $f_0 \in E^*$, 使得

$$\mathrm{Re} f_0(x_0) > \sup_{y \in K_{n_0}} \mathrm{Re} f_0(y).$$

再注意到 $\{K_n\}$ 的递减性假设, 以及 $\{x_n\}$ 的取法, 我们可导出

$$\mathrm{Re} f_0(x_0) > \sup_{n \geqslant n_0} \sup_{y \in K_n} \mathrm{Re} f_0(y) \geqslant \limsup_{n \to \infty} \mathrm{Re} f_0(x_n).$$

但此式显然与式 (9.6.1) 的不等式矛盾, 因此, 归谬导出本结论 (此对 C 无任何弱集或弱自列紧假设).

4)⇒5): 我们只要在此时, 令

$$K_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i \right) \bigcap E_0,$$

就不难从 4) 直接导出 5) 的结论 (此时闭子空间 E_0 的可分性假设不必用).

5)⇒1): 首先, 注意到 E 中的集 C 与其"复对称性"集 $\{e^{i\theta}C: 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ 的弱自列紧性是相同的 (事实上, 任一集合 C 与其均衡包 $acoC$ 的弱自列紧性是等价的). 因此, 不妨设这里的集 C 是"复对称性"的. 对任意 $\{x_n\} \subseteq C$, 令 $E_0 = \overline{\mathrm{span}}\{x_n\}$, 则 E_0 显然是 E 中一可分的闭线性子空间, 故由 §9.2 的定理 3(Alaoglu-Bourbaki 定理) 的推理 4 知存在一可数子集 $\{\varphi_n\} \subseteq E_0^*$, 使得 $\overline{\{\varphi_n\}}^{w^*} = E_0^*$, 并且 $\{\varphi_n\}$ 还是全定 E_0 的.

然后, 我们指出 $\{x_n\}$ 是 E 上的弱有界集. 事实上, 反之, 如有一 $f_0 \in E^*$, 使得

$$\sup_{n \in C} |f_0(x_n)| = \infty,$$

则, 由 C 的复对称性, 有

$$\sup_{n \in C} \mathrm{Re} f_0(x_n) = \infty.$$

因而, 当令一列闭"半空间"

$$S_n = \{x: \mathrm{Re} f_0(x) \geqslant n, x \in E\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

时, 则 $\{S_n\}$ 满足 5) 的条件, 但 $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \varnothing$, 矛盾!

由于 $\{x_n\}$ 是弱有界的结果, 对于前面的泛函列 $\{\varphi_n\} \subseteq E_0^*$, 我们可知: $\{\varphi_n(x_k)\}_k$ 均是有界数列 ($\forall n \in \mathbb{N}$). 因此, 由熟知的"Cantor 对角线选择法", 我们可以得到一子列 $\{x_{k_i}\} \subseteq \{x_k\}$, 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$, 极限 $\lim_{i \to \infty} \varphi_n(x_{k_i})$ 均存在. 特别地, 可设

$$\lim_{i \to \infty} \mathrm{Re}\varphi_n(x_{k_i}) = \alpha_n, \quad \lim_{i \to \infty} Im.\varphi_n(x_{k_i}) = \beta_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

下面我们将证明, 必存在一元 $x_0 \in C$, 使得

$$\mathrm{Re}\varphi_n(x_0)=\alpha_n,\quad \mathrm{Im}\varphi_n(x_0)=\beta_n\quad (\forall n\in\mathbb{N}).$$

事实上, 我们只要考察四列闭“半空间”

$$S^{\pm}_{R,n,i}=\left\{x:\ \pm(\mathrm{Re}\varphi_n(x)-\alpha_n)\leqslant\frac{1}{i},\ x\in E\right\},$$

$$S^{\pm}_{I,n,i}=\left\{x:\ \pm(\mathrm{Im}\varphi(x)-\beta_n)\leqslant\frac{1}{i},\ x\in E\right\};\quad \forall n,i\in\mathbb{N}.$$

并且不妨以 $R,I,+,-$ 相互交错; n,i 以“和”之大小排序, 并当其“和”数相同时则以“字典排列”将它们合记为 $\{S_m\}$, 则从 $\{x_{k_i}\}$ 的取法, 由于 $\{x_{k_i}\}\subseteq E_0\cap C$, 以及前面两极限关系式, 显然可知: 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 均有 $(\bigcap_{m=1}^n S_m)\cap E_0\cap C\neq\varnothing$, 从而由假设 5) 成立, 故知必存在一元

$$x_0\in\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}S_m\right)\bigcap E_0\bigcap C,$$

也即有

$$\mathrm{Re}\varphi_n(x_0)=\alpha_n,\quad \mathrm{Im}\varphi_n(x_0)=\beta_n\quad (\forall\, n\in\mathbb{N}).$$

最后, 再来证明上面找到的 x_0 即为 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{k_i}\}$ 的弱极限. 为此, 只要证明关系式

$$\limsup_{i\to\infty}\mathrm{Re}f(x_{k_i}-x_0)\leqslant 0\leqslant\liminf_{i\to\infty}\mathrm{Re}f(x_{k_i}-x_0),$$

及

$$\limsup_{i\to\infty}\mathrm{Im}f(x_{k_i}-x_0)\leqslant 0\leqslant\liminf_{i\to\infty}\mathrm{Im}f(x_{k_i}-x_0);\quad \forall\, f\in E^*$$

就可以了.

下面先证明 $\limsup_{i\to\infty}\mathrm{Re}f(x_{k_i}-x_0)\leqslant 0\ \ (\forall f\in E^*)$. 事实上, 我们同样用反证法. 反之, 若存在 $f_0\in E^*,\varepsilon_0>0$ 及 $\{x_{k_i}\}$ 的子列 (不妨依旧记为其自身)$\{x_{k_i}\}$, 使得

$$\mathrm{Re}f_0(x_{k_i}-x_0)\geqslant\varepsilon_0,$$

即有

$$\mathrm{Re}f_0(x_{k_i})\geqslant\mathrm{Re}f_0(x_0)+\varepsilon_0,\quad \forall i\in\mathbb{N}.$$

则当令闭“半空间”

$$S=\{x:\ \mathrm{Re}f_0(x)\geqslant\mathrm{Re}f_0(x_0)+\varepsilon_0,x\in E\}$$

时, 由上式知 $\{x_{k_i}\}\subseteq S$, 故联系到前面 $\{S_m\}$ 的性质可知, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, $(\bigcap_{m=1}^n S_m)\cap S\cap E_0\cap C$ 均含有 $\{x_{k_i}\}$ 中的元. 因此, 同样由 5) 的结论我们可以得到一元 $y_0\in(\bigcap_{m=1}^{\infty}S_m)\cap S\cap E_0\cap C$. 与前段一样, 由此则可得到 (注意到该段结果)

$$\mathrm{Re}\varphi_n(y_0)=\alpha_n=\mathrm{Re}\varphi_n(x_0),$$

及

$$\mathrm{Im}\varphi_n(y_0) = \beta_n = \mathrm{Im}\varphi_n(x_0) \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

从而, 当注意到前面有关 $\{\varphi_n\}$ 是全定 E_0 的结论, 立即导出 $y_0 = x_0$. 然而, 由 S 取法显然可知 $y_0 = x_0 \notin S$. 矛盾! 此即验证了前面所需的第一个不等式. 类似的方法, 我们容易验证余下的另外三个不等式. 因此, 也即导出了

$$\lim_{i\to\infty} f(x_{k_l}) = f(x_0), \quad \forall f \in E^*,$$

从而证得了集 C 的弱列紧性. □

注 *在定理 2 中, 当 E 换为一般的局部凸 (拓扑线性) 空间时, 从上面的证明不难看出, 对于定理中的五个性质必亦有关系式:* (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (5).

为了得到本节所介绍的主要结果, 下面给出有关在赋范线性空间中的任意子集 "弱可数紧 ⇒ 弱紧" 的一个结论, 为此, 我们必须用到 §9.5 的 Whitley 结构 (定理) 的结果. 当将 "可数紧" 的概念引入, 并注意定理 2 中结果: "弱可数紧 ⇔ 弱自列紧". 我们对 Whitley 结构作以下两个注记:

注 1 *当 C 为 E 中一 "相对弱可数紧" 集时, C 必在 $\overline{C}^w$ 中弱序列稠.* 事实上, 对任意 $x_1 \in \overline{C}^w$, 易知 $J_{x_1} \in \overline{J(C)}^{w^*}$, 由定理 2 可知, 此时 C 必为弱列紧集. 故从 Whitley 结构可知, 存在 $\{y_n\} \subseteq C$, 使得 $y_n \underset{(弱)}{\longrightarrow} x_0 \in E$, 且有 $J_{x_0} = J_{x_1}$, 由此导出 $x_1 = x_0$.

注 2 *特别地, 当 C 为 "弱可数紧集" 时, C 必为弱闭集.* 事实上, 从注 1 的推导以及注意到弱可数紧集的定义, 在那里有 $y_n \underset{(弱)}{\longrightarrow} x_0 \in C$, 从而知 $x_1 = x_0 \in C$. 也即导出 $\overline{C}^w = C$.

利用 Whitley 结构, 就得到下面另一重要结论:

定理 3 *设 E 为赋范线性空间, C 为 E 中任一子集, 则当 C 是弱可数紧集时, 其亦必是弱紧的.*

证明 由 C 弱可数紧的假设, 显然可知: 对任意 $f \in E^*, \{f(x): x \in C\}$ 均为数域中的紧集, 因此也是有界集, 即有

$$\sup_{x\in C} |f(x)| < +\infty, \quad \forall f \in E^*.$$

因此, 由共鸣定理可知: C 为 E 中的按范有界集, 于是 $J(C)$ 为 E^{**} 内的按范有界集. 此外, 由 §9.5 中的定理 (Whitley 结构), 从上面注 2 的论述可知: C 此时亦为弱闭集, 故 $J(C)$ 必为弱* 闭集, 即

$$\overline{J(C)}^{w^*} = J(C),$$

总上得知 $J(C)$ 是一个弱* 闭的按范有界集.

因此, 从 §9.2 的定理 3 (Alaoglu-Bourbaki 定理) 及其推理, 知 $J(C)$ 必为弱* 紧集. 由于典则映射 J 必为 E (在弱拓扑下) 到 $J(E)$ (在弱* 拓扑下) 的满线性同胚映射. 故从上段的等式可知: 由 $J(C)$ 在弱* 拓扑下的紧性, 就可得到 C 在弱拓扑下的紧性, 即导出 C 为一个弱紧集. □

综合上面的定理 1~3, 我们立即就可得到下面有关弱拓扑下三种紧性等价的一个最重要的命题:

Eberlein-Šmulian 定理　*在赋范线性空间中, 其任意一个子集的弱紧性与弱自列紧性 (弱可数紧性) 均是等价的.*

§9.7　用基序列的方法证明在 Banach 空间中的 Eberlein-Šmulian 定理

在 §9.6 中, 我们证明了著名的 Eberlein-Šmulian 定理, 即: 在任一赋范线性空间中, 其任意一个子集的弱紧性与弱自列紧性是等价的.

在本节, 运用基序列的方法, 较简洁地仅就 Banach 空间来证明这个著名的定理 (遗憾的是, 在下面的证明中, 空间的完备性不可去掉). 为此, 我们先引出下面几个定义:

定义 1　设 E 为 Fréchet 空间. 称其内的元列 $\{e_i\}$ 为**基序列**, 是指: $\{e_i\}$ 构成了闭线性子空间 $E_0 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i\}$ 的一个基 (Schauder 基).

注　关于基 (Schauder 基) 的概念可参看 §1.11.

定义 2　设 $\mathcal{B}(E \to E_1)$ 为赋准范空间 E 到 E_1 内的连续线性算子的全体. 称算子族 $\{T_\lambda\colon \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{B}(E \to E_1)$ 是**等度连续的**, 是指: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\|x\| \leqslant \delta} \|T_\lambda x\| < \varepsilon.$$

定义 3　设 E 为赋准范空间, $\{e_i\}$ 为 E 中一线性无关元列, 若对任意 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in E$, 定义线性算子列 $\{P_n\}$ 如下:

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

则称 $\{P_n\}$ 为 $\{e_i\}$ 的**典则单增投影列**.

下面给出有关判断基序列的两个引理:

引理 1 (Schauder-Grinblium 定理)　设 E 为 Fréchet 空间, $\{e_i\}$ 为 E 中一非零元列, 则 $\{e_i\}$ 构成基序列的充分必要条件是: $\{e_i\}$ 的典则单增投影列 $\{P_n\}$ 是等度连续的.

证明 必要性：首先令 $E_0 = \overline{\operatorname{span}}\{e_i\}$, 则由假设可知, 对于任意的 $x \in E_0$, 必有唯一表达式 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$, 由此即有

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \longrightarrow x \quad (n \to \infty),$$

因而 $\{\|P_n(x)\|\}$ 是一有界数列. 下面, 在 E_0 中重新定义一个准范：

$$\|x\|_1 = \sup_n \|P_n(x)\| = \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right\|, \quad \forall\, x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in E_0. \tag{9.7.1}$$

显然可知

$$\|x\| \leqslant \|x\|_1, \quad \forall x \in E_0. \tag{9.7.2}$$

其次, 再来证明, 在新准范 $\|\cdot\|_1$ 下 E_0 亦为一 Fréchet 空间. 事实上, 对此范数下的任一 Cauchy 列 $\{x_m\}$, 由于

$$\|x_{m_2} - x_{m_1}\|_1 \longrightarrow 0 \quad (m_1, m_2 \to \infty), \tag{9.7.3}$$

故当设 $x_m = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(m)} e_i \ \ (\forall\, m \in \mathbb{N})$ 时, 则由式 (9.7.1) 和 (9.7.3), 有

$$\|(\xi_n^{(m_2)} - \xi_n^{(m_1)})e_n\|_1 \leqslant \|P_n(x_{m_2} - x_{m_1})\|_1 + \|P_{n-1}(x_{m_2} - x_{m_1})\|_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{9.7.4}$$

另外, 注意式 (9.7.1), 还有

$$\|P_{n_0}(x)\|_1 = \sup_n \left\|P_n\left(\sum_{i=1}^{n_0} \xi_i e_i\right)\right\| = \max_{1 \leqslant n \leqslant n_0} \left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right\|, \quad \forall n_0 \in \mathbb{N},$$

因此, 对任意的 $n, n' \in \mathbb{N}$(不妨令 $n < n'$), 有

$$\|P_n(x)\|_1 \leqslant \|P_{n'}(x)\|_1 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i\right\|_1 = \|x\|_1, \quad \forall x \in E. \tag{9.7.5}$$

综合以上 (9.7.4), (9.7.5) 和 (9.7.3), 则可得到：对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 均有

$$\|(\xi_n^{(m_2)} - \xi_n^{(m_1)})e_n\|_1 \leqslant 2\|x_{m_2} - x_{m_1}\|_1 \to 0 \quad (m_1, m_2 \to \infty).$$

而当注意到准范的性质则知：对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\{\xi_n^{(m)}\}_m$ 均为 Cauchy 数列. 今设：对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n^{(m)} \to \xi_n^{(0)} (m \to \infty)$, 则先由式 (9.7.5) 知：对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $m_0 \in \mathbb{N}$, 当 $m_2 \geqslant m_1 > m_0$ 时, 就有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^{(m_2)} - \xi_i^{(m_1)}) e_i\right\|_1 &= \|P_n(x_{m_2} - x_{m_1})\|_1 \\ &\leqslant \|x_{m_2} - x_{m_1}\|_1 < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

由此, 令 $m_1 \to \infty$, 则可导出

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^{(m_2)} - \xi_i^{(0)})e_i\right\|_1 \leqslant \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

特别地, 当令 $x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(0)} e_i$ 时, 从上即知: 当 $m > m_0$ 时, 均有

$$\|x_m - x_0\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)})e_i\right\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

注意到 $x_m \in (E_0, \|\cdot\|_1)$, 且后者为线性空间, 从上即知: $x_0 \in E_0$, 且有

$$\|x_m - x_0\|_1 \to 0 \quad (m \to \infty).$$

从而可知在新准范 $\|\cdot\|_1$ 下 E_0 亦为一 Fréchet 空间, 另记其为 E_1.

最后, 注意到恒等算子 I: $E_1 \to E_0$, 显然其为从 Fréchet 空间 E_1 到 E_0 的 "1−1" 对应的满线性算子, 且由 (9.7.2) 还知其是连续的. 故从 Banach 逆算子定理可知 I^{-1} 亦为连续算子; 此外, 又由

$$\|P_n(x)\| \leqslant \|x\|_1 = \|I^{-1}(x)\|_1 \quad \forall x \in E_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

因而从 I^{-1} 的连续性导出: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|x\| \leqslant \delta$ 时, 就有

$$\|P_n(x)\| \leqslant \|I^{-1}(x)\|_1 < \varepsilon \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

此即

$$\sup_n \sup_{\|x\| \leqslant \delta} \|P_n(x)\| \leqslant \varepsilon. \tag{9.7.6}$$

从而导出了 $\{P_n\}$ 是等度连续的.

充分性: 首先证明, 在上述 E_0 中的元 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$, 其表示式必是唯一的. 为此, 先设所有形如 $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ 的 E_0 中元之全体为 X_0, 则对于任意元 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in X_0$, 由假设 $\{e_i\}$ 的典则单增投影列 $\{P_n\}$ 是等度连续的, 故从式 (9.7.6) 可知: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $k_x \in \mathbb{N}$, 使得当 $\left\|\frac{x}{k_x}\right\| < \delta$ 时, 必有

$$\sup_n \|P_n(x)\| \leqslant \sup_n k_x \left\|P_n\left(\frac{x}{k_x}\right)\right\| \leqslant k_x \varepsilon.$$

这样, 类似式 (9.7.1), 同样可在 X_0 中定义新准范数 "$\|\cdot\|_1$", 使得 X_0 亦构成 Fréchet 空间. 由此, 不难导出 $\{e_i\}$ 是 "广义线性无关" 的. 即有: 如果 $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i = \theta$, 必有

$\xi_i \equiv 0 \ (\forall i \in \mathbb{N})$. (事实上, 若有 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i = \theta$, 则由新范数 $\|x\|_1$ 的定义及其满足三角不等式可知

$$\|\xi_n e_n\|_1 \leqslant \|P_n(x)\|_1 + \|P_{n-1}(x)\|_1 \leqslant 2\|x\|_1 = 0 \ \ (\forall n \in \mathbb{N}),$$

因而, 由准范性质知 $\xi_n = 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$), 也即 X_0 中元的表示式均是唯一的. 为证明 $\{e_i\}$ 构成 X_0 的一个基, 下面仅需证明: 上述 X_0 是一个闭线性子空间. 事实上, 设元列 $\{x_m\}$ 如下:

$$x_m = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(m)} e_i \ \ (\forall m \in \mathbb{N}).$$

并设

$$x_m \to x_0 \ \ (m \to \infty). \tag{9.7.7}$$

由 E_0 的定义显然可知 $x_0 \in E_0$, 且此时 $\{x_m\}$ 为 X_0 中的一个 Cauchy 列 (在 E 原准范数下), 注意到假设, 由式 (9.7.6) 及 (9.7.1) 有

$$\|x\| \to 0 \Rightarrow \|x\|_1 \to 0, \ \ \forall x \in X_0 \subseteq E_0,$$

故知 $\{x_m\}$ 亦为 X_0 中在新准范数 "$\|\cdot\|_1$" 下的 Cauchy 列. 且从 X_0 在 "$\|\cdot\|_1$" 下的完备性还知, 必存在一 $x_0' \in X_0$, 使得

$$\|x_m - x_0'\|_1 \to 0 \ \ (m \to \infty),$$

从而得到

$$\|x_m - x_0'\| \to 0 \ \ (m \to \infty).$$

再由极限的唯一性立即导出: $x_0 = x_0' \in X_0$. 由此证得 $\{e_\lambda\}$ 构成一基序列. □

由上引理不难导出下面引理:

引理 2 (Никольский定理) 设 E 为 Banach 空间, $\{e_i\}$ 为 E 中一非零元列, 则 $\{e_i\}$ 为基序列的充分必要条件是: 存在 $K > 0$, 使得

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right\| \leqslant K \left\|\sum_{i=1}^{n+m} \xi_i e_i\right\|, \ \ \forall \xi_i \in \mathbb{K}, 1 \leqslant i \leqslant n+m; n, m \in \mathbb{N}.$$

证明 必要性: 由引理 1 证明的开始可知: 对任意 $x \in E_0$, $\{\|P_n(x)\|\}$ 均为有界数列. 注意到 E_0 是 Banach 空间 E 的闭线性子空间, 故由 "共鸣定理" 立即得到: $K = \sup_n \|P_n\| < +\infty$, 因而导出

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right\| = \left\|P_n\left(\sum_{i=1}^{n+m} \xi_i e_i\right)\right\| \leqslant K \left\|\sum_{i=1}^{n+m} \xi_i e_i\right\|,$$

$$\forall \xi_i \in \mathbb{K}, 1 \leqslant i \leqslant n+m; \quad \forall n,m \in \mathbb{N}.$$

充分性：由设可知, 对任意的 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$, 均有

$$\left\|P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i\right)\right\| \leqslant K\left\|\sum_{i=1}^{n+m}\xi_i e_i\right\|, \quad \forall n,m \in \mathbb{N}.$$

特别地, 取 $m\to\infty$, 则有

$$\|P_n(x)\| \leqslant K\|x\|, \quad \forall x \in E \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

也即 $\{P_n\}$ 为等度连续的, 从而由引理 1 直接导出 $\{e_i\}$ 为基序列. □

引理 3 (Bessaga-Pelczyński 选择原理) 设 E 为 Banach 空间, $\{x_n\}$ 为 E 的单位 (原心) 球面 $S_1(E)$ 上的一列元, 若 $x_n \underset{(弱)}{\longrightarrow} \theta$, 则 $\{x_n\}$ 存在一子列为基序列.

证明 取 $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 0}$ 为 $(0,1)$ 中的数列, 且满足

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n) > 1-\varepsilon_0 > 0. \tag{9.7.8}$$

下面, 我们用归纳法来选取 $\{x_n\}$ 的子列 (作为基序列). 先任取 $\{x_n\}$ 中一元为 x_{n_1}. 然后, 若设 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}$ 已选好 $(n_1<n_2<\cdots<n_k)$, 则令 k 维线性子空间 $Y_{(k)}$ 为

$$Y_{(k)} = \operatorname{span}\{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}\},$$

并从 §1.5 可知, 其单位 (原心) 球面 $S_{(Y_{(k)})}$ 是紧的, 故 $S_{(Y_{(k)})}$ 上存在有限 "$\frac{\varepsilon_k}{4}$ 网"：$z_1, z_2, \cdots, z_m$. 由 Hahn-Banach 定理存在 $z_1^*, z_2^*, \cdots, z_m^* \in S_1(E^*)$, 使得

$$z_i^*(z_i) = 1 \quad (i=1,2,\cdots,m). \tag{9.7.9}$$

此外, 当注意到 $\{x_n\}$ 弱收敛于 0 的假设, 则可找到一元 $x_{n_{k+1}}(n_{k+1}>n_k)$, 使得

$$|z_i^*(x_{n_{k+1}})| < \frac{\varepsilon_k}{4} \quad (i=1,2,\cdots,m). \tag{9.7.10}$$

下面证明：

$$\|y+\lambda x_{n_{k+1}}\| \geqslant (1-\varepsilon_k)\|y\|, \quad \forall y \in S_{(Y_{(k)})}, \lambda \in \mathbb{K}. \tag{9.7.11}$$

事实上, 可分两步来证明：(1) 当 $|\lambda|<2$ 时, 取一个 $z_i(1\leqslant i\leqslant m)$, 使得 $\|y-z_i\|<\frac{\varepsilon_k}{2}$, 从而由式 (9.7.9) 和 (9.7.10), 有

$$\begin{aligned}
\|y+\lambda x_{n_{k+1}}\| &\geqslant |z_i^*(y+\lambda x_{n_{k+1}})| \\
&\geqslant |z_i^*(z_i)| - |z_i^*(y-z_i)| - |z_i^*(\lambda x_{n_{k+1}})| \\
&\geqslant 1 - \|y-z_i\| - 2|z_i^*(x_{n_{k+1}})| \\
&\geqslant 1 - \frac{\varepsilon_k}{2} - \frac{2\varepsilon_k}{4} = (1-\varepsilon_k)\|y\|.
\end{aligned}$$

(2) 当 $|\lambda| \geqslant 2$ 时, 则从元 y 及 $x_{n_{k+1}}$ 的范数均为 1, 直接可得

$$\|y+\lambda x_{n_{k+1}}\| \geqslant |\lambda|\,\|x_{n_{k+1}}\| - \|y\| = 2-1 \geqslant (1-\varepsilon_k)\|y\|.$$

由此两步, 我们得到了式 (9.7.11). 此外, 值得注意的是: 上面的关系式 (9.7.11) 当然对任意的 $y \in Y_{(k)}$ 也是正确的 (只要用 $\|y\|$ 除以两边则知).

最后证明, 上面选出的子列 $\{x_{n_i}\}$ 即为一个基序列. 事实上, 对任意一个数列 $\{\xi_i\} \subset \mathbb{K}$ 及 $k, m \in \mathbb{N}$, 当连续使用式 (9.7.11), 并注意到式 (9.7.8), 就可得到

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{m+k}\xi_i x_{n_i}\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{m+k-1}\xi_i x_{n_i} + \xi_{m+k}x_{n_{m+k}}\right\|\\ &\geqslant (1-\varepsilon_{m+k-1})\left\|\sum_{i=1}^{m+k-1}\xi_i x_{n_i}\right\|\\ &\geqslant (1-\varepsilon_{m+k-1})(1-\varepsilon_{m+k-2})\left\|\sum_{i=1}^{m+k-2}\xi_i x_{n_i}\right\|\\ &\geqslant \cdots \geqslant \prod_{i=m}^{m+k-1}(1-\varepsilon_i)\left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i x_{n_i}\right\|\\ &\geqslant \prod_{i=1}^{\infty}(1-\varepsilon_i)\left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i x_{n_i}\right\|\\ &\geqslant (1-\varepsilon_0)\left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i x_{n_i}\right\|.\end{aligned}$$

也即导出

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i x_{n_i}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon_0}\left\|\sum_{i=1}^{m+k}\xi_i x_{n_i}\right\|, \quad \forall \xi_i \in \mathbb{K}, 1 \leqslant i \leqslant m+k; (\forall_m, k \in \mathbb{N}).$$

由此, 从上面引理 2 即知 $\{x_{n_i}\}$ 必为 E 中的基序列. □

作为引理 3 的深化, 我们有

引理 4 设 E 为 Banach 空间, M 为 E 中的有界子集, 则如果 $\Phi \in \overline{J(M)}^{w^*}$ 满足条件

$$\|\Phi - J(y)\| \geqslant \delta_0 > 0, \quad \forall y \in M,$$

则必存在一元列 $\{y_n\} \subseteq M$ 和 $x_0^* \in E^*$, 使得

1) $\lim_{n\to\infty} x_0^*(y_n) = \Phi(x_0^*) \geqslant \frac{\|\Phi\|}{2}$.

2) $\{J(y_n) - \Phi\}$ 为 E^{**} 中的一个基序列.

3) 如 $\Phi \neq 0$, 则 $\Phi \notin \overline{\operatorname{span}}\{J(y_n) - \Phi\}$.

证明 首先, 同样选一正数列 $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 0}\subseteq(0,1)$, 使得式 (9.7.8) 成立, 即

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)>1-\varepsilon_0>0 \tag{9.7.12}$$

然后, 取一元 $x_0^*\in E^*$, 使得

$$\Phi(x_0^*)\geqslant\frac{\|\Phi\|}{2}. \tag{9.7.13}$$

注意到 $\Phi\in\overline{J(M)}^{w^*}$ 的假设, 从弱* 邻域的定义知: 存在 $y_1\in M$, 使得

$$|x_0^*(y_1)-\Phi(x_0^*)|=|[J(y_1)-\Phi](x_0^*)|<1. \tag{9.7.14}$$

令

$$\widehat{X}_{(1)}=\mathrm{span}\{J(y_1)-\Phi\},$$

则其显然为 E^{**} 中的一维线性子空间. 故其单位 (原心) 球面 $S(\widehat{X}_{(1)})$ 必是紧集, 因而它存在有限 "$\frac{\varepsilon_1}{3}$ 网" 为: $e_1^{**},\cdots,e_{m(1)}^{**}$. 由范数的定义可知: 存在 $x_1^*,\cdots,x_{m(1)}^*\in S(E^*)$, 使得

$$|e_i^{**}(x_i^*)|>1-\frac{\varepsilon_1}{3}\quad(1\leqslant i\leqslant m(1)). \tag{9.7.15}$$

再次注意到 $\Phi\in\overline{J(M)}^{w^*}$ 的假设, 类似前面可知: 存在 $y_2\in M$, 使得

$$|x_0^*(y_2)-\Phi(x_0^*)|=|[J(y_2)-\Phi](x_0^*)|<\frac{1}{2}, \tag{9.7.16}$$

及

$$|x_i^*(y_2)-\Phi(x_i^*)|=|[J(y_2)-\Phi](x_i^*)|<\frac{\delta_0\varepsilon_1}{6}\quad(1\leqslant i\leqslant m(1)). \tag{9.7.17}$$

下面, 将要证明关系式 (类似引理 3 的式 (9.7.11))

$$\|e^{**}+\lambda(J(y_2)-\Phi)\|\geqslant(1-\varepsilon_1)\|e^{**}\|,\quad\forall e^{**}\in S(\widehat{X}_{(1)}),\quad\lambda\in\mathbb{K}. \tag{9.7.18}$$

事实上, 类似引理 3 的相应证明, 我们分为两步来验证之: (1) 当 $|\lambda|<\frac{2}{\delta_0}$ 时, 对任意 $e^{**}\in S(\widehat{X}_{(1)})$, 由网的性质, 可取一个 e_i^{**}(其中$1\leqslant i\leqslant m(1)$), 使得

$$\|e^{**}-e_i^{**}\|<\frac{\varepsilon_1}{3}. \tag{9.7.19}$$

由此, 从式 (9.7.15)、(9.7.17)、(9.7.19), 则可得到

$$\begin{aligned}\|e^{**}+\lambda(J(y_2)-\Phi)\|&\geqslant|[e^{**}+\lambda(J(y_2)-\Phi)](x_i^*)|\\&\geqslant|e_i^{**}(x_i^*)|-|\lambda[J(y_2)-\Phi)](x_i^*)|-\|e^{**}-e_i^{**}\|\\&\geqslant\left(1-\frac{\varepsilon_1}{3}\right)-\frac{2}{\delta_0}\frac{\delta_0\varepsilon_1}{6}-\frac{\varepsilon_1}{3}\\&\geqslant(1-\varepsilon_1)\|e^{**}\|.\end{aligned}$$

(2) 当 $|\lambda| > \frac{2}{\delta_0}$ 时, 注意到本引理的假设, 我们亦有

$$\begin{aligned}\|e^{**} + \lambda(J(y_2) - \Phi)\| &> \frac{2}{\delta_0}\|J(y_2) - \Phi\| - \|e^{**}\| \\ &\geqslant \frac{2}{\delta_0}\delta_0 - 1 \geqslant (1-\varepsilon_1)\|e^{**}\|,\end{aligned}$$

此即证得了式 (9.7.18).

然后, 类似地令

$$\widehat{X}_{(2)} = \operatorname{span}\{J(y_1) - \Phi, J(y_2) - \Phi\},$$

则其显然为 E^{**} 中的二维线性子空间. 故类似可知 $S(\widehat{X}_{(2)})$ 存在的有限 "$\frac{\varepsilon_2}{3}$ 网" 为 $d_1^{**},\cdots,d_{m(2)}^{**}$ 及相应 $z_1^*,\cdots,z_{m(2)}^* \in S(E^*)$, 使得

$$|d_i^{**}(z_i^*)| > 1 - \frac{\varepsilon_2}{3} \quad (1 \leqslant i \leqslant m(2)).$$

同样由 $\Phi \in \overline{J(M)}^{w^*}$, 可知存在 $y_3 \in M$, 使得

$$|x_0^*(y_3) - \Phi(x_0^*)| < \frac{1}{3} \tag{9.7.20}$$

及

$$|z_i^*(y_3) - \Phi(z_i^*)| < \frac{\delta_0\varepsilon_2}{6} \quad (1 \leqslant i \leqslant m(2)). \tag{9.7.21}$$

这样, 类似可以导出关系式

$$\|e^{**} + \lambda(J(y_3) - \Phi)\| \geqslant (1-\varepsilon_2)\|e^{**}\|, \quad \forall e^{**} \in \widehat{X}_{(2)}, \quad \lambda \in \mathbb{K}. \tag{9.7.22}$$

如此做下去, 我们便可得到一元列 $\{y_n\} \subseteq M$, 使其满足

$$|x_0^*(y_n) - \Phi(x_0^*)| < \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \tag{9.7.23}$$

及

$$\|e^{**} + \lambda(J(y_{n+1}) - \Phi)\| \geqslant (1-\varepsilon_n)\|e^{**}\|, \quad \forall e^{**} \in \widehat{X}_{(n)}, \lambda \in \mathbb{K}, \ (\forall n \in \mathbb{N}), \tag{9.7.24}$$

其中

$$\widehat{X}_{(n)} = \operatorname{span}\{J(y_1) - \Phi, J(y_2) - \Phi, \cdots, J(y_n) - \Phi\}.$$

这样, 从式 (9.7.23) 和 (9.7.13), 我们就容易导出本引理的结论 1), 并且类似引理 3 证明的最后部分, 由式 (9.7.24) 有

$$\left\|\sum_{n=1}^{m+k} \xi_n(J(y_n) - \Phi)\right\| \geqslant \prod_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)\left\|\sum_{n=1}^{m} \xi_n(J(y_n) - \Phi)\right\|$$

$$\geqslant (1-\varepsilon_0)\left\|\sum_{n=1}^{m}\xi_n(J(y_n)-\Phi)\right\|,$$
$$\forall \xi_i \in \mathbb{K}, 1 \leqslant i \leqslant m+k; \quad (\forall m,k \in \mathbb{N}).$$

故同样从引理 2 立即可知 $\{J(y_n)-\Phi\}$ 必为 E^{**} 中的基序列, 即导出了本引理的结论 2).

最后, 让我们来导出本引理的结论 3). 首先, 注意到: 对任意的

$$x^{**} \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\text{span}}\{J(y_{k+n})-\Phi\}_n,$$

由于 $\{J(y_n)-\Phi\}$ 为基序列, 故从

$$x^{**} = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(J(y_n)-\Phi) = \sum_{n=2}^{\infty}\eta_n(J(y_n)-\Phi) = \sum_{n=3}^{\infty}\zeta_n(J(y_n)-\Phi) = \cdots$$

立即可以导出

$$\xi_n \equiv 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

也即有 $x^{**}=0$. 由此即有

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\text{span}}\{J(y_{k+n})-\Phi\}_n = \{0\}.$$

当设 $\Phi \neq 0$ 时, 则有

$$\Phi \notin \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\text{span}}\{J(y_{k+n})-\Phi\}_n,$$

从而, 存在非负整数 k_0, 使得

$$\Phi \notin \overline{\text{span}}\{J(y_{k_0+n})-\Phi\}_n.$$

这样, 当取元列为子列 $\{y_n\}_{n\geqslant k_0+1}$ 时, 其即为所求之元列. □

下面给出本节所需的重要定理:

Eberlein-Šmulian 定理 设 E 为 Banach 空间, M 为 E 中的"有界"子集, 则下面四个结论是等价的:

1) $\overline{M}^w$ 非"弱紧"集.

2) M 中存在一基序列 $\{y_n\}$, 使得对某 $x_0^* \in E^*$, 有

$$\liminf_{n\to\infty} x_0^*(y_n) > 0.$$

3) M 中存在一可数集 C, 其在 E 中无弱极限点.

4) $\overline{M}^w$ 非“弱自列紧”集.

证明 (Pelczyński 方法) 1) ⇒ 2): 首先, 注意到 Alaoglu 定理, 由 M 有界可知 $\overline{J(M)}^{w^*}$ 是弱* 紧的; 而从假设显然可知 $J(\overline{M}^w)$ 必不是弱* 紧的, 从而知 $\overline{J(M)}^{w^*} \neq J(\overline{M}^w)$. 故在 E^{**} 中必存在一元

$$x_0^{**} \in \overline{J(M)}^{w^*} \backslash J(\overline{M}^w) \subseteq E^{**} \backslash J(E).$$

(这里, 注意 $x_0^{**} \notin J(E)$ 是明显的. 否则, 当 $x_0^{**} = J(x_0)$ 时, 由 $x_0^{**} \in \overline{J(M)}^{w^*}$ 则知 $x_0 \in \overline{M}^w$, 由此导出 $x_0^{**} = J(x_0) \in J(\overline{M}^w)$ 矛盾!)

注意到 E 为 Banach 空间, 从上可知 $J(E)$ 必为 E^{**} 中一个闭的真线性子空间, 从而有

$$d(x_0^{**}, J(M)) \geqslant d(x_0^{**}, J(E)) > 0. \tag{9.7.25}$$

这样, 直接从引理 4 的结果可知: 存在一元列 $\{y_n\} \subseteq M$ 及 $x_0^* \in E^*$ 使得

(i) $\lim_{n\to\infty} x_0^*(y_n) = x_0^{**}(x_0^*) \geqslant \frac{\|x_0^{**}\|}{2}$.

(ii) $\{J(y_n) - x_0^{**}\}$ 为 E^{**} 中的一个基序列.

(iii) $x_0^{**} \notin \overline{\text{span}}\{J(y_n) - x_0^{**}\}$ (注意: 由 $x_0^{**} \notin J(E)$ 故 $x_0^{**} \neq 0$).

令线性子空间

$$\widehat{X} = \overline{\text{span}}\{\{J(y_n)\}, x_0^{**}\},$$

由式 (9.7.25) 以及 (iii) 可知

$$x_0^{**} \notin \overline{\text{span}}\{J(y_n)\} \text{ 及 } x_0^{**} \notin \overline{\text{span}}\{J(y_n) - x_0^{**}\}.$$

由于闭线性子空间 $\overline{\text{span}}\{J(y_n)\}$ 与 $\overline{\text{span}}\{J(y_n) - x_0^{**}\}$ 在 Banach 空间 $\widehat{X}$ 中的“余维数”均为 1, 故类似 §9.3 中定理 2 前的引理, 可得到从 $\widehat{X}$ 到其一维子空间 $\text{span}\{x_0^{**}\}$ 上的投影算子 T, 且其以 $\overline{\text{span}}\{J(y_n)\}$ 为“零空间”. 注意到当 $\widehat{X}$ 到其有限维子空间的的投影为 T 时, 则 $I-T$ 为 T 的“零空间”上的投影, 故当令 $P \triangleq I-T$ 时, 我们得到了一个从 $\widehat{X}$ 到 $\overline{\text{span}}\{J(y_n)\}$ 的投影算子 P, 使得其“零空间”为 $\text{span}\{x_0^{**}\}$. 同样, 我们可以得到一个从 $\widehat{X}$ 到 $\overline{\text{span}}\{J(y_n) - x_0^{**}\}$ 的投影算子 Q, 使得其“零空间”亦为 $\text{span}\{x_0^{**}\}$. 于是, 我们找到了两个从 $\widehat{X}$ 到 $\widehat{X}$ 中的有界线性算子 P 和 Q, 使得

$$P(\widehat{X}) = \overline{\text{span}}\{J(y_n)\}, \quad Q(\widehat{X}) = \overline{\text{span}}\{J(y_n) - x_0^{**}\},$$

而且满足条件

$$P(x_0^{**}) = Q(x_0^{**}) = 0; \tag{9.7.26}$$

并且, 对任意 $y^{**} \in \widehat{X}$, 存在 $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{K}$, 使得

$$y^{**} - P(y^{**}) = \xi_1 x_0^{**}, \quad y^{**} - Q(y^{**}) = \xi_2 x_0^{**}. \tag{9.7.27}$$

因此, 如果 $u^{**} \in \overline{\text{span}}\{J(y_n) - x_0^{**}\}$, 从式 (9.7.27) 和 (9.7.26), 则有

$$u^{**} = Q(u^{**}) = Q[P(u^{**}) + \xi_1 x_0^{**}] = QP(u^{**}); \tag{9.7.28}$$

如果 $v^{**} \in \overline{\text{span}}\{J(y_n)\}$, 同样从式 (9.7.27) 和 (9.7.26) 有

$$v^{**} = P(v^{**}) = P[Q(v^{**}) + \xi_2 x_0^{**}] = PQ(v^{**}). \tag{9.7.29}$$

由 (9.7.28) 和 (9.7.29) 两式, 我们立即可知: P 为将 Banach 空间 $\overline{\text{span}}\{J(y_n) - x_0^{**}\}$ 映射到 Banach 空间 $\overline{\text{span}}\{J(y_n)\}$ 的 "1−1" 对应和 "满" 的有界线性算子, 因而由 Banach 逆算子定理立即可知, 这两个空间是线性同胚的, 从而注意到前面 (ii) 的结果, 则知 P 把基序列 $\{J(y_n) - x_0^{**}\}$ 变为基序列 (注意 p 为到 $\overline{\text{span}}\{J(y_n)\}$ 的投影)

$$\{P(J(y_n) - x_0^{**})\} = \{P(J(y_n))\} = \{J(y_n)\},$$

因此 $\{y_n\}$ 必为 E 的一个基序列; 且从前面结果 (i) 立即导出定理的结果 2).

2) $\Rightarrow$ 3): 设 $\{y_n\} \subset M$ 为基序列, 且存在 $x_0^* \in E^*$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_0^*(y_n) > 0.$$

取 M 中可数集为 $C = \{y_n\}$. 注意到 $\{y_n\}$ 是基序列, 故知当其有一弱极限点 y_0 时, 由 Ascoli-Mazur 定理, 必有

$$y_0 \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{\text{span}}\{y_{k+n}\colon n \in \mathbb{N}\},$$

而当回忆到引理 4 中结论 3) 证明的开始, 立即类似可得 $y_0 = 0$. 而此显然与开始关系式矛盾. 由此导出了结论 3).

3) $\Rightarrow$ 1), 4): 这是较明显的.

4) $\Rightarrow$ 3): 反之, 若设 $\overline{M}^w$ 为非 "弱自列紧" 集, 但 3) 不成立, 则存在一元列 $\{y_n\} \subseteq M$, 使得其在 E 中无弱收敛的子列, 但是其有弱极限点 y_0. 由此可知, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\inf_{n \geqslant n_0} \|y_n - y_0\| > 0;$$

(否则由存在收敛系列则导出存在弱收敛子列) 且当令 $M_0 = \{y_n\colon n \geqslant n_0\}$ 时, 还有 $y_0 \in \overline{M_0}^w$. 这样, 直接从引理 4 可知存在子列 $\{y_{n_k}\} \subseteq \{y_n\}$, 使得 $\{y_{n_k} - y_0\}$ 为一基序列. 注意到现设 3) 不成立, 故对 $\{y_{n_k}\} \subseteq M$ 而言, 其在 E 中亦具有弱极限点, 从而 $\{y_{n_k} - y_0\}$ 在 E 中也具有弱极限点. 但从 2) $\Rightarrow$ 3) 的证明中可知, 基序列只能以零元为弱极限点, 由此导出

$$y_{n_k} \xrightarrow[(\text{弱})]{} y_0 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

而此显然与 $\{y_n\}$ 前面取法矛盾. 由此定理得证. □

注意到上面定理要求集合是“有界”的, 而当结合数域中的紧集与列紧集都是有界集的性质, 由“共鸣定理”, 从上面定理就可直接得到下面十分实用的推理:

推理 在 Banach 空间中, 任意一个集的弱紧性与弱自列紧性是等价的.

注 而从 §9.6 显然还知, 事实上, 上推理中赋范空间的完备性是可以取消的, 但必须用另外的证明方法来验明.

习 题 九

9.1 设 E 为线性空间, $E^{\#}$ 为 E 上线性泛函之全体. $\Psi=\{\varphi_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ 为 $E^{\#}$ 的子集, 其是“全定”E 的. 试证明:

1) 在 Ψ 所产生的拓扑 $w(E,\Psi)$ 下, E 构成一个满足 T_0 公理的局部凸空间.

2) 对任意的 $\varphi_\lambda\in\Psi$, 其必为 E 在拓扑 $w(E,\Psi)$ 下的连续线性泛函.

3) 拓扑 $w(E,\Psi)$ 是使 Ψ 的所有泛函均连续的 E 上之最弱拓扑.

9.2 $\{e_k\}$ 为 E 上的一可数基, $\{f_k\}\subseteq E^*$ 为与 $\{e_k\}$ 对应的双正交组, 证明: $\{f_k\}$ 构成 E^* 的一可数基的充分必要条件是: 对任意 $f\in E^*$, $\sum_{k=1}^{\infty} f(e_k)f_k$ 均收敛.

9.3 设 E 为由拟范数族 $\Phi=\{\varphi_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ 所确定的局部凸空间. 试证明:

1) E 上线性泛函 f 连续的充分必要条件是: 存在有限个拟范数 $\varphi_{\lambda_1},\cdots,\varphi_{\lambda_n}\in\Phi$ 及常数 α, 使得

$$|f(x)|\leqslant\alpha\max_{1\leqslant k\leqslant n}\varphi_{\lambda_k}(x),\quad \forall x\in E.$$

2) 集 $M\subseteq E$ 有界的充分必要条件是

$$\sup_{x\in M}\varphi_\lambda(x)<+\infty,\quad \forall\varphi_\lambda\in\Phi.$$

3) 集 $M\subseteq E$ 完全有界的充分必要条件是: 对任意 $\varphi_\lambda\in\Phi,\varepsilon>0$, 存在 A 的有限子集 A_0, 使得对任意 $x\in A$, 存在 $x_0\in A_0$, 有 $\varphi_\lambda(x-x_0)<\varepsilon$(此性质称为 A 具有“有限的 $(\varepsilon,\varphi_\lambda)$ 网”).

9.4 设 E 为线性空间, $\Phi=\{\varphi_\alpha\colon \alpha\in\mathcal{A}\}$ 和 $\Psi=\{\phi_\beta\colon \beta\in\mathcal{B}\}$ 为 E 上的两族拟范数, 则 Φ 所确定的拓扑弱于 Ψ 所确定的拓扑之充分必要条件是: 对任意 $\alpha\in\mathcal{A}$, 存在 $\delta>0$ 及 $\beta_1,\cdots,\beta_n\in\mathcal{B}$, 使得

$$\varphi_\alpha(x)\leqslant\delta\max_{1\leqslant k\leqslant n}\phi_{\beta_k}(x),\quad \forall x\in E.$$

9.5 试证明: 由泛函列 $\{f_n\}\subseteq E^*$ 所产生的弱拓扑 $w(E,\{f_n\})$ 是可赋准范的.

9.6 设 E 为具有 T_0 公理的局部凸空间, M 为 E 中一个子集, 则 M 为弱完全有界的充分必要条件是 M 为弱有界的.

习 题 提 示

习 题 一

1.1 1) 由 V 的凸性, 有 $\frac{x_n+x_m}{2}\in V$, 从而由

$$d\leqslant\left\|\frac{x_n+x_m}{2}\right\|\leqslant\frac{\|x_n\|}{2}+\frac{\|x_m\|}{2}$$

可以导出结论.

2) 注意

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\overline{x}_n+\overline{x}_m}{2}\right\|&=\left\|\frac{\|x_n\|x_m+\|x_m\|x_n}{\|x_n\|+\|x_m\|}\right\|\cdot\frac{\|x_n\|+\|x_m\|}{2(\|x_n\|\cdot\|x_m\|)}\\&\geqslant d\frac{\|x_n\|+\|x_m\|}{2(\|x_n\|\cdot\|x_m\|)}\to 1(n,m\to\infty).\end{aligned}$$

3) 当 $d=0$ 时, 结论成立的例：在 $\mathbb{R}$ 中设 $V_1=(0,1)$. 结论不成立的例：在 $\mathbb{R}$ 中取 $V_2=(-1,2)$, 则由 $x_n=\frac{(-1)^n}{n}(n=1,2,\cdots)$, 可得结论.

1.3 例如, 可取 (ℓ^2) 中的标准基 $\{e_n\}$ 构成的点列.

1.4 从 Riesz 引理的证明中可见：存在 $\{x_n^0\}$, 使得

$$\begin{aligned}1\geqslant\|x_n^0\|&=\|x_n^0-\theta\|\\&\geqslant\inf_{y\in E_0}\|x_n^0-y\|\geqslant\varepsilon_n\to 1(n\to\infty).\end{aligned}$$

由 $\{x_n^0\}$ 的列紧性可导出结论.

1.5 首先注意到在“线性同构”下, 基底仍对应基底, 由此不难从 §1.5 中引理 1 通过坐标收敛的关系导出结论.

1.6 如果 F 是列紧集, 则由归纳法可以证得：对任意 $\frac{1}{n}>0(n=1,2,\cdots)$, F 必存在有限元组成的“$\frac{1}{n}$ 网” M_n, 于是可列集 $M=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$ 稠于 F. 这样一来, 对于 F 的任意开覆盖 $\{G_\iota\colon\iota\in I\}$, 以 M 中的元为中心, 以有理数为半径的一列含在某个 G_ι 中的开球仍覆盖 F. 由此可得 F 的可数子覆盖 $\{G_n\}\subset\{G_\iota\colon\iota\in I\}$. 反之, 若此可列子覆盖中不存在有限子覆盖, 则可取到点 $x_n\in F\setminus\bigcup_{k=1}^{n}G_k(n\in\mathbb{N})$. 由 F 自列紧的假设可知, $\{x_n\}$ 中含有收敛子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ 及 $x_0\in F$, 使得 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$, 但此 x_0 必然要属于某个 G_{n_0}, 由此可得出矛盾. 反过来, 如果

F 是紧集, 若设无穷点列 $\{x_n\}\subset F$ 无收敛于 F 中元的子列, 则对任意 $x\in F$, 存在 $\delta_x>0$, 使得开球 $O(x,\delta_x)$ 内除 x 外无 $\{x_n\}$ 的其他的点. 这样, 由 F 的紧性, 必可从 F 的开覆盖 $\{O(x,\delta_x):\ x\in F\}$ 中选出有限子覆盖, 由此可导出矛盾.

1.7 设 f 是 F 上的连续函数, 其开覆盖 $\{x\in F:\ f(x)<n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 必存在有限子覆盖, 由此可知 f 有上界. 故其必有上确界, 设其上确界为 a, 必存在 $\{x_n\}\subset F$, 使得 $f(x_n)\to a\ (n\to\infty)$. 由于 F 是自列紧, 故 $\{x_n\}$ 有收敛子列收敛于某点 $x_0\in F$. 由 f 连续可知 $f(x_0)=a$. 可知 a 是 $f(x)$ 的最大值. 同样 f 也有最小值.

1.8 不妨设 $0<a=\operatorname{Vrai}\max\limits_{t\in\Omega}|x(t)|$. 对任意 $a>\varepsilon>0$, 令 $\Omega_\varepsilon=\{t\in\Omega:\ |x(t)|\geqslant a-\varepsilon\}$, 可知

$$a(\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}\geqslant\left(\int_\Omega|x(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant(a-\varepsilon)(\mu(\Omega_\varepsilon))^{\frac{1}{p}}.$$

令 ε 充分小, 再令 $p\to\infty$, 注意到 ε 的任意性, 便得所需结果.

1.9 注意到复变函数论的一个基本定理：解析函数列的一致收敛极限仍是解析函数.

1.10 由各阶导函数的 Cauchy 列各收敛于一连续函数；由一致收敛的性质, 在积分号下取极限得知, 上面所得的各连续函数乃是同一函数之各阶导函数. 最后从 Cauchy 列的不等式中对一序列取极限则得结果.

1.11 由一致收敛易得一连续函数 $x_0(t)$. 再由 Cauchy 列假设还有

$$|x_0(t)|\leqslant|x_{n_0(t)}-x_0(t)|+|x_{n_0}(t)|<\varepsilon+|x_{n_0}(t)|,$$

从而容易验证 $x_0(t)\to 0(t\to\infty)$, 即 $x_0(t)\in C_0(-\infty,+\infty)$.

1.12 注意 $y_n=\sum_{k=1}^n x_k$ 是 E 的一 Cauchy 列.

1.13 由于直径所组成的数列 $\{\operatorname{diam}(O_n)\}$ 是不增有下界的, 故存在 $d_0>0$, 使得 $\operatorname{diam}(O_n)\downarrow d_0(n\to\infty)$. 取一球 O_{n_0}, 使得 $\operatorname{diam}(O_{n_0})<\frac{5}{4}d_0$, 当令 O_0 与 O_{n_0} 同心, 并以 $\frac{d_0}{2}$ 为直径的球时, 在 O_{n_0} 内任意不包含 O_0 的球的直径必不大于 $\frac{7}{8}d_0$.

1.14 可取各球心组成元列 $\{x_n\}$, 并且注意: $\|x_n-x_m\|<|\operatorname{diam}(O_n)-\operatorname{diam}(O_m)|\to 0(n,m\to\infty)$ 以及空间的完备性.

1.15 反例如下：在 $C[0,1]$ 中取函数列 $\{x_n\}$, 使得

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & \text{当}\,0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{n}\text{时},\\ \dfrac{t-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}, & \text{当}\,\dfrac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1\text{时}\end{cases}\quad(n\in\mathbb{N}).$$

作集列 $\{V_n\}\in C[0,1]$, 使得

$$V_n=\{x(t)\in C[0,1]:\ \ 0\leqslant x(t)\leqslant x_n(t)(t\in[0,1));x(0)=0,x(1)=1\}\quad(\forall n\in\mathbb{N}).$$

另一反例：在 (c) 中令

$$V_n = \{(\xi_k):\quad \xi_k = 0\ (1 \leqslant k \leqslant n),\quad 0 \leqslant \xi_k \leqslant 1(k > n),\quad \lim_{k\to\infty} \xi_k = 1\}\quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

(*其实在非“自反”空间中均能举出反例来：可以利用 James 定理，设 f_0 是非“自反”Banach 空间 E 中不能达范的连续线性泛函，令 $V_n = \{x \in B_1(E):\ f_0(x) \geqslant 1 - \frac{1}{n}\}$，则 V_n 即为所求.)

1.16 是可分的. 事实上，从 $C[-n,+n]$ 可分，设空间的可数稠集为 $\Omega_n^0, (n = 1,2,\cdots)$. 将 Ω_n^0 中的函数 $x(t)$ 连续延拓，使之成为 $C_0(-\infty,+\infty)$ 中的函数 $x_0(t)$，且

$$|x_0(t)| \leqslant \max\{x(-n), x(n)\},\quad \forall t \in (-\infty,+\infty) \setminus [-n,n].$$

这样得到的函数 $x_0(t)$ 的全体记为 $\Omega_n, (n = 1,2,\cdots)$. 令 $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_n$，则知：$\Omega$ 可数且在 $C_0(-\infty,+\infty)$ 中稠.

1.17 不可分，用归谬法验证. 反之若 $C_b[0,\infty)$ 可分，设函数列 $\{x_n(t)\} \subset C_b[0,\infty)$ 稠于 $C_b[0,\infty)$，则取一函数 $y_0(t) \in C_b[0,\infty)$ 使之满足

(i) 对于 $n = 0,1,2,\cdots$，(a) 当 $x_n(n) = 0$ 时，令 $y_0(n) = 1$，(b) 当 $x_n(n) \neq 0$ 时，令 $y_0(n) = -\frac{x_n(n)}{|x_n(n)|}$，

(ii) 在 $[0,\infty)$ 的其他部分 (线性连接)

$$y_0(t) = (n-t)y_0(n-1) + (t-n+1)y_0(n),\quad \forall t \in [n-1,n), n \in \mathbb{N},$$

可知

$$||y_0 - x_n|| = \sup_{0\leqslant t<\infty} |y_0(t) - x_n(t)| \geqslant |y_0(n) - x_n(n)| \geqslant 1,$$

对 $n = 1,2,\cdots$ 成立. 此与函数列 $\{x_n(t)\} \subset C_b[0,\infty)$ 稠于 $C_b[0,\infty)$ 矛盾.

另外一种证法：令 $\{x_s\} \subset C_b[0,\infty)]$ 为一族这样元的组合，每个 $x_s(t)$ 在 $t = n$ 上仅取 1 或者 0 $(\forall n \in \mathbb{N})$. 从实变可知，此集合势为 $2^{\mathbb{N}}$ 的势，不可列！并且对于其任意两个不同元 x_{s_1} 与 x_{s_2}，显然

$$||x_{s_1} - x_{s_2}|| \geqslant 1,\quad \forall s_1 \neq s_2.$$

由此可知：$\{x_s\}$ 是不可分的，从而 $C_b[0,\infty)$ 必亦不可分.

1.18 令 $D = \{(\xi_k) \in (s)$：ξ_k为有理数，且当 $k > n$ 时，有 $\xi_k \equiv 0\}$，则 D 为 (s) 的可数子集，且 D 在 (s) 中稠密. 事实上，对任意 $x = \{\xi_k\} \in (s), n \in \mathbb{N}$，令 $y = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots\}$，其中 $\frac{|\xi_k - r_k|}{1+|\xi_k - r_k|} \leqslant \frac{1}{n}(1 \leqslant k \leqslant n)$，则有 $y \in D$ 且 $||y - x|| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k - r_k|}{1+|\xi_k - r_k|} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$. 由 n 的任意性可知 D 在 (s) 中稠密.

1.19 类似于证明 L^p 可分的方法, 对任意 $x(t) \in L^p(-\infty, +\infty)$, 先由在有限区间 $[-n, +n]$ 之外取 0 值的函数"按范"逼近, 然后再对后者以连续函数来逼近, 最后由连续函数在有限区间上的积分关于平移连续可推得结果.

1.20 其一, 类似 $\mathbb{K}^n$ 范数 $||x|| = \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|$ 下完备的证法. 其二, 类似 $(\ell^p)(p \geqslant 1)$ 的证法.

1.21 注意到当 $p \leqslant q$ 时, 对任意 $x = \{\xi_n\} \in (l^p)$. 由于 $\sum_{n>N}|\xi_n|^p < \varepsilon^p(<1)$, 则有

$$\sum_{n>N}|\xi_n|^q = \sum_{n>N}|\xi_n|^p|\xi_n|^{q-p} \leqslant \varepsilon^{q-p}\sum_{n>N}|\xi_n|^p < \varepsilon^q.$$

而对于任意 $x(t) \in L^q(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, 由

$$\int_\Omega |x(t)|^p\mu(dt) = \int_{\{t\in\Omega:\quad |x(t)|>1\}}|x(t)|^p\mu(dt) + \int_{\{t\in\Omega:\quad |x(t)|\leqslant 1\}}|x(t)|^p\mu(dt) \leqslant \int_\Omega |x(t)|^q\mu(dt) + \mu(\Omega) < \infty$$

便可得结论.

1.22 充分性显然. 在必要性的证明中, 注意如果 $||x||_1 \to 0 \Rightarrow ||x||_2 \to 0$, 则对 $\varepsilon = 1$ 而言, 存在 $\delta_0 > 0$, 当 $||x||_1 < \delta_0$ 时, 有 $||x||_2 \leqslant 1$. 特别地, 对任意 $x \in E, x \neq \theta$. 由 $||\frac{\delta_0 x}{||x||_1}||_1 \leqslant \delta_0$, 便可导出

$$||x||_2 \leqslant \frac{1}{\delta_0}||x||_1$$

(此式当 $x = \theta$ 时, 亦对). 类似证明不等式的另一端.

习 题 二

2.1 例如在复 $C[a, b]$ 空间中考虑算子 $T(x) = \overline{x(t)}, \forall\, x = x(t) \in C[a, b]$.

2.2 反之, 如果 $f(x)$ 在 x_0 点取到"局部极小"值, 则存在闭球 $B(x_0, \delta_0)$, 使得

$$f(x) \geqslant f(x_0), \quad \forall x \in B(x_0, \delta_0).$$

这样就有

$$f\left(x_0 \pm \frac{\delta_0 x}{||x||}\right) \geqslant f(x_0), \quad \forall x \in E, x \neq \theta.$$

即 $\pm\frac{\delta_0}{||x||}f(x) \leqslant 0$ 从而 $f((x) = 0(\forall x \in E)$. 当 $f(x)$ 取"局部极大"值时, 可以考虑 $-f(x)$.

2.3 由 $k(s,t)$ 在闭区域上的连续性容易导出.

2.4 $[T(x)](z)$ 的解析性可以从其在 $|z|<1$ 能展成幂级数 (Taylor 级数) 而得. 事实上, 由于 $\sum_{k=0}^{\infty}(e^{it}z)^k=\frac{1}{1-ze^{it}}$ 关于 t 是一致收敛的, 因此, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(e^{it}z)^k-\frac{1}{1-ze^{it}}\right|<\varepsilon,\quad \forall t\in[0,2\pi].$$

于是,

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{2\pi}\frac{x(t)}{1-ze^{it}}dt-\sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi}(e^{it}z)^k x(t)dt\right|\\ \leqslant&\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{1-ze^{it}}-\sum_{k=0}^{n}(e^{it}z)^k\right||x(t)|dt\leqslant\varepsilon\int_0^{2\pi}|x(t)|dt,\end{aligned}$$

故对任意 $x\in L^1$, 均有

$$[T(x)](z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi}e^{ikt}x(t)dt\right)z^k,\quad \forall|z|\leqslant 1.$$

至于其作为从空间 L^1 到空间 $A_{\rho_0}(\rho_0<1)$ 的算子是连续线性算子, 则只要注意当 $|z|\leqslant\rho_0<1$ 时, 由 $|1-ze^{it}|\geqslant 1-|ze^{it}|\geqslant 1-\rho_0$, 有

$$||T(x)||\leqslant\frac{1}{1-\rho_0}||x||.$$

最后, 当取 $\{x_n\}=\{e^{int}\}$ 时, 由上面关于等比级数的展开式以及一致收敛的级数可以逐次积分, 故可以算出 $T(x_n)=0(n=1,2,\cdots)$. 因此, T 不是一一对应的, 从而 T^{-1} 不存在.

2.5 1) 对任意 $x\in E$, 记 $\alpha=\frac{f(x)}{f(x_1)}$, 则 $x-\alpha x_1\in N_f$. 2) 如果 $\alpha_1x_1+y_1=\alpha_2x_2+y_2$, 则由 $(\alpha_1-\alpha_2)x_1=y_1-y_2\in N_f$, 知 $\alpha_1=\alpha_2$, 从而 $y_1=y_2$.

2.6 "$\Rightarrow$": 注意上面习题 2.5 的结果可得: 对任意 $x_0\notin N_{f_1}$, 有 $x-\frac{f_1(x)}{f_1(x_0)}x_0\in N_{f_1}=N_{f_2}(\forall x\in E)$, 由此可知

$$f_2(x)f_1(x_0)=f_1(x)f_2(x_0),\quad \forall x\in E.$$

故当令 $\lambda=\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}$ 时, 即得所需结果. "$\Leftarrow$" 此是显然的.

2.7 "$\Rightarrow$": 对任意 $x_0\in H_{f_1}=H_{f_2}$, 容易证明

$$H_{f_1}-x_0=N_{f_1},\quad H_{f_2}-x_0=N_{f_2},$$

故有 $N_{f_1} = N_{f_2}$. 由上题的结果得：存在 $\lambda \neq 0$, 使得 $f_1(x) = \lambda f_2(x)$ $(\forall x \in E)$. 将 x_0 代入上面则得 $c_1 = \lambda c_2$. "$\Leftarrow$" ：此是显然的.

2.8 由

$$|\eta_i| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|\right) \sup_j |\xi_j| \quad (i = 1, 2, \cdots),$$

以及对任意 $i \in \mathbb{N}$, 取元 $x_i = \{\mathrm{sgn}\ a_{ij}\}_j \in (m)$, 则 $\|x_i\| = 1$, 且有

$$\|T(x_i)\| \geqslant |\eta_i| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|.$$

2.9 由

$$\sum_{i=1}^{n} |\eta_i| \leqslant \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|\right),$$

以及对任意 $1 \leqslant j \leqslant n$, 取元 $x_j = (\delta_{ij})_i$, 则有 $\|T(x_j)\| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

2.10 由线性代数知识可知, 当 T 为自共轭型时, 其特征值 $\lambda_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 均为实数, 且存在两两直交的由特征向量构成的基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$. 因而由

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \left\|T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i e_i\right\| \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i \alpha_i|^2} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2},\end{aligned}$$

以及当设 $\lambda_{i_0} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$ 时, 令 $x_0 = e_{i_0}$, 则有 $Tx_0 = \lambda_{i_0} e_{i_0}$.

2.11 分三步证明: (1) 对任意 $x \in E \backslash E_0$, 存在 $\{y_n\} \in E_0$, 使得 $y_n \to x (n \to \infty)$, 故可导出 $\{T_0(y_n)\}$ 为 E_1 的 Cauchy 列, 从而由 E_1 完备可定元 $T(x)$. (2) 上面定义是一意确定的, 即如果还有 $\{y_n'\} \subset E_0$, 使得 $y_n' \to x (n \to \infty)$, 则 $\|T_0(y_n) - T_0(y_n')\| \to 0 (n \to \infty)$. (3) T 是线性的, 且有 $\|T\| = \|T_0\|_{E_0}$.

2.12 必要性是容易导出的, 我们只要注意到, 如果 $C(\Omega)$ 可分而 Ω 不是紧的, 那么, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及 $\{\alpha_n\} \subset \Omega$, 满足

$$d(\alpha_i, \alpha_j) \geqslant \varepsilon_0, \quad (i \neq j;\ i, j \in \mathbb{N}).$$

类似于习题一第 17 题的方法, 可得 $C(\Omega)$ 中一函数 $x_0(t)$, 使其与 $C(\Omega)$ 中的可数稠集 $\{x_n(t)\}$ 均有 $\|x_0 - x_n\| \geqslant 1 (n \in \mathbb{N})$. 矛盾!

【注 *：此证明对完备空间是对的, 如果空间不是完备的, 可以使用下面的方法：

假设空间 Ω 不是紧的, 其中必有一点列 $\{t_m:\ \ m\in\mathbb{N}\}$ 不含有聚点. 由于 $C(\Omega)$ 是可分的, 其中必有稠密点列 $\{x_n\}\subset C(\Omega)$. 对任意 $i\in\mathbb{N}$, 由于 t_i 不是 $\{t_m:\ \ m\neq i\}$ 的聚点, 故存在 $d_i(i\in\mathbb{N})$, 使得

$$0<d_i\leqslant\min\left\{\frac{1}{i},\frac{1}{2}d(t_i,\overline{\{t_m:\ \ m\neq i\}})\right\}.$$

取 $\alpha_i\in\mathbb{K}$, 使得 $|\alpha_i-x_i(t_i)|\geqslant 1(\forall i\in\mathbb{N})$. 由 Urysohn 定理, 可作连续函数 $y_i\in C(\Omega)$, 使得

$$y_i(t_i)=\alpha_i;\ \ y_i(t)=0\ \ (\forall t\in\{d(t,t_i)\geqslant d_i\}).$$

由此可知: $y_i(i\in\mathbb{N})$ 的支集 $\{t:\ y_i(t)\neq 0\}$ 是互不相交的. 故当令 $x_0=\sum_{i=1}^{\infty}y_i$ 时, 此级数是逐点收敛的. 下面我们来说明 x_0 连续. 事实上, 对于任意 $t_0\in\Omega$, 注意 $\{x_n\}$ 没有聚点以及 $d_i\to 0(i\to\infty)$, 可知: 存在 $\delta_0>0,N_0\in\mathbb{N}$, 使得球域

$$B(t_0,\delta_0)\bigcap B(t_i,d_i)=\varnothing,\ \ \forall i>N_0,$$

于是当 x_0 限制在 $B(t_0,\delta_0)$ 上时, 有

$$x_0(t)=\sum_{i=1}^{N}y_i(t),\ \ \forall t\in B(t_0,\delta_0).$$

故由有限个连续函数的和的连续性可知 x_0 在 t_0 点连续, 而由 t_0 任意性, 则可导出 x_0 是连续函数. 最后, 显然有 $\|x_0-x_i\|\geqslant|\alpha_i-x_i(t_i)|\geqslant 1(\forall i\in\mathbb{N})$, 与 $\{x_n\}$ 在 Ω 中稠矛盾! ▌

充分性的证明较为困难些. 由于 Ω 是紧距离空间, 故存在可数稠密子集 $\{t_n\}\subset\Omega$. 再次用到其紧性, 对任意的 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $n_k\in\mathbb{N}$, 使得开球域 $\bigcup_{n=1}^{n_k}O(t_n,\frac{1}{k})=\Omega$. 令

$$A_{n,k}=O\left(t_n,\frac{1}{k}\right)\Bigg\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}O\left(t_i,\frac{1}{k}\right)\right)\quad(1\leqslant n\leqslant n_k),$$

$$\mathcal{F}_k=\left\{\sum_{n=1}^{n_k}r_n\chi_{A_{n,k}}:\ \ \forall r_n\in\mathbb{Q}\text{有理数域}\right\}$$

(其中: χ_A 表示集 A 的特征函数), 则 $\mathcal{F}_k$ 是可数集. 对于任意 $y\in\mathcal{F}_k$, 若集合 $B_{y,m}=\{x\in C(\Omega):\ \max_{t\in\Omega}|x(t)-y(t)|\leqslant\frac{1}{m}\}\neq\varnothing$, 则取 $S_{y,m}$ 为其一单点子集; 若 $B_{y,m}=\varnothing$, 则取 $S_{y,m}=\varnothing$. 再令 $\mathcal{G}_k=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{y\in\mathcal{F}_k}S_{y,m}$. 显然, $\mathcal{G}_k$ 是 $C(\Omega)$ 中一可数集, 故 $\mathcal{G}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{G}_k$ 是可数集. 我们只需说明 $\mathcal{G}$ 在 $C(\Omega)$ 中稠密即可. 事实上, 对于任意的 $x\in C(\Omega)$, 任意的 $\varepsilon>0$, 取 $m_0\in\mathbb{N}$, 使得 $\frac{1}{m_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 由 Ω 紧可知, x 是一致连续的, 故存在 $\delta>0$, 使得当 $d(t_1,t_2)<\delta$ 时, 有 $|x(t_1)-x(t_2)|<\frac{1}{2m_0}$. 取 $k_0\in\mathbb{N}$,

使得 $\frac{2}{k_0} \leqslant \delta$. 对任意 $1 \leqslant n \leqslant n_{k_0}$, 由于 $A_{n,k_0} \neq \varnothing$, 任取 $t_n \in A_{n,k_0}$, 再取有理数 $r_n \in (x(t_n) - \frac{1}{2m_0}, x(t_n) + \frac{1}{2m_0})(1 \leqslant n \leqslant n_{k_0})$, 并令 $y = \sum_{n=1}^{n_{k_0}} r_n \chi_{A_{n,k_0}}$, 由上面可知, $y \in \mathcal{F}_{k_0}$, 而且 $|x(t) - y(t)| < \frac{1}{m_0}$, 从而 $x \in B_{y,m_0}$, 故 $B_{y,m_0} \neq \varnothing$. 由前面做法, 其所对应的单点集 S_{y,m_0} 中含有一点 x_1, 可知 $x_1 \in \mathcal{G}$ 且 $||x - x_1|| < \frac{1}{m_0} < \varepsilon$.

2.13 注意到对 E 中的任意有界集 M, 对于 M 中任意点列 $\{x_n\}$, 如果含有子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $||x_{n_k}|| \equiv 0(k \in \mathbb{N})$, 显然 $T(x_{n_k})$ 是收敛子列; 否则, 不妨设 $||x_n|| \neq 0(\forall n \in \mathbb{N})$. 由假设, 此时 $\{T(\frac{x_n}{||x_n||})\}$ 含有收敛子列 $T(\frac{x_{n_k}}{||x_{n_k}||}) \to y_1 \in E_1$. 容易知道有界数列 $\{||x_{n_k}||\}$ 含有收敛子列, 当设为其自身时, 那么, 从 $||x_{n_k}|| \to \lambda_0$ 即得 $T(x_{n_k}) \to \lambda_0 y_1; (k \to \infty)$.

2.14 $||f|| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

2.15 在空间 (s) 中, 显然有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k = x, \quad \forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in (s).$$

由其上连续线性泛函 f 的连续性可知: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k)$, 而且存在 $\delta > 0$, 使得 $|f(x)| \leqslant 1(\forall ||x||^* < \delta)$. 取 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $\frac{1}{2^{n_0}} < \delta$, 则由 (s) 中准范 $||\cdot||^*$ 的表达式

$$||x||^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|}, \quad \forall\, x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in (s),$$

我们得到 $||\xi_k e_k||^* < \frac{1}{2^{n_0}} < \delta(\forall k > n_0, \xi_k \in \mathbb{K})$, 从而有

$$|\xi_k||f(e_k)| = |f(\xi_k e_k)| \leqslant 1, \quad (\forall\, k > n_0, \xi_k \in \mathbb{K}).$$

故导出 $f(e_k) = 0(\forall\, k > n_0)$. 因此, 当令 $f_k = f(e_k)$ 时 $(\forall\, k \in \mathbb{N})$, 则有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n_0} f_k \xi_k, \quad \forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in (s).$$

此即: f 对应于有限项非零的复数组 $(f_1, f_2, \cdots, f_{n_0}, 0, \cdots)$.

2.16 仅需注意: 对任意 $f \in (E_1 \times E_2)^*$, 当 x 仅在 $E_i(i = 1,2)$ 中变动时 (x 可视为乘积空间中的元 (x, θ) 或 (θ, x)), 则 f 可视为 $E_i^*(i = 1,2)$ 中的元 f_i 且有 $f[(x_1, x_2)] = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, 从而易得

$$||f|| = \max\{||f_1||, ||f_2||\}.$$

2.17 类似 2.16 题可知: 对任意 $f \in E^*$, 当 x 在 E_ι 中变动时, f 便成为 E_ι^* 中的元, 记为 f_ι, 且有表达式

$$f[(x_\iota)] = \sum_{\iota} f_\iota(x_\iota), \quad \forall (x_\iota) \in E.$$

注意到当 $p \geqslant 1$ 时,

$$|f[(x_\iota)]| \leqslant \sum_\iota |f_\iota(x_\iota)| \leqslant \sum_\iota ||f_\iota|| \, ||x_\iota||,$$

故知当 $\sum_\iota ||f_\iota||^q < +\infty$ 时, 由上面表达式确定的泛函 f 在 E^* 中, 而且 $||f|| \leqslant (\sum_\iota ||f_\iota||^q)^{\frac{1}{q}}$.

另一方面, 对于任意有限个指标 $\iota_k \in I(1 \leqslant k \leqslant n)$, 取元 $x^0_{\iota_k} \in E_{\iota_k}$, 使得 $||x^0_{\iota_k}|| = 1$ 且

$$|f_{\iota_k}(x^0_{\iota_k})| \geqslant (1-\varepsilon)||f_{\iota_k}|| \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

于是, 取 E 中元 $(\overline{x}_\iota)$, 使得其在上面各相应坐标上取元为 $||f_{\iota_k}||^{q-1}x^0_{\iota_k}(k = 1, 2, \cdots, n)$ 而在其余个坐标上取 θ 元, 那么, 我们可以得

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^n ||f_{\iota_k}||^q \leqslant |f[(\overline{x}_\iota)]| \leqslant ||f|| \cdot ||(\overline{x}_\iota)|| = ||f|| \left(\sum_{k=1}^n ||f_{\iota_k}||^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

即 $(1-\varepsilon)(\sum_{k=1}^n ||f_{\iota_k}||^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant ||f||$. 注意到 ε 的任意性, 可知上面 f 的表达式中的分量泛函 f_ι 必满足

$$\left(\sum_\iota ||f_\iota||^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant ||f||.$$

由上面两部分则可导出: $||f|| = (\sum_\iota ||f_\iota||^q)^{\frac{1}{q}}$.

2.18 注意

$$\begin{aligned} |[(T_n^* - T_0^*)g](x)| &= |g(T_n(x)) - g(T_0(x))| \\ &\leqslant ||T_n - T_0|| \cdot ||g|| \cdot ||x||, \quad \forall x \in E, g \in E_1^*. \end{aligned}$$

2.19 “$\Leftarrow$”: 是显然的; “$\Rightarrow$”: 取基底 $d_k(1 \leqslant k \leqslant n)$, 设 g_k 是 E_1 中的坐标泛函, 由有限维空间的特征, 可知

$$T(x) = \sum_{k=1}^n g_k(T(x))d_k, \quad g_k \in E_1^*(1 \leqslant k \leqslant n).$$

由此得 $T(x) = \sum_{k=1}^n [T^*(g_k)](x)d_k$. 显然式中 $T^*(g_k) \in E^*$.

2.20 首先, 由 $\mathcal{D}(T)$ 稠于 L^2 知 T^* 存在. 如果 $g \in \mathcal{D}(T^*)$, 则由 $T^*(g) = f \in (L^2)^* = L^2$, 必有 $f(x) = [T^*(g)](x) = g(T(x))$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tx(t)g(t)dt, \quad \forall x(t) \in \mathcal{D}(T).$$

故当取 $x(t)$ 为区间 $[a,s]$ 上的特征函数, 并取导数时, 可得到

$$f(s)=sg(s),\quad \text{a.e.}\quad s\in(-\infty,+\infty).$$

也即导出 $T^*(g)=tg(t)$. 另外, 显然有 $\mathcal{D}(T^*)=\mathcal{D}(T)$, 从而知 $T=T^*$.

2.21 类似上面的分析我们可得

$$\int_0^1 x(t)f(t)dt=\int_0^1 \frac{1}{i}x'(t)g(t)dt,\quad \forall x(t)\in\mathcal{D}(T).$$

特别地, 取空间中一元 $y_0(t)$, 使得 $\int_0^1 y_0(t)dt=0$, 并取 $x(t)=x_0(t)=i\int_0^t y_0(s)ds$. 则 $x_0(0)=x_0(1)=0$, 且上式变为

$$\int_0^1 x_0(t)f(t)dt=\int_0^1 y_0(t)g(t)dt.$$

再令 $h(t)=i\int_0^t f(s)ds$, 由

$$\int_0^1[x_0(t)f(t)-y_0(t)h(t)]dt=\frac{1}{i}\int_0^1[x_0(t)h'(t)-x_0'(t)h(t)]dt=\frac{1}{i}x0(t)h(t)|_0^1=0,$$

可得 $\int_0^1 y_0(t)[g(t)-h(t)]dt=0$. 最后, 由上述 $y_0(t)$ 的任意性则可导出：$g(t)=\alpha+i\int_0^t f(s)ds$, 即 $T^*(g)=\frac{1}{i}g'(t)(\forall g\in\mathcal{D}(T^*))$ (形式上与 T 相同). 然而, 注意到：为了 $g(t)\in\mathcal{D}(T^*)$ 必须且只须有

$$\int_0^1 x(t)\frac{1}{i}g'(t)dt=\int_0^1\frac{1}{i}x'(t)g(t)dt,\quad \forall x\in\mathcal{D}(T),$$

从而 (由分部积分法可得) $x(1)g(1)-x(0)y(0)=0$. 特别令 $x(t)=\alpha t+\beta$, 则可推出 $g(0)=g(1)=0$, 因而

$$\mathcal{D}(T^*)=\{x(t)\text{: }x(0)=x(1)=0,x\in\mathcal{D}(T)\}\subsetneqq\mathcal{D}(T).$$

2.22 当令

$$y_0(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ 1, & \frac{1}{2}<t\leqslant 1\end{cases}$$

时, 易见 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)dg(t)=\int_0^1 y_0(t)dg(t)\ (\forall g(t)\in(C[0,1])^*)$. 然而由上面 $y_0(t)\notin C[0,1]$, 故对任意 $x(t)\in C[0,1]$, 存在 $t_0\neq\frac{1}{2}$, 使得 $x(t_0)\neq y(t_0)$. 特别地, 当取

$$f_0(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<t_0,\\ 1, & t_0\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

时, 易见 $f_0(t) \in (C[0,1])^*$, 且对于 $\{x_n\}$ 的任意的子列 $\{x_{n_k}\}$, 有

$$\int_0^1 x_{n_k}(t)df_0(t) \to y_0(t_0) \neq x(t_0) = \int_0^1 x(t)df_0(t) \quad (k \to \infty).$$

2.23 注意此处假设及 §2.5 中的引理 2.

习 题 三

3.1 任取 $x_1 \in E \setminus E_0$, 先在 $E_1 = \text{span}\{x_1, E_0\}$ 上定义泛函 $f_1(y + \alpha x_1) = f_0(y) + \alpha$ $(\forall y \in y_0, \alpha \in \mathbb{K})$, 再用 Zorn 引理即可.

3.2 "⇒" : 取 $E_1 = E_0, P_0$ 为 E_0 上的"单位算子", 保范延拓于 E 上的算子 P 即为所求. "⇐" : T_0P 即 T_0 在 E 上的保范延拓算子.

3.3 "⇒" : 由 E 自反, 存在自然映射 $\widetilde{x} = J(x)$ $(\forall x \in E)$, 使得 $J(E) = E^{**}$. 对任意 $\widetilde{f}_0 \in E^{***}$, 在 E 中定义泛函 $f_0(x) = \widetilde{f}_0(\widetilde{x})$ $(\forall x \in E)$. 由此不难导出 $\widetilde{f}_0(\widetilde{x}) = \widetilde{x}(f_0)$ $(\forall \widetilde{x} \in E^{**})$, 从而得到 E^* 的自反性. "⇐" : 仍用自然映射 J: $E \to E^{**}$, 仅需证明 $J(E) = E^{**}$. 由 Hahn-Banach 定理可知, 此仅需证明: 对任意 $\widetilde{f}_0 = J(f_0) \in E^{***}$, 如果有 $\widetilde{f}_0[J(x)] \equiv 0$ $(\forall x \in E)$, 则有 $\widetilde{f}_0 = 0$. 为此, 注意到 E^* 的自反性, 则有 $f_0(x) \equiv 0 (\forall x \in E)$, 故有 $f_0 = 0$.

3.4 当 n 和 m 奇偶性相同时, 不妨假设 $n < m$, 由于 $E^{**} \subset E^{(n+2)*} \subset \cdots \subset E^{m*}$, 因此, 若在"自然映射"下, 当 $E^{n*} = E^{m*}$ 时, 我们可导出在"自然映射下"有 $E^{n*} = E^{(n+2)*}$, 即 E^{n*} 为自反. 从而由习题 3.3 可以导出 E 为自反. 故矛盾! 而当 n 和 m 奇偶性不相同时, 我们设 $m = n + 2k + 1$, 若有 $E^{(n+2k+1)*} = E^{n*}$, 则由假设有 (在等价意义下) $E^{n*} = E^{(n+2k+1)*} = E^{(n+4k+2)*} = E^{(n+6k+3)*}$. 当 n 是偶数时, 注意第 1 项等于第 3 项; 当 n 是奇数时, 注意第 2 项等于第 4 项, 则知上式与上段已证"E 的偶数次共轭空间互不等价"的结论矛盾!

3.5 2) 注意 Hahn-Banach 定理.

3.6 在 $E_0 = \{\xi x_0 \colon \xi \in \mathbb{K}\}$ 上定义 $f_0(\xi x_0) = \alpha_0 \xi ||x_0||$. 用 Hahn-Banach 定理即得结论.

3.9 1) 反之, 如果存在数 λ_0, 使得 $||\lambda_0 x_1 + (1-\lambda_0)x_2|| < 1$, 则注意此点 $\lambda_0 x_1 + (1-\lambda_0)x_2$ 在 x_1 和 x_2 连线的外部, 从而由中间一点可表为两端点的凸组合, 易得出此中间点 (x_1 或 x_2) 的范数严格小于 1 的结果. 2) 当 $\alpha + \beta \neq 0$ 时, 令 $\lambda = \alpha + \beta$, 注意 $||\alpha x_1 + \beta x_2|| = |\lambda| ||\frac{\alpha}{\lambda} x_1 + (1 - \frac{\alpha}{\lambda}) x_2||$ 即可.

3.10 1) 注意本章附录中定理 5 证明中的式 (3.7.4)~(3.7.6) 则可得到

$$\frac{c(x_1) - c(x_1 - nx)}{n} \leqslant \frac{c(x_1) - c(x_1 - mx)}{m}$$
$$\leqslant \frac{c(x_1 + mx) - c(x_1)}{m} \leqslant \frac{c(x_1 + nx) - c(x_1)}{n},$$

而代 $x_1=x_0, x=\frac{y}{n}$ 时, 不难看出 $\frac{c(x_0+ry)-c(x_0)}{r}$ 当 $r\to 0+$ 时, 是不增且有下界的, 因而可得结论. 2) 由凸性可得

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(x-y)\leqslant & \frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda} \\
& \leqslant f(x+y)-f(x)\quad (0<\lambda<1).
\end{aligned}
$$

由前一不等式可知 $\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}$ 对 λ 有下界, 由后一不等式可得, 对任意 $0<\theta<1$ 有

$$
\frac{f(x+\theta\lambda y)-f(x)}{\theta\lambda}\leqslant\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda},
$$

从而知 $\dfrac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}$ 当 $\lambda\to 0+$ 时不增, 因而可得结论.

3.11 由 $x_0\in V^\circ$, 故存在球 $B(x_0,\delta_0)\subset V^\circ$, 此 δ_0 即为所求 (否则, 或有 $y_1\in B(x_0,\delta_0)\subset V^\circ$, 或有 $y_2\in B(x_0,\delta_0)\subset V^\circ$, 矛盾!).

3.12 反之, 存在一开球 $B(\theta,r)\subset V$, 当设 $\frac{1}{n}<r$ 时, 对任意 $x_0\in S[0,1]$, 令

$$
x_k(t)=\begin{cases} nx_0(t), & \text{当}\dfrac{k-1}{n}\leqslant t<\dfrac{k}{n}\text{时}, \\ 0, & \text{当}t\in[0,1]\text{为其他值时}\ (\forall k\in\mathbb{N}), \end{cases}
$$

则有 $\|x_k\|\leqslant\frac{1}{n}<r$. 从而知 $x_k\in B(\theta,r)\subset V$, $(k=1,2,\cdots,n)$ 及 $x=\frac{\sum_{i=1}^n x_k}{n}\in V$, 也即导出凸集 V 与全空间 $S[0,1]$ 重合, 显然此与 V 的做法矛盾!

3.13 只要由 Ascoli-Mazur 定理证明点 $x_0\notin\overline{\mathrm{cov}M}$ 时必有

$$
x_0\notin\bigcap_{f\in E^*}\{x\in E:\quad f(x)\leqslant\sup_{y\in M}f(y)\}.
$$

3.15 当 $\mathcal{F}=E^*$ 时显然; 如果 $\mathcal{F}\subsetneqq E^*$, 则必有 $f_0\notin\mathcal{F}$, 使得 $d(f_0,\mathcal{F})>0$. 由分离性定理及 E 的自反性不难导出结论.

3.16 例如 $\mathcal{F}$ 取为 $L^2[a,b]$ 内的多项式的全体.

3.17 反之, 若 $f_1\notin\mathcal{F}$, 由正则闭可以导出一元 $\overline{x}\in M_0$, 但 $\overline{x}\notin H_1$, 故矛盾!

3.19 注意本章第 6 节的引理 (Helly 定理).

3.20 注意 $E^*=\bigcup_{n=1}^\infty B^*(\theta,n)$.

3.21 注意到范数 $\|f\|$ 的定义, 也可以直接利用 Hahn-Banach 定理再注意到空间的自反性得到.

3.23 注意一致凸的定义, 用归谬法证明.

3.25 先考虑函数 $f(\lambda)=\|x-\lambda y\|-(1-\lambda)\|y\|$ (当 $\|x\|<\|y\|$ 时) 或 $f(c)=\|y-cx\|-(1-c)\|x\|$ (当 $\|y\|\leqslant\|x\|$ 时), 从而得到提示的关系. 然后做:

$$
x_0=(x-cy)/(1-c)\|y\|,\quad y_0=(1-c)y/(1-c)\|y\|,
$$

由此, 利用上面习题 3.23 的结果, 对 x_0 和 y_0 计算 $||x_0 - y_0||$ 与 $||x_0 + y_0||$.

3.27 利用习题 3.24, 然后将

$$\left\|\frac{x_k}{||x_k||}\frac{y}{||y||}\right\| \leqslant 2(1-\delta(\alpha_k))$$

(其中 $k = 1, 2, \cdots, n$; $y = \sum_{k=1}^{n} x_k$) "通分" 后加起来整理即可.

3.28 1) 对 φ 用微分法.

2) 不妨设 $|\eta_1| < |\eta_2|$, 用 $|\eta_2|^q$ 除两端得形如

$$|1+\xi|^q + |1-\xi|^q \leqslant 2(1+|\xi|^p)^{q-1}$$

的不等式, 由 1) 只考虑 $\xi = \rho e^{i\varphi}(0 < \rho < 1, \varphi = 0)$ 的情形. 做变换

$$\xi = \frac{1-\rho_1}{1+\rho_1} \quad (0 < \rho_1 < 1).$$

由此, 我们只需验证不等式

$$\frac{1}{2}[(1+\rho_1)^p + (1-\rho_1)^p] - (1+\rho_1^q)^{p-1} \geqslant 0$$

是否成立. 此不等式确实是成立的. 其实, 从 Taylor 展开式可知, 其左端为

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[\frac{1-\rho_1^{(2k-p)/(p-1)}}{(2k-p)/(p-1)} - \frac{1-\rho_1^{2k/(p-1)}}{2k/p-1}\right]\rho_1^{2k},$$

其中: $c_k = \frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}(k = 1, 2, \cdots)$. 最后, 利用微分法证得 $(1-\rho_1^t)/t$ $(t > 0, 0 < \rho_1 < 1)$ 是 t 的减函数, 从而得出该式大于 0.

3) 不妨设 $0 < \alpha \leqslant \beta$, 用 β^p 除不等式两端可得

$$2(\rho^q+1)^{p-1} \leqslant 2^{p-1}(\rho^p+1) \quad (0 \leqslant \rho \leqslant 1).$$

令 $H(\rho) = 2^{(p-2)/p}\frac{(\rho^p+1)^{1/p}}{(\rho^p+1)^{1/q}}$, 注意用微分法验明 $H(\rho)$ 在 $\rho = 1$ 取最小值 $H(1) = 1$.

4) 对于空间 (ℓ^p) 利用上面 2) 和 3) 的两不等式, 取极限则得. 至于空间 $L^p[0,1]$ 可先由等分 $[0,1]$ 做阶梯形函数类似地有上面的不等式, 而由此种阶梯形函数稠于 $L^p[0,1]$ 空间, 且范数连续, 从而可得出所需结论.

5) 设 $r_k = \lambda\alpha_k + (1-\lambda)\beta_k$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, 做

$$f(\lambda) = \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^s\right)^{1/s},$$

利用 Cauchy 不等式证明 $f''(\lambda)$ 与 $s-1$ 同号以及凸凹关系便可得出结论.

6) 对于空间 (ℓ^p), 可在上面的 5) 中设

$$s = p/q, \quad \alpha_k = |\xi_k + \eta_k|^q, \quad \beta_k = |\xi_k - \eta_k|^q;$$

再利用 2) 的不等式, 然后取极限则得. 至于空间 $L^p[0,1]$ 可类似于 4) 的做法.

习 题 四

4.1 定义积空间 $E_1 = \{y = \{y_\iota | \iota \in I\} | \sup_\iota \| y_\iota \| < \infty, y_\iota \in E_\iota, \iota \in I\}$. 其内范数为 $\|y\| = \sup_\iota \|y_1\|$, 则 E_1 亦为 Banach 空间. 再定义从 E 中第二纲线性子空间 $\mathcal{D}(T)$ 到 Banach 空间 E_1 内的线性算子 T: $x \longmapsto \{T_\iota(x)\text{: } \iota \in I\}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$. 可验证 T 为闭算子. 最后, 由闭图像定理不难导出结论.

4.2 作积空间 $E_1 \times E_2$, 定义算子 T:

$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2, \quad \forall x_1 \in E_1, x_2 \in E_2.$$

易验证 T 为从 $E_1 \times E_2$ 到 E 上的一一对应的有界线性算子, 因此, 由 Banach 逆算子定理可以得出这里的结论.

4.3 注意考虑从 E 到 (c) 内的线性算子 T 为

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots), \quad \forall x \in E.$$

容易验证其为闭算子, 从而 T 为连续线性算子, 因此由 (c) 空间收敛的定义导出本题所求的结论.

4.4 注意 $\mathcal{W}(T^*) = \mathcal{D}[(T^*)^{-1}]$. 由 $(T^*)^{-1}$ 连续可知 T^* 为闭的, 从而 $(T^*)^{-1}$ 闭, 最后由 E_1^* 完备以及 §4.2 的定理和 §4.1 的命题 5 可得出 $\mathcal{D}[(T^*)^{-1}]$ 的闭性.

习 题 五

5.1 1) 只需注意到 $p(\theta) = p(2\theta)$ 及 $p(x)$ 的 γ 次加性;

2) 利用 1) 的方法可得 $p(\theta) \leqslant 0$, 又注意到 $p(x) = p(x+\theta)$, 利用 $p(x)$ 的 γ 次加性即可得所求的结论;

3) 只需利用 $p(x) = p(x+\theta)$ 以及 $p(x)$ 的 γ 次加性.

5.2 直接由范数的三角不等式可得 $p(x)$ 的次加性和正齐性. 此外, 验证 $\{x\text{: } p(x) \leqslant \alpha\}$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ 的闭性即可知 $p(x)$ 是下半连续的.

5.3 由条件知 $M_k = \{x \in E\text{: } \ |p(x)| \leqslant k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ 为闭集, 又由 Baire 纲定理知: 某一个 M_{k_0} 中必含有某一球 $B(x_0, \delta_0)$, 从而由 $p(x)$ 的次加正齐性可知 $p(x)$ 为强有界的.

5.4 对于次加正齐性泛函列 $\{p_{m,n}(x)\}=\{\|T_{m,n}(x)\|\}$ 使用共鸣定理可知

$$A_m=\{x\in E:\quad \limsup_{n\to\infty}\|T_{m,n}(x)\|<\infty\}$$

为第一纲集, 则 $Q=E\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$ 即为所求.

5.5 构造无穷矩阵 $A=(\alpha_{ij})$ 如下：对任意 $i\in\mathbb{N}$, 当 $j=1,2,\cdots,i$ 时, 有 $\alpha_{ij}=\frac{y_j-y_{j-1}}{y_i}$; 当 $j\geqslant i+1$ 时, 有 $\alpha_{ij}=0$, 则由 Steinhaus-Toeplitz 定理可知 A 为 "保存矩阵". 因此 $\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\}$ 的 "A- 极限" 等于通常意义的极限, 此即得到 Stolz 定理.

5.6 只需取 "保存矩阵" $A=(\zeta_{ij})$ 如下：当 $j\leqslant i$ 时, 有 $\zeta_{ij}=0$; 当 $j>i$ 时, 有 $\zeta_{ij}=\alpha_{j-i}$.

5.7 设泛函

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k,\quad \forall\, x=\{\xi_k\}\in(c)\quad(n\in\mathbb{N}).$$

再利用共鸣定理即得所需结论.

5.8 取

$$b_n(t)=\begin{cases}b(t), & |b(t)|\leqslant n;\\ n, & |b(t)|>n.\\ -n & b(t)<-n.\end{cases}$$

再做 $L^2[0,1]$ 上的连续线性泛函列 $f_n(x)=\int_0^1 b_n(t)x(t)dt\ (\forall\, x(t)\in L^2[0,1]),\forall n\in\mathbb{N}$ 则由 Lebesgue 控制收敛定理可知 $\{f_n\}$ 是逐点有界的, 再利用共鸣定理即可得到 $\{f_n\}$ 在 $L^2[0,1]$ 的单位球面上是一致有界的, 从而 $b(t)\in L^2[0,1]$.

5.9 利用反证法可知：存在 $\{x_n\}\subset S_1(E)$, 使得 $\|T(x_n)\|\to\infty$. 故在 G_1^* 上定义线性连续泛函

$$F_n(g)=g[T(x_n)],\quad \forall g\in G_1^*.$$

并由共鸣定理可知存在 $\rho>0$, 使得 $\|T(x_n)\|=\|F_n\|\leqslant\rho\quad(n\in\mathbb{N})$, 此即为矛盾.

习 题 六

6.1 设 $\{e_\lambda:\ \lambda\in\Lambda\}$ 为 Hilbert 空间 E 中的标准正交基, 则 $(e_\alpha,e_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$, 且当 $\alpha\neq\beta$ 时, $\|e_\alpha-e_\beta\|=\sqrt{2}$. 故若 Λ 不可数, 则与 E 可分相矛盾.

6.2 易证 $\{e_n\}$ 为 $L^2(-\infty,+\infty)$ 的标准正交系. 又由于 $\{e_n\}$ 是由 $\{1,t,t^2,\cdots,t^n,\cdots\}$ 标准正交化而得到, 由此即可证得所需的结论.

6.3 由已知条件容易验证：$(Ax,y)=(x,Ay)$ 是成立的, 故 A 为自伴算子.

6.4 由 $\lambda - A_n = [I - (A_n - A)(\lambda I - A)^{-1}](\lambda I - A)$ 即可知.

习 题 九

9.1 注意此拓扑下邻域的定义则易验之.

9.2 必要性显然. 充分性: 只需注意到此时 $\{\sum_{k=1}^{n} f(e_k)f_k\}_n$ 为 E^* 的一 Cauchy 列, 故 $\sum_{k=1}^{\infty} f(e_k)f_k$ 在 E^* 中收敛, 再从 $\{e_n\}$ 是 E 中的基即可导出.

9.3 1) 充分性: 用 f 在零点某一邻域有界可以导出. 必要性: 由 f 连续, 故 $V = \{x \in E\colon\ |f(x)| < 1\}$ 为零点一开邻域. 再注意到 Φ 的拓扑的定义可知, 存在一邻域 $W = \{x \in E\colon\ \varphi_{\lambda_k}(x) < \varepsilon, 1 \leqslant k \leqslant n\}$, 使得 $W \subseteq V$, 从而不难导出.

2) 和 3) 直接从有界集和完全有界集的定义以及拟范数族拓扑的定义导出.

9.4 充分性: 从设, 对任意有限个 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathcal{A}$, 存在 $\delta > 0$ 及 $\beta_1, \cdots, \beta_m \in \mathcal{B}$, 使得 $\max_{1\leqslant i\leqslant n} \varphi_{\alpha_i}(x) \leqslant \delta \max_{1\leqslant j\leqslant m} \phi_{\beta_j}(x) (\forall x \in E)$. 由此从 Φ 和 Ψ 所定的拓扑定义容易导出. 必要性: 由设, 对 Φ 拓扑下的邻域 $U_\alpha = \{x \in E\colon\ \varphi_\alpha(x) < 1\}$, 必存在 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 及 $\varepsilon > 0$, 使得 $\bigcap_{k=1}^{n}\{x \in E\colon \phi_{\beta_k}(x) < \varepsilon\} \subseteq U_\alpha$. 由此不难导出结论.

9.5 令 $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}$. 可证即为所求.

9.6 仅证充分性. 由弱有界可知: $\sup_{x\in M} |f(x)| < +\infty\ \ (\forall f \in E^*)$. 作积空间 $F = \prod_{f\in E^*} \mathbb{K}_f (\mathbb{K}_f = \mathbb{K})$ 并定义 E 到 F 的一个算子 T 为: $T(x) = \{f(x)\colon\ \ f \in E^*\}$. 可证在弱拓扑下 T 连续, 此外 T^{-1} 存在并连续, 即 T 为 E 到 $T(E)$ 的同胚映射. 而注意到: 投影集 $J_f(T(M))$ 均有界, 故由 Tychonoff 定理可知 $\prod_{f\in E^*} \overline{J_f(T(M))}$ 亦为 F 中的紧集, 故 $T(M)$ 也是紧集, 由此 M 亦在弱拓扑下完全有界.

参 考 文 献

[1] 定光桂. 巴拿赫空间引论. 北京: 科学出版社, 1984

[2] 定光桂. 拓扑线性空间选讲. 南宁：广西教育出版社, 1984

[3] Ding G G. On the boundedness of sphees in F^*-spaces. *Acta Math Sci,* 2002, 22 (4): 500~506

[4] 那汤松. 实变函数论. 北京: 高等教育出版社, 1958

[5] Бари Н К. А треатисе он триогонометриц сетиес. Ошфорд: Пергамон Пресс, 1964

[6] James R C. A non-reflexive Banach spacesisometric with its second conjugate space. Proc Nat Acad Sci U S A, 1951, 37: 174~177

[7] Kakutani S. Some characterizations of Eucliden spaces. Jap J Math, 1939, 16: 93~97

[8] Bohnenblust H F, Sobczyk A. Extentions of functional on complex linear spaces. Bull Amer Math Soc, 1938, 44: 91~93

[9] Day M M. The spaces L^p with $0 < p < 1$. Bull Amer Math Soc, 1940, 46: 816 ~ 823

[10] Dunford N, Schwartz J T. Linear Operator, I. New York: Interscience Publishers, 1958

[11] Hille E, Phillips R S. Functional analysis and semi-groups. American Mathematical Society, Providence, R I, 1957

[12] Hanner O. On the uniform Convexity of L^p and l^p. *Ark Mat,* 1956, 3: 239 ~ 244

[13] Кадец М И. О Топологицеской Эквивалентнсти равномепно Выпуклых простпанств. УМН, 1955, 10: 137~141

[14] Clarkson J A. Uniformly convex spaces. Trans Amer Math Soc, 1936, 40: 396~414

[15] Day M M. Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. Bull Amer Math Soc, 1941, 47: 313~317

[16] Hörmander L. On the theory of general partial differential operators. Acta Math, 1955, 94: 161~248

[17] 关肇直, 田方增. 赋范环论. 数学进展, 1955, 1: 107~216, 223~363

[18] Kelley J L, Namoka I. and others. Linear Topological Spaces. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1963

[19] Deutsch F R, Maserick P H. Applications of the Hahn-Banach theorem in approximation theory. SIAM *Rev.* 1967, 9: 516~530

[20] Хависон С Я. Об аппрокцимакии Элементами выпуклых множств Д. АН СССР, 1967, 172: 294~297

[21] Гаркави И М. Теоремы дюйственности для приближений посредством Элементов Выпуклых Множеств. УМХ, 1961, 16: 141~145

[22] Рубинщтейн Г ш. Об олной Эксглемальной задаче в Ленейном нормированном просгпанстве. сибир Мате ж, 1965, 6: 711~714

[23] Singer I. Un dual du théoreme de Hahn-Banach. C R Acad. Sci Paris. 1958, 247: 408~411

[24] Pták V. Biorthogonal systems and reflexivity of Banach spaces. Czechoslovak Math *J,* 1959, 9: 319~326

[25] Saks S. Theory of the Integral. New York: Hafner, 1937

[26] 定光桂. 关于拟次加泛函的一些性质. 数学学报, 1982, 25: 410~418

[27] 定光桂. 关于凸泛函族的"共鸣定理". 数学学报, 1981, 24: 851~956

[28] Ding G G. The uniform boundedness principle in some topological vector groups. Systems Sci and Math Sci, 2000, 13(3): 292~301

[29] 那汤松. 函数构造论. 北京: 科学出版社, 1958

[30] Dancer E N, Sims B. Weak star separability. Bull Austral Math Soc, 1979, 20: 253~257

[31] Holmes R B. Geometric Functional Analysis and its Applications. New York: Springer-Verlag, 1975

[32] Bessaga C, and Pelczyński. A. On extreme points in separable conjugate spaces. Israel J Math, 1966, 4: 262~264

[33] Phelps R. Lectures on Choquet's theorem. Princeton, N J : Van Nostrand, 1966

[34] Diestel J. Sequence and Series in Banach Spaces. New York: Springer-Verlag, 1984

[35] Hoffman K. Banach Spaces of Analytic Functions. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1962

[36] LaSalle J P. Pseudo-normed linear spaces. Duke Math J, 1941, 8: 131~135

[37] Taylor A E. Introduction to Functional Analysis. New York: Wiley, 1958

[38] James R C. Characterizations of reflexive Banach spaces. Studia Math. (Ser. Specjalna) Zeszyt, 1963, 1: 55~56

[39] James R C. A counterexample for asup theorem in normed spaces. Israel J Math. 1971, 9: 511~512

索　引

J

K

L

N

P

R

S

T